This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

Nachrichten

von der

K. Gesellschaft der Wissenschaften

und der

THIS ITEM HAS BEEN MICROFILMED BY
STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
REFORMATTING SECTION 1994. CONSUL
SUL CATALOG FOR LOCATION.

Göttingen.
Verlag der Dieterichschen Buchhandlung.
1873.

Göttingen,
Druck der Dieterichschen Univ.-Buchdruckerei.
W. Fr. Kästner.

Register

über die

Nachrichten

von der

königl. Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

aus dem Jahre 1873.

J. Barrande, Ehrenmitglied 807.
Th. Benfey, Indogermanisches Particip. Perf. Pass. auf tua oder tva 181.
— Dionysos; Etymologie des Namens 187.
— Die Suffixe anti, âti und ianti, iâti 391.
— Ein Theil des Mongolischen Ardschi-Bordschi und Stücke des Pantschatantra im Singhalesischen 404.
— Ueber Augensprache, Mienenspiel, Gebärden und Stimmmodulation 407.
— ásmṛitadhrú, Rigveda X, 61, 4. 519.
C. A. Bjerknes, Geschichtliche Notizen über das Dirichletsche Kugel- und Ellipsoid-Problem 439.
— Verallgemeinerung des Problems von dem ruhenden Ellipsoid in einer bewegten, unendlichen Flüssigkeit 448.
— Verallgemeinerung des Problems von den Bewegungen, welche in einer ruhenden, un-

88062

elastischen Flüssigkeit die Bewegung eines Ellipsoids hervorbringt 829.
— Correspondent 807.
P. du Bois-Reymond, Ueber die Fourierschen Reihen 571.
J. Brandis, Correspondent, gestorben 806.
A. Breithaupt, Correspondent, gest. 806.
A. Brill und *M. Nöther*, über die algebraischen Functionen und ihre Anwendung in der Geometrie 116.
A. v. Brunn, Ueber das Vorkommen organischer Muskelfasern in den Nebennieren 421.
— Zur Lehre von der Knorpelverknöcherung 551.

C. Claus, Ueber die Abstammung der Diplophysen, und über eine neue Gruppe von Diphyiden 257.
— aus den ordentlichen Mitgliedern der Akademie ausgeschieden 806.

A. Enneper, Bemerkungen über die Enveloppe einer Kugelfläche 217.
— Bemerkungen über die orthogonalen Flächen. 2te Note. 423.
— Bemerkungen zur allgemeinen Theorie der Flächen 785.
H. Ethé, Beiträge zur Kenntniss der ältesten Epoche neupersischer Poesie. Rûdagî, der Sâmâniden-Dichter 663.
E. Ewald, Erwerbung und Herausgabe orientalischer Werke durch die K. Soc. d. W. 1.
— Ueber die Eintheilung der Babylonischen Mine in Sékel 600.
— Ueber den sogen. Orientalischen Redeschwust 1810.

G. Fiorelli, Ehrenmitglied 807.

E. Frankland, auswärtiges Mitglied 807.
F. Frerichs s. *Hübner*.

Göttingen:
I. Königl. Gesellschaft der Wissenschaften.
A. Feier des Stiftungstages 805.
B. Jahresbericht, erstattet vom Sekretär 805.
C. Vorlesungen und Abhandlungen:
H. Ewald, Erwerbung und Herausgabe Orientalischer Werke durch d. K. Soc. d. W. 1.
H. v. Ihering, Beitrag zur Entwicklungsgeschichte des menschl. Stirnbeins 5.
M. Réthy, Ueber ein Dualitätsprincip in der Geometrie 6.
E. Schering, Linien, Flächen und höhere Gebilde in mehrfach ausgedehnten Gaussischen und Riemannschen Räumen 13.
G. Hanche, Ueber die Beugung des Lichts 22.
B. Listing, Ueber unsere jetzige Kenntniss von der Gestalt und Grösse der Erde 33.
B. Tollens und *R. Wagner*, Ueber Parabansäurehydrat 101.
B. Tollens, Notiz zur Auffindung von Schwefelverbindungen mittelst des Löthrohres 106.
H. Grenacher, zur Entwicklungsgeschichte und Morphologie der Cephalopoden 107.
A. Brill und *M. Nöther*, über die algebraischen Functionen und ihre Anwendung in der Geometrie 116.
E. Schering, Die Schwerkraft in mehrfach ausgedehnten Gaussischen und Riemannschen Räumen 149.
B. Minnigerode, Ueber die Vertheilung der quadratischen Formen mit complexen Coefficienten und Veränderlichen in Geschlechter 160.

Th. Benfey, Indogermanisches Particip. Perf. Pass. auf tua oder tva 181.
— Dionysos; Etymologie des Namens 187.
R. Pischel, Ueber eine südindische Recension des Çakuntalam 189.
A. Enneper, Bemerkungen über die Enveloppe einer Kugelfläche 217.
C. Claus, Ueber die Abstammung der Diplophysen und eine neue Gruppe von Diphyiden 257.
F. Kohlrausch, Ueber das elektrochemische Aequivalent des Wassers 262.
W. Klinkerfues, Ueber einen grossen Sternschnuppenfall aus dem Jahre 524 n. Chr. und seinen muthmasslichen Zusammenhang mit dem Cometen von Biela und dem des Jahres 1162 275.
A. Mayer, Zur Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung 299.
A. Sturm, Das Problem der räumlichen Projectivität 311.
R. Wagner und *B. Tollens*, Ueber die aus βBibrompropionsäure zu erhaltende Monobromacrylsäure 320.
O. Philippi und *B. Tollens*, Ueber die Bibrompropionsäure aus Propionsäure 324.
R. Wagner und *B. Tollens*, Ueber Diallyl und Versuche zur Gewinnung von Allylbenzol 330.
W. Klinkerfues, Fixstern-Systeme, Parallaxen und Bewegungen 339.
F. Wieseler, Beiträge zur Symbolik der Griechen und Römer 363.
G. Waitz, Verlorne Mainzer Annalen 388.
Th. Benfey, Die Suffixe anti, âti und ianti, iâti 391.
— Ein Theil des Mongolischen Ardschi-

Bordschi und Stücke des Pantschatantra im Singhalesischen 404.
Th. Benfey, Ueber Augensprache, Mienenspiel, Gebärden, Stimmmodulation 407.
G. Quincke, eine neue Methode, Kreiseintheilungen zu untersuchen 411.
A. Voss, Note, betreffend die eindeutige Transformation ebener Curven 414.
— Zur Geometrie der Fläche 418.
A. v. Brunn, Ueber das Vorkommen organischer Muskelfasern in den Nebennieren 421.
A. Enneper, Bemerkungen über die orthogonalen Flächen. 2te Note 424.
A. Bjerknes, Geschichtliche Notizen über das Dirichletsche Kugel- und Ellipsoid-Problem 439.
— Verallgemeinerung des Problems von dem ruhenden Ellipsoid in einer bewegten, unendlichen Flüssigkeit 448.
W. Klinkerfues, Nachtrag zur Methode der Parallaxenbestimmung der Radianten 460.
H. G. Lolling, Beiträge zur Topographie Athens 463.
Th. Benfey, ásmṛitadhrú, Rigvéda X, 61, 4. 519.
F. Wieseler, Ueber einige im Orient erworbene Bildwerke und Alterthümer 522.
E. Riecke, Ueber das Webersche Grundgesetz der elektrischen Wechselwirkung in seiner Anwendung auf die unitarische Hypothese 536.
A. Voss, Zur Geometrie der Plückerschen Liniengebilde 544.
A. v. Brunn, Zur Lehre von der Knorpelverknöcherung 551.
P. du Bois-Reymond, Ueber die Fourierschen Reihen 571.
G. Waitz, Ueber die Annales Sithienses 587.

H. Ewald, Ueber die Eintheilung der Babylonischen Mine in Sékel 600.
A. Voss, Zur Geometrie der Brennflächen von Congruenzen 611.
B. Minnigerode, Ueber eine neue Methode, die Pellsche Gleichung aufzulösen 619.
H. Hübner und *H. Retschy*, Ueber eine Base aus Nitrobenzanilid 655.
— und *G. Struck*, Zur Kenntniss der aus Steinkohlentheer zu erhaltenden Xylidine 656.
— und *G. Jacobsen*, Ueber die Verbindung der Nitrile mit den Aldehyden 659.
— und *F. Frerichs*, Ueber Thihydrobenzoësäure 661.
H. Ethé, Beiträge zur Kenntniss der ältesten Epoche neupersischer Poesie. Rûdagî, der Sâwânidendichter 663.
E. Schering, Hamilton-Jacobische Theorie für Kräfte, deren Mass von der Bewegung der Körper abhängt 744.
R. Wagner, *O. Philippi* und *B. Tollens*, Untersuchungen über die Allylgruppe 754.
A. v. Grote und *B. Tollens*, Ueber eine aus Rohrzucker durch verdünnte Schwefelsäure entstehende Säure 759.
B. Tollens, Verbindung von Stärke mit Alkali 762.
J. Lüroth, Ueber das Rechnen mit Würfen 767.
K. Hattendorf, Bemerkungen zu dem Sturmschen Satze 779.
A. Enneper, Bemerkungen zur allgemeinen Theorie der Flächen 785.
H. Ewald, Ueber den sogen. Orientalischen Redeschwulst 810.
J. Reinke, Ueber die Function der Blattzähne

und die morphologische Werthigkeit einiger Laubblatt-Nektarien 822.
C. A. Bjerknes, Verallgemeinerung des Problems von den Bewegungen, welche in einer ruhenden unelastischen Flüssigkeit die Bewegung eines Ellipsoids hervorbringt 829.
F. Wöhler, Die Meteoriten der Universitäts-Sammlung zu Göttingen Jan. 1874. 871.
D. Preisaufgaben:
a. der Wedekindschen Preisstiftung für deutsche Geschichte 265.
b. der Kgl. Gesellsch. der Wiss.:
für den Nov. 1874 von der histor.-philol. Classe 807.
für den Nov. 1875 von der physikal. Classe 809.
für den Nov. 1876 von der mathemat. Classe 809.
E. Verzeichniss der bei der Kgl. Gesellsch. der Wiss. eingegangenen Druckschrifschriften: 11. 32. 99. 216. 255. 274. 310. 337. 437. 517. 533. 584. 653. 763. 828. 868.

Göttingen:
II. Universität.
A. Verzeichniss der Vorlesungen auf der Georg-August-Universität während des Sommerhalbjahrs 1873: 133; — während des Winterhalbjahrs 1873—74: 555.
B. *a.* Preisvertheilung 384.
b. Neue Preisaufgaben 385.

H. Grenacher, Zur Entwicklungsgeschichte und Morphologie der Cephalopoden 107.
A. v. Grote und *B. Tollens*, Ueber eine aus

Rohrzucker durch verdünnte Schwefelsäure entstehende Säure 759.

Chr. Hansteen, auswärtiges Mitglied, gest. 806.
K. Hattendorf, Bemerkungen zu dem Sturmschen Satze 779.
O. Hesse, auswärtiges Mitglied 807.
H. Hübner und *H. Retschy*, Ueber eine Base aus Nitrobenzanilid 655.
— und *G. Struck*, Zur Kenntniss der aus Steinkohlentheer zu erhaltenden Xylidine 656.
— und *G. Jacobsen*, Ueber die Verbindungen der Nitrile mit den Aldehyden 659.
— und *F. Frerichs*, Ueber Thihydrobenzoësäure 661.

G. Jacobsen s. *Hübner*.
H. v. Ihering, Ein Beitrag zur Entwicklungsgeschichte des menschlichen Stirnbeins 5.

G. v. Karajan, Ehrenmitglied, gest. 806.
W. Klinkerfues, Ueber einen grossen Sternschnuppenfall aus dem Jahre 524 nach Chr. und seinen muthmasslichen Zusammenhang mit dem Cometen von Biela und dem des Jahres 1162. 275.
— Ueber Fixsternsysteme, Parallaxen und Bewegungen 339. Nachtrag dazu 460.
F. Kohlrausch, Ueber das electrochemische Aequivalent des Wassers 262.

J. v. Liebig, auswärtiges Mitgl., gest. 806.
J. B. Listing, Ueber unsere jetzige Kenntniss der Gestalt und Grösse der Erde 33.
H. G. Lolling, Beiträge zur Topographie von Athen 463.
J. Lüroth, Ueber das Rechnen mit Würfen 767.

G. Fiorelli, [illegible]

A. Mayer, Zur Integration der partiellen Integralgleichungen erster Ordnung 299.
B. Minnigerode, Ueber die Vertheilung der quadratischen Formen mit complexen Coefficienten und Veränderlichen in Geschlechter 160.
— Ueber eine neue Methode die Pellsche Gleichung aufzulösen 619.
— Assessor 807.

C. F. Naumann, auswärt. Mitgl., gest. 806.
M. Nöther s. *Brill.*

O. Philippi s. *Wagner.*
— und *B. Tollens*, Ueber die Bibrompropionsäure aus Propionsäure 324.
R. Pischel, Ueber eine südindische Recension des Çakuntalam 189.

G. Quincke, Ueber die Beugung des Lichts 22.
— Eine neue Methode, Kreiseintheilungen zu untersuchen 411.

J. Reinke, Ueber die Function der Blattzähne und die morphologische Werthigkeit einiger Laubblatt-Nektarien 822.
M. Réthy, Ueber ein Dualitäts-Princip in der Geometrie des Raumes 6.
H. Retschy s. *Hübner.*
E. Riecke, Ueber das Webersche Grundgesetz der electrischen Wechselwirkung in seiner Anwendung auf die unitarische Hypothese 536.
A. de la Rive, auswärt. Mitgl., gest. 806.
G. Rose, auswärt. Mitgl., gest. 806.

E. Schering, Linien, Flächen und höhere Gebilde im mehrfach ausgedehnten Gaussischen und Riemannschen Raume 13.

— Die Schwerkraft in mehrfach ausgedehnten Gaussischen und Riemannschen Räumen 149.
— Hamilton-Jacobische Theorie für Kräfte, deren Mass von der Bewegung der Körper abhängt 744.
C. F. v. Stälin, auswärt. Mitgl., gest. 806.
J. S. Stas, Correspondent 807.
G. Struck s. *Hübner*.
R. Sturm, Das Problem der räumlichen Projectivität 311.

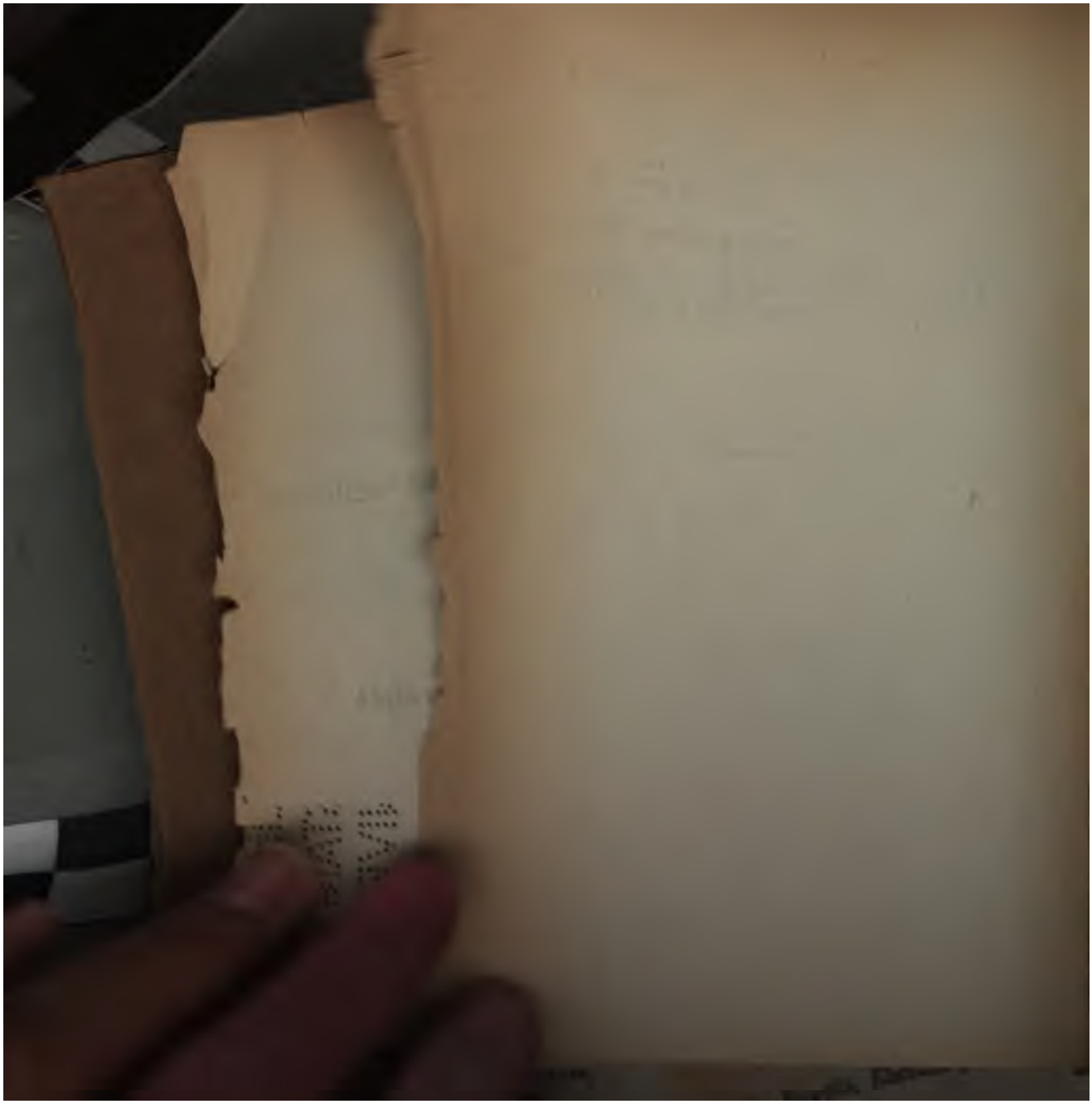
J. Thomae, Correspondent 807.
B. Tollens, Notiz zur Auffindung von Schwefelverbindungen mittelst des Löthrohres 106.
— Ueber Verbindungen von Stärke mit Alkali 762.
— und *R. Wagner*, Ueber Parabansäurehydrat 101.
— s. *Wagner*.
— s. *Philippi*.
— s. *v. Grote*.

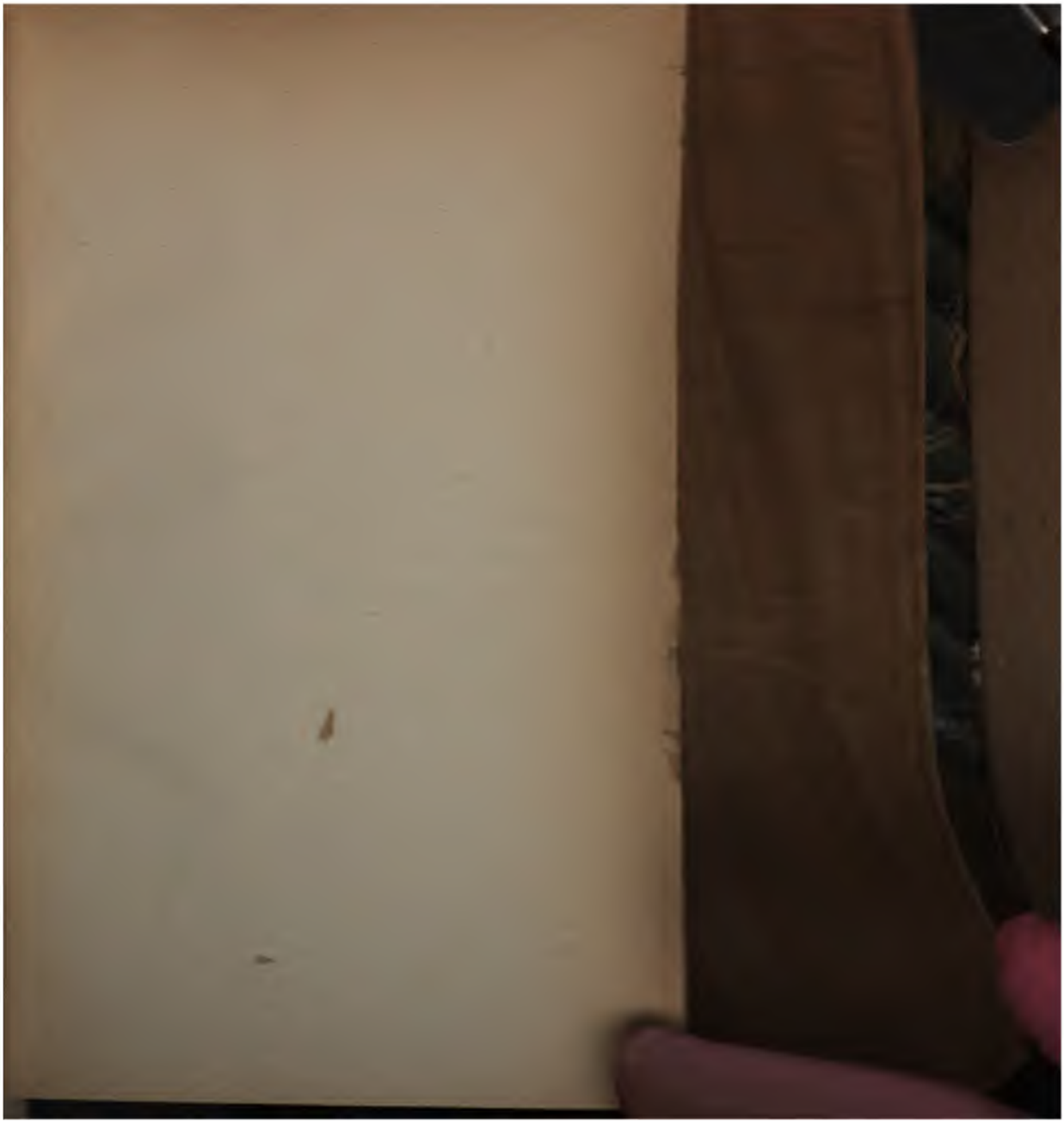
A. Voss, Note, betreffend die eindeutige Transformation ebener Curven 414.
— Zur Geometrie der Flächen 418.
— Zur Geometrie der Plückerschen Liniengebilde 544.
— Zur Geometrie der Brennflächen von Congruenzen 611.

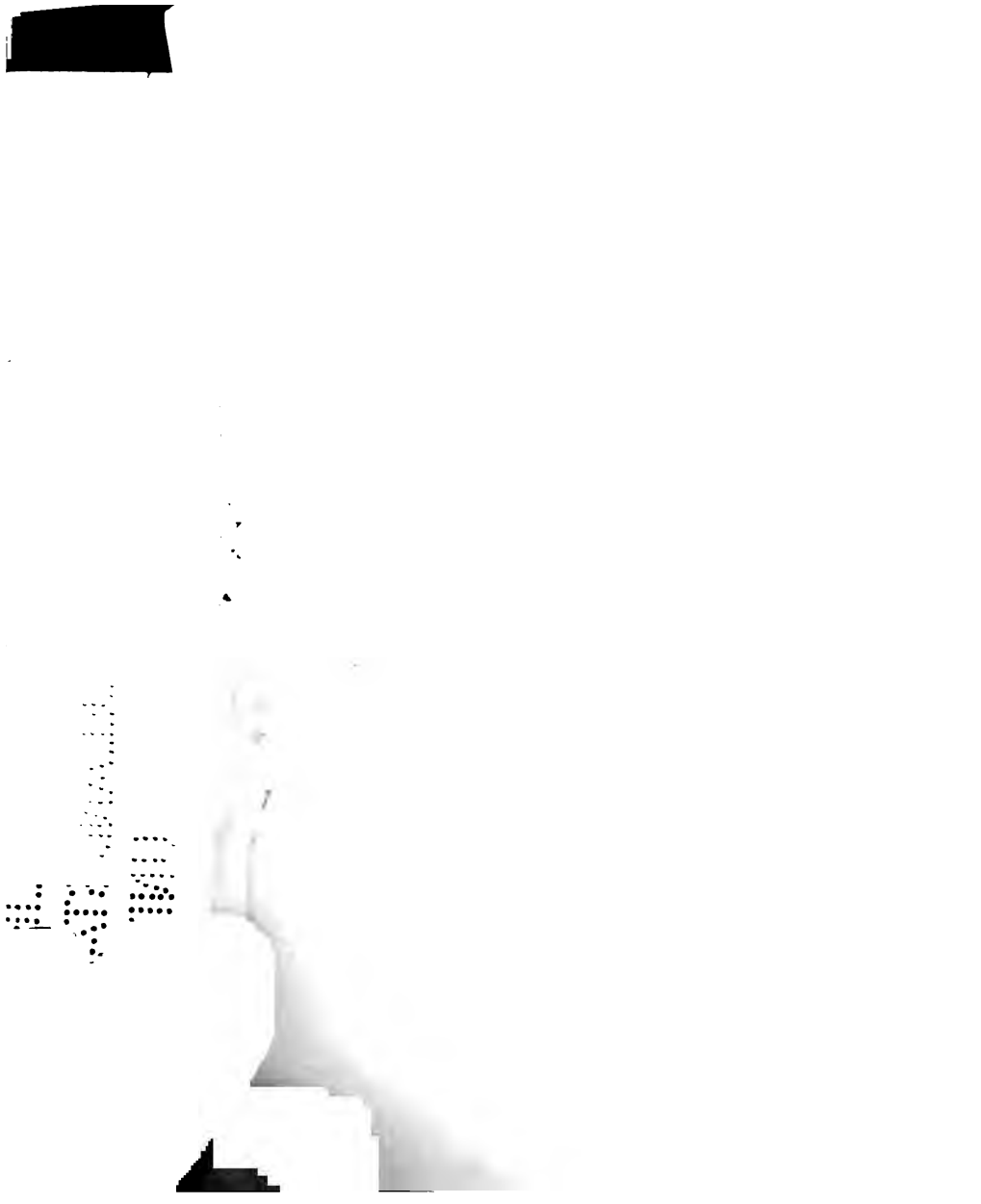
R. Wagner s. *Tollens*.
— und *B. Tollens*, Ueber die aus βBibrompropionsäure zu erhaltende Monobromacrylsäure 320.
— — Ueber Diallyl und Versuche zur Gewinnung von Allylbenzol 330.

G. Fiorelli, Ehrenmit-

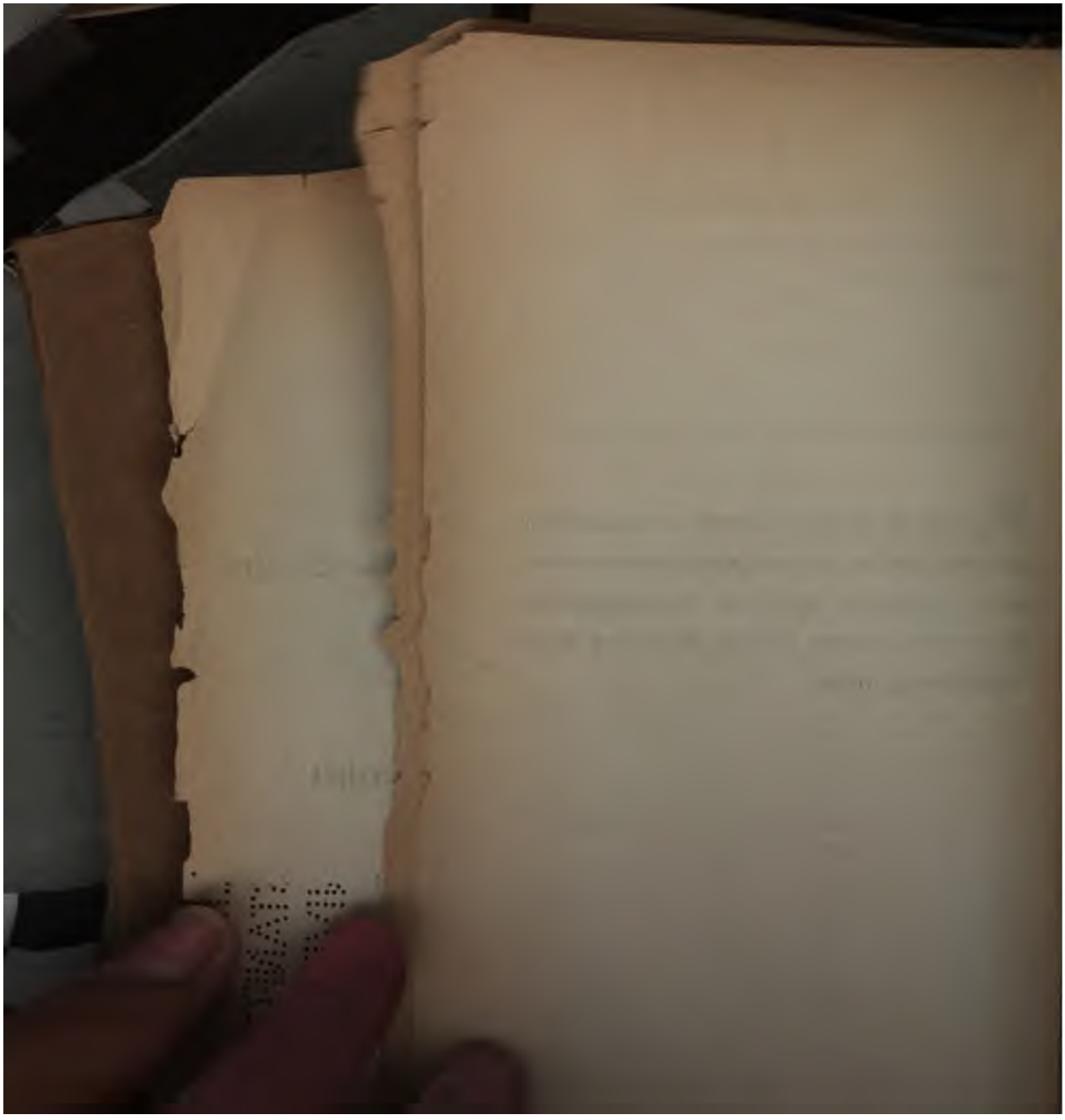
R. Wagner, *O. Philippi* und *B. Tollens*, Untersuchungen über die Allylgruppe 754.
G. Waitz, Verlorne Mainzer Annalen 388.
— Ueber die Annales Sithienses 587.
F. Wieseler, Beiträge zur Symbolik der Griechen und Römer 363.
— Ueber einige im Orient erworbene Bildwerke und Alterthümer 522.
F. Wöhler, Die Meteoriten der Universitäts-Sammlung zu Göttingen, Jan. 1874. 871.







Man bittet die mit der K. Societät in Tauschverkehr stehenden Institute, die Verzeichnisse der Accessionen in den *Nachrichten* zugleich als Empfangsanzeigen für die der K. Societät gefälligst übersandten Werke betrachten zu wollen.



Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

8. Januar. № 1. 1873.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 4. Januar.

Marx, zur Beurtheilung des Arztes Chr. Franz Paullini. (Erscheint in den Abhandlungen.)

Ewald, über Erwerbung und Herausgabe Orientalischer Werke durch die K. Soc. d. Wiss.

Henle, Vorlage von Ihering, zur Entwicklungsgeschichte des menschlichen Stirnbeins.

Claus, Zur Kenntniss des Baues und der Entwicklung von Branchipus stagnalis und Apus cancriformis. (Erscheint in den Abhandlungen).

Schering, über Curven, Flächen und mehrfache Gebilde im verallgemeinerten Gaussischen und Riemannschen Raume.

Rethi, Ueber ein Dualitäts-Princip in der Geometrie des Raumes. Vorgelegt von Schering.

Erwerbung und Herausgabe Orientalischer Werke.

Die K. Gesellschaft der Wissenschaften hat in jüngster Zeit durch ihre besondere Theilnahme und Unterstützung die Verwerthung und Veröffentlichung einiger wichtiger morgenländischer Werke zu befördern beschlossen, von welchen wir hier eine vorläufige kurze Nachricht geben.

1. Schon im Sommer 1870 erhielt Herr Pro-

fessor Benfey in Folge vielfacher Nachforschungen von Herrn Dr. Albert Socin (jetzt Privatdocent in Basel) welcher sich auf einer wissenschaftlichen Reise im Morgenlande befand, zuverlässige Kunde dass eine alte Syrische Uebersetzung des (nach der Pahlavi-Aussprache so genannten) Indischen Buches Kalilag va Damnag sich in der Bischöflichen Bibliothek zu Mârdîn in Mesopotamien befinde. Dass es eine solche alte Syrische Uebersetzung des berühmten Buches gegeben habe, wusste man: sie schien aber völlig verloren zu sein. Herrn Dr. Socin gelang es von dieser Syrischen Handschrift in Mârdîn, wahrscheinlich der einzigen jetzt noch erhaltenen, eine zuverlässige Abschrift zu empfangen; und diese hat jetzt die K. Ges. der Wiss. für sich und die K. Universitätsbibliothek erworben. Sehr zu wünschen wäre dass diese mit einer Uebersetzung von kundiger Hand bald veröffentlicht würde; und wir dürfen hoffen dass dieser Wunsch sich erfülle. — Von einer andern Syrischen Uebersetzung des berühmten Indischen Werkes welche aber erst der späteren Arabischen (einst von de Sacy herausgegebenen) entlehnt ist, empfangen wir so eben eine genauere Nachricht und ein hinreichendes Bild durch Herrn Professor William Wright, Corresp. der K. Ges. der Wiss.: und wir ergreifen die Gelegenheit auf diese Veröffentlichung hinzuweisen [1]).

1) A Specimen of a Syriac translation of the Kalilah wa-Dimnah, edited by W. Wright, LL. D., Professor of Arabic in the University of Cambridge. Extracted from the Journal of the Royal Asiatic Society of Gr. Brit. and Ireland; new series, vol. VII, part II, 1873. Man findet hier das erste Hauptstück des Buches Syrisch mit Uebersetzung und Anmerkungen, auch einer sehr unterrichtenden Beschreibung der Handschrift welche ausser diesem noch andere Syrische Werke enthält.

2. Die Herren Dr. Albert Socin und Dr. Prym (Privatdocent in Bonn) brachten von ihrer Morgenländischen Reise im Jahre 1871 eine reiche Sammlung Syrischer Volkserzählungen heim, welche sie an Ort und Stelle aus dem Munde der Eingeborenen in der heutigen Syrischen Sprache niedergeschrieben hatten. Diese heutige Syrische Volkssprache ist uns jetzt zwar schon anderweitig vielfach näher bekannt geworden, die Missionarien am Urumia-See haben sie zu einer Schriftsprache ausgebildet, und einzelne Gelehrte unter uns haben es nicht für nutzlos gehalten sie auch im wissenschaftlichen Wege genauer zu erforschen: während man noch vor einem Jahrhunderte kaum wusste dass die uralte aber durch den Islam immer ärger bedrängte und zuletzt in ihrer alten Art vollkommen ertödtete Syrische Sprache überhaupt noch irgendwo auf ihrem alten weiten Boden fortlebe. Sie hat sich aber auf eine denkwürdige Weise sehr stark umgebildet und wie ganz neu gestaltet dennoch ausserhalb der grossen Städte auf dem Lande in weiten Strecken erhalten, wiewohl nach den verschiedenen Strecken selbst sehr verschieden. Diese in der Gegend von Tûr ʿAbidîn gesammelten Volkserzählungen gewähren uns daher zwei Vortheile. Sie zeigen uns die besondere Syrische Mundart welche in jener Gegend herrscht; und sie lassen uns ihrem Inhalte nach in eine volksthümliche Welt hineinblicken welche uns in Europa sehr wenig bekannt ist und die besonders für solche unter uns sehr unterrichtend sein wird welche das ächte Morgenland wie es heute ist wenig genau kennen. Wie viele Erinnerungen aus dem alten Morgenlande und seinen Wundern sich trotz der alles versengenden Luft des Islâms in die-

sen weit zurückliegenden Winkeln der dortigen Erde noch erhalten haben, wird die Sammlung dieser Erzählungen wenn sie veröffentlicht ist ebenfalls lehren.

Man wird daher die durch Unterstützung der K. Ges. der Wiss. ermöglichte Veröffentlichung dieser Syrischen Erzählungen gerne sehen: es ist ein erstes Unternehmen der Art, und verdient auch deshalb alle Rücksicht. Die Veröffentlichung wird diese Erzählungen sowohl in ihrer Ursprache jedoch mit Lateinischen Buchstaben als in deutscher Uebersetzung bringen, zugleich mit einem nützlichen Anhange sprachlicher Bemerkungen. Der Druck hat schon begonnen, und es lässt sich hoffen dass er bald vollendet werde.

3. Das Buch der Jubiläen, von den Hellenisten auch Leptogenesis, bei den Aethiopen bloss nach dem Aethiopischen Anfangsworte Kûfâlae genannt, ein vorchristliches und noch in den ersten Jahrhunderten nach Chr. vielgelesenes, später aber in Europa und Asien für verloren gehaltenes Werk, wurde vor beinahe 30 Jahren in einer damals nach Tübingen gekommenen äthiopischen Handschrift wiedererkannt, dann von Dillmann daraus ins Deutsche übersetzt und später äthiopisch herausgegeben. Vor einigen Jahren ist aber in einem Mailänder Palimpsest fast das ganze Werk in der Altlateinischen Uebersetzung wiedergefunden und daraus in Ceriani's Monumenta sacra et profana abgedruckt. Diese lateinische Uebersetzung ist älter als die Aethiopische, und hat wie alle Altlateinische Bibelübersetzungen eine hohe Wichtigkeit. Es war daher zu wünschen dass diese Altlateinische Uebersetzung des Buches in einer sorgfältig veranstalteten Ausgabe mit den nöthi-

gen Vergleichungen und Erläuterungen bekannt gemacht würde; und da Herr Diaconus Hermann Rönsch in Lobenstein (Fstth. Reuss j. L.), schon durch frühere Arbeiten in diesem besonderen Fache rühmlichst bekannt, eine solche Ausgabe zum Drucke vorbereitet hatte, so beschloss die K. Ges. der Wiss. dieselbe zu unterstüzen. Es ist nun sicher zu hoffen dass dieses nützliche Werk nächstens erscheine. Man wird in ihm auch neue Aufschlüsse über die Aethiopische Uebersetzung finden, welche Herr Dr. Dillmann in Berlin aus neugefundenen Aethiopischen Handschriften mittheilen wird.

Ein Beitrag zur Entwicklungsgeschichte des menschlichen Stirnbeins.

Vorläufige Mittheilung
von Dr. **H. v. Ihering.**

Die Angaben über die Entwicklungsgeschichte des menschlichen Stirnbeins, wonach dasselbe aus zwei symmetrischen, durch die Sutura frontalis getrennten, und von den Stirnhöckern aus ossificirenden Hälften sich bilde, sind nicht ganz richtig. Es kommt nämlich jederseits für den unteren seitlichen Theil des Stirnbeines noch ein weiteres Bildungscentrum in Betracht. Es entsteht hier ein, selten mehrere kleinere Knochenstücke aus der fibrösen Substanz, welche die vordere Seitenfontanelle ausfüllt. Die Verschmelzung dieses Theiles mit der Hauptmasse des Stirnbeines ist zur Zeit der Geburt meist vollzogen, bis auf einen, ziemlich constant noch vorhandenen, mit der Kronennaht zusammenhängenden Nahtrest. In nicht sehr seltenen

Fällen jedoch, ist der ganze Knochen am Schädel des Neugeborenen noch sichtbar, ja durch Persistenz der Nähte kommt es sogar zuweilen zur Bildung eines Schaltknochens.

Ueber ein Dualitäts-Princip in der Geometrie des Raumes.

Von

Moritz Réthy.

Professor aus Kremnitz.

I. Fasst man den Punkt als Element der räumlichen Gebilde auf, so bezieht man ihn behufs analytischer Behandlungsweise dieser Gebilde auf ein beliebiges System von drei sich scheidenden Geraden: irgend eine Combination der Stücke jenes bekannten Paralellepipedons, welche zur Bestimmung dieses Paralellepipedons erforderlich aber auch genügend ist, kann als ein Coordinaten-System aufgefasst werden.

Ich will nun das Paralellepipedon durch die Flächen von drei, eine körperliche Ecke desselben umschiessenden, Paralellogrammen bestimmt annehmen; so dass, wenn die drei Achsen mit x, y, z, die durch denselben eingeschossenen Winkel α, β, γ, bezeichnet werden, der Punkt als Grundelement durch die Flächen-Coordinaten

$$\left.\begin{aligned} X &= yz \sin\alpha = a \\ Y &= zx \sin\beta = b \\ Z &= xy \sin\gamma = c \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

bestimmt ist.

Durch das Gleichungs-System (1) ist freilich der Punkt nicht eindeutig bestimmt. Die durch die einzelnen Gleichungen dargestellten hyper-

bolischen Cilinder schneiden sich in den unendlich fern gelegenen Punkten der Coordinaten-Achsen in je einem Doppel-Punkte und ausser dem in zwei zum Anfangspunkte des Coordinaten-Systems symmetrisch liegenden Punkten. — Da aber jene in der Unendlichkeit gelegenen Schnittpunkte bei beliebigen Werthen von X, Y, Z, auftreten, so können wir von denselben abstrahiren, und den Satz aussprechen:

Durch das Gleichungs-System (1) ist ein Zwillings-Punkt X, Y, Z, eindeutig bestimmt.

Man erhält reelle Zwillings-Punkte wenn von Y, Y, Z, eine gerade Anzahl negativ ist; sonst imaginäre Zwillings-Punkte.

II. Discutirt man nun die lineare Gleichung zwischen den Flächen Coordinaten X, Y, Z,

$$UX + VY + WZ + 1 = 0 \quad (2)$$

so findet man, dass diese bei beliebigem U, V, W, ein Hyperboloid mit einem Netze (und die Abarten desselben) darstellt, welches mit den Coordinaten-Achsen je einen unendlich fernen Doppelpunkt gemein hat.

III. Zwei lineare Gleichungen zwischen den Flächen-Coordinaten:

$$\left.\begin{aligned} U' X + V' Y + W' Z + 1 &= 0 \\ U'' X + V'' Y + W'' Z + 1 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

haben als geometrischen Ort das Gemeinschaftliche von zwei Hyperboloiden unseres Systemes: also im Allgemeinen eine Curve dritten Grades. Sämmtliche durch irgend ein System (3) dargestellten Curven haben die unendlich fernen Punkte der Coordinaten-Achsen gemein. Eine Ausnahme ergiebt sich aus den Gleichungen der Coordinaten-Ebenen-Paare

$$Y=0 \text{ und } Z=0$$
$$\text{oder } Z=0 \text{ und } X=0$$
$$\text{oder } X=0 \text{ und } Y=0$$

Das Gemeinschaftliche von je zwei Ebenen-Paaren sind nämlich der Reihe nach die X, Y oder Z Coordinaten-Ebene, welche daher in dieser Geometrie an der Stelle von einer Curve auftreten.

IV. Die geometrische Bedeutung von drei linearen Gleichungen zwischen den Flächen-Coordinaten erwähne ich nur um die Bemerkung bei zu schliessen, dass eine jede in einer der Coordinaten-Ebenen gelegene zu den betreffenden Achsen asymptotische Hyperbel (folglich auch die Achsen-Paare) in dieser Geometrie als Zwillings-Punkte fungiren. Auch haben alle drei Achsen-Paare dieselben drei Gleichungen $X=o$, $Y=o$, $Z=o$ zu ihrem algebraischen Bilde, so dass sie alle in's Gesammt dem Anfangspunkte des Cartesischen Coordinaten-Systems entsprechen, so wie auf anderer Seite die Coordinaten-Ebenen hier das Analogon der Cartesischen Achsen bilden.

V. Da unser Hyperboloid (2) die Coordinaten-Ebenen in den durch die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{lll} X=-\frac{1}{U}, & X=0, & X=0 \\ Y=0, & Y=\frac{1}{V}, & Y=0 \\ Z=0, & Z=0, & Z=\frac{1}{W} \end{array}\right\} \quad (4)$$

dargestellten Hyperbeln schneidet, so können wir analog der Bestimmung der Ebene durch die Cartesischen Achsen-Abschnitte hier das Hyper-

boloid durch die Flächenstücke $-\frac{1}{U}$, $-\frac{1}{V}$ und $-\frac{1}{W}$ bestimmen: oder mit andern Worten die reciproken negativen Werthe derselben U, V, W als Coordinaten unseres Hyperboloides betrachten.

Thun wir aber das, so ist die lineare Gleichung zwischen den Hyperboloid-Coordinaten

$$X' U + Y' V + Z' W + 1 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

das algebraische Bild des Zwillings-Punktes X', Y', Z', welcher hier als Schnittpunkt des der Gleichung (5) entsprechenden Hyperboloiden-Systems auftritt.

Die geometrische Bedeutung der Gleichungen $U =$ Constante oder $V =$ Const. oder $W =$ Const. ergiebt sich als je eine zu den Coordinaten-Achsen-Paaren asymptotische Hyperbel, welche also wieder statt eines Punktes auftritt.

VI. Zwei lineare Gleichungen zwischen den Hyperboloiden-Coordinaten

$$\left.\begin{aligned} X' U + Y' V + Z' W + 1 &= 0 \\ X'' U + Y'' V + Z'' W + 1 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

haben zum geometrischen Ort das Gemeinschaftliche der den einzelnen Gleichungen entsprechenden Hyperboloiden-Systeme, also im Allgemeinen eine Curve dritten Grades. Eine Ausnahme ergiebt sich aus den Gleichungen von zwei auf derselben Coordinaten-Ebene liegenden Hyperbeln

$$\left.\begin{aligned} U &= a \\ U &= b_1 \end{aligned}\right\} \text{ oder } \left.\begin{aligned} V &= b \\ V &= b_1 \end{aligned}\right\} \text{ oder } \left.\begin{aligned} W &= c \\ W &= c_1 \end{aligned}\right\}$$

welchen simultan der Reihe nach die X, Y und Z Coordinaten-Ebenen entsprechen, die also wieder statt Curven auftreten.

VII. Dass drei lineare Gleichungen zwischen den Hyperboloiden-Coordinaten ein Hyperboloid unseres Systemes bestimmen, erwähne ich bloss der grössern Vollständigkeit halber.

In Folge und mit Berücksichtigung der von I — VII erläuterten Sätze lassen sich nun für Raumfiguren folgende zwei Dualitäts-Principien aufstellen:

1) Aus einem jeden rein auf Lage Bezug habenden Satze, welcher von einer durch Ebenen begrenzten Figur bewiesen ist, lässt sich ein neuer Satz ableiten, wenn man statt „Ebene" „Hyperboloid unseres Systems" und in Folge dessen statt der „Geraden" als Schnitt zweier Ebenen „unsere Curve dritter Ordnung" als das Gemeinsame zweier Hyperboloide, endlich anstatt des „Punktes" als Schnitt dreier Ebenen einen „Zwillings-Punkt" als das Gemeinsame dreier Hyperboloide unseres Systems setzt.

2) Aus einem jeden rein auf Lage Bezug habenden Satze, welcher von einem räumlichen Punkte-System bewiesen ist, lässt sich ein neuer Satz ableiten, wenn man statt „Punkt" „Zwilling-Punkt" statt der „Geraden" als Verbindungslinie zweier Punkte „unsere Curve dritter Ordnung" als die Verbindungs-Curve zweier Zwillings-Punkte endlich anstatt der „Ebene" als durch drei Punkte Bestimmstes „unser Hyperboloid" als durch drei Zwillingspunkte Bestimmtes setzt.

Dass man auf diesem Wege zu fernern Dualitäts-Principien gelangen kann, leuchtet wol von selbst ein. Ich will nur noch darauf aufmerksam machen, dass man durch Schnitt entsprechender Elemente der durch die Gleichungen

$$H' + \lambda H'' = 0, \quad H''' + \lambda H'''' = 0$$

dargestellten homographischen Hyperboloiden-Büschel eine Fläche vierter Ordnung erhält, welche zu unserem Hyperboloide sich gerade so verhält, als die Fläche zweiter Ordnung zur Ebene.

Die Resultate meiner Untersuchungen in der Geometrie des Maasses bei Anwendung dieser Flächen- und Hyperboloiden-Coordinaten werde ich bei einer andern Gelegenheit mir erlauben der Oeffentlichkeit vorzulegen.

Verzeichniss der bei der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangenen Druckschriften.

August, September, October 1872.

(Fortsetzung.)

Report of the Commissioner of Agriculture on the diseases of cattle. Ebd. 1871. 4.

Proceedings of the California Academy of Sciences. Vol. IV. Part II. III. 1870. Part IV. 1871. San Francisco 1870. 71. 72. 8.

Annual Report of the Board of Regents of the Smithonian Institution. Washington 1871. 8.

Preliminary Report of the United States Geological Survey of Montana and portions of adjacent territories, by F. V. Hayden. Ebd. 1872. 8.

Report of the Superintendent of the United States Coast Survey. Ebd. 1871. 4.

Fifty-Second Annual Report of the Board of Public Education; of the first Scool District of Pennsylvania. Philadelphia 1871. 8.

Transactions of the Zoological Society of London. Vol. VIII. Part 2. London 1872. 4.

Proceedings of the Scientific Meetings of the Zoological Society of London for the year 1872. Part I. January-March. Ebd. 1872. 8.

Revised List of the vertebrated animals now or lately living in the Gardens of the Zoological Society of London 1872. Ebd. 8.

Catalogue of the Library of the Zoological Society. Ebd. 1872. 8.

Proceedings of the American Pharmaceutical Association of the nineteenth Annual Meeting held at St. Louis, Mo., September 1871. Philadelphia 1872. 8.

Transactions of the Linnean Society of London. Vol. 27. Part 4. Vol. 28. Part 1 u. 2. Vol. 29. Part 1. London 1871. 72. 4.

The Journal of the Linnean Society:
Zoology. Vol. XI. Nr. 53. 54.
Botany. Vol. XIII. Nr. 66. 67. Ebd. 1871. 72. 8.

Proceedings of the Linnean Society. Session 1871—1872. List of the Linnean Society. 1871. 8.

Tijdschrift voor Indische Taal-Land-en Volkenkunde uitgegeven door het Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen. Deel XVIII. Zesde Serie. Deel 1. Aflev. 3. 4. Deel XX. Zevende Serie. Deel I. Aflev. 3.

Notulen van de algemeene en Bestuurs-Vergaderingen van het Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen. Deel IX. 1871. Batavia 1872. 8.

Catalogus. Ebd. 1872. 8.

Mémoires de la Société des Sciences naturelles de Cherbourg. Tome XVI. (Deuxième Série. — Tome VI.) Paris; Cherbourg 1871. 72. gr. 8.

VIII und IX Jahresbericht des Vereins für Erdkunde zu Dresden. 1872. 8.

Flora Batava. 218, 219, 220, 221e Aflevering. Leyden. 4.

Archives Néerlandaises. Tome VII. Livr. 1. 2. 3. La Haye 1872. 8.

Nuove esperienze sul modo di elettrizarsi dei corpi detti coibente. Nota del prof. Claudio Giordano presentata dal prof. Cantoni.

Sulla origine della elettricità dell' atmosfera indagini del prof. Claudio Giordano presentate del prof. Giovanni Cantoni. 8.

Nachrichten und gelehrte Denkschriften der Universität Kasan. 1869. Heft 5. 1870. Heft 1. 2. 1871. Heft 1. 2. 3. Kasan 1871. (In russischer Sprache.)

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

22. Januar. № 2. 1873.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Linien, Flächen und höhere Gebilde in mehrfach ausgedehnten Gaussischen und Riemannschen Räumen.

Von **Ernst Schering.**

In meinem Aufsatze über die Schwerkraft im Gaussischen Raume, diese Nachrichten vom 13. Juli 1870, habe ich aus der Theorie des Gaussischen Raumes einige Sätze mitgetheilt, welche zur Erläuterung des von mir für die Schwerkraft in solchem Raume aufgestellten Gesetzes dienen konnten.

Die Arbeiten von Gauss über diese Geometrie lasse ich im IV. Bande der von mir redigirten Gaussischen Werke abdrucken.

Lobatschewsky's erste Veröffentlichungen, welche auf diesen Gegenstand Bezug haben, sind: О началахъ Геометріи. Казанскій вѣстникъ 1829 и 1830 іюль и августъ. стр. 571 .. 636. Новыя начала Геометріи. Ученыя записки. казань. 1835, книжка. III. 1836, кн. II и III. 1837, кн. I.

Für den allgemeinen homogenen *n*fach ausgedehnten Raum erlaube ich mir im Anschluss an die Untersuchungen von Riemann »über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen« 1854 geschrieben in unsern Abhandlungen Band 13. veröffentlicht, von Herrn Helmholz »über die Thatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen« in diesen Nachrichten 1868. Juni. 3., von Herrn Beltrami »Theoria fondamentale degli spazii di curvatura costante« Bologna agosto 1868 Annali di Matematica Serie II. Tom. II. Milano, und von Herrn Christoffel »über die Transformation ganzer homogener Differentialausdrücke« 1869, einige neue Lehrsätze hier mitzutheilen.

Zur Abkürzung des Ausdrucks empfiehlt es sich für die Gebilde in einem homogenen Raume eine gemeinsame Bezeichnung einzuführen. Da Gauss sich zuerst mit der Untersuchung eines homogenen unbegrenzten Raumes beschäftigt und sich auch mit dem Begriffe eines mehr als dreifach ausgedehnten Raumes vertraut gemacht hat, so nenne ich einen solchen Raum einen Gaussischen Raum und die darin den Gebilden des Euclidischen Raumes analogen die Gaussischen und spreche von Gaussischen Ebenen, Ellipsen von Steinerschen Kummerschen Flächen im Gaussischen Raume. Riemann hat zuerst die Eigenschaften der Räume untersucht, welche beliebig vielfach im Allgemeinen stetig ausgedehnt sind und in den kleinsten Theilen die dem Euclidischen Raume entsprechenden Eigenschaften besitzen. Nächst dem Euclidischen und Gaussischen Raume wird der homogene begrenzte Raum wohl am meisten untersucht werden. Riemann hat uns zuerst die Idee eines solchen verschafft, es mag daher angemessen erscheinen solchen

Raum und die darin vorhandenen Gebilde Riemannsche zu nennen. Gauss gebraucht für die Fläche in dem Euclidischen Raume auf welcher man die Gaussische Ebene abwickeln kann, also die Fläche unveränderlicher negativer Krümmung, welche auch Herr Beltrami mehrfach untersucht hat, die Bezeichnung Gegenstück der Kugel.

Lehrsatz I. Im homogenen $n$fach ausgedehnten Raume bezeichne allgemein (a, b) die Entfernung zwischen den beiden Punkten a und b gemessen mit der absoluten Längeneinheit des betreffenden Raumes, dann ist in einem begrenzten homogenen Raume für $n+2$ Punkte immer die nach Jacobi's Bezeichnungsweise aus $(n+2)^2$ Factoren gebildete Determinante

$$\Sigma \pm \cos(1,1).\cos(2,2).\cos(3,3)\ldots\cos(n+2,n+2) = 0$$

dagegen für einen unbegrenzten homogenen Raum ist, wenn i statt $\sqrt{-1}$ gesetzt wird

$$\Sigma \pm \cos i(1,1).\cos i(2,2).\cos i(3,3)\ldots\cos i(n+2,n+2) = 0$$

Projection einer Linie auf eine zweite Linie heisse derjenige Abschnitt auf der zweiten Linie, welcher von den Fusspunkten der aus den Endpunkten der ersten Linie nach der zweiten Linien gezogenen kürzesten Linien begrenzt wird.

Lehrsatz II. Gehen von einem Punkte $n+1$ kürzeste Linien aus und bezeichnet allgemein $[a, b]$ die Projection der Linie a auf die Linie b gemessen mit der absoluten Längeneinheit so ist für einen begrenzten homogenen Raum

$$\Sigma \pm \operatorname{tg}[1,1] \cdot \operatorname{tg}[2,2] \ldots \operatorname{tg}[n+1, n+1] = 0$$

dagegen für einen unbegrenzten homogenen Raum

$$\Sigma \pm \operatorname{tg} i[1,1] \cdot \operatorname{tg} i[2,2] \ldots \operatorname{tg} i[n+1, n+1] = 0.$$

Das Verhältniss der analytischen Tangenten der in $\sqrt{-1}$ multiplicirten und mit der absoluten Einheit gemessenen Länge der Projection einer dieser kürzesten Linien auf eine andere kürzeste Linie zu der analytischen Tangente der in $\sqrt{-1}$ multiplicirten mit der absoluten Einheit gemessenen Länge der projicirten ersten kürzesten Linie ist im homogenen unbegrenzten Raume unabhängig von dieser Länge und bleibt ungeändert, wenn man die Linie, welche selbst und diejenige auf welche projicirt wird mit einander vertauscht, deshalb mag diejenige kleinste Grösse, deren analytischer Cosinus diesem Verhältnisse gleich wird, als das Maass des Winkels zwischen den beiden kürzesten Linien angenommen werden. Im homogenen begrenzten Raume gilt das Analoge, nur dass die Tangenten von den Längen ohne den Factor $\sqrt{-1}$ zu nehmen sind.

Lehrsatz III. Gehen von einem Punkte $n+1$ kürzeste Linien aus und bezeichnet allgemein $\{a, b\}$ den Winkel zwischen den beiden kürzesten Linien a und b so ist sowohl für den begrenzten als für den unbegrenzten Raum

$$\Sigma \pm \cos\{1,1\} \cdot \cos\{2,2\} \cdot \cos\{3,3\} \ldots \cos\{n+1, n+1\} = 0.$$

Lehrsatz IV. Nimmt man als Coordinatenaxen n kürzeste Linien welche von einem Punkte 0 ausgehen und von denen jede mit allen übrigen $n-1$ Linien rechte Winkel bildet, wird von dem

Anfangs-Punkte 0 der Coordinatenaxen, nach einem Punkte P eine kürzeste Linie gezogen und die erste Hälfte derselben von dem Punkte 0 bis zum Halbirungspunkte der Linie auf die Coordinatenaxen projicirt, bezeichnen $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ die mit der Längeneinheit gemessenen Projectionen, haben $\xi'_1, \xi'_2, \ldots \xi'_n$ die analoge Bedeutung für einen andern Punkt P' und bezeichnet (P, P') die mit der absoluten Längeneinheit gemessene Entfernung zwischen den Punkten P und P' so ist für einen begrenzten homogenen Raum

$$\sin \tfrac{1}{2}(P,P')^2 = \frac{\Sigma(\operatorname{tang}\xi_\nu - \operatorname{tang}\xi'_\nu)^2}{(1+\Sigma\operatorname{tang}\xi_\nu^2)(1+\Sigma\operatorname{tang}\xi'^2_\nu)}$$

dagegen für einen unbegrenzten homogenen Raum

$$\sin \tfrac{1}{2} i(P,P')^2 = \frac{\Sigma(\operatorname{tang} i\xi_\nu - \operatorname{tang} i\xi'_\nu)^2}{(1+\Sigma\operatorname{tang} i\xi_\nu^2)(1+\Sigma\operatorname{tang} i\xi'^2_\nu)}$$

wenn alle Summationen Σ über den Index ν von 1, 2, 3 .. n ausgedehnt werden.

Lehrsatz V. Nimmt man als Coordinatenaxen n kürzeste Linien, welche von einem Punkte 0 ausgehen und von denen jede mit allen übrigen $n-1$ Linien rechte Winkel bildet, bezeichnen $x_1, x_2 \ldots x_n$ die mit der absoluten Längeneinheit gemessenen Projectionen der von dem Punkte 0 nach dem allgemeinen Punkte P gezogenen kürzesten Linie auf die nAxen und bezeichnen $x'_1 \ldots x'_n$ die entsprechenden für eben solche aber von einem andern Punkte ausgehende und in anderer Lage sich befindende Coor-

dinatenaxen und für denselben Punkt P geltenden Grössen, so sind die allgemeinen Transformationsgleichungen von der Form

$$\operatorname{tg} x'_\nu = \frac{a_0^{(\nu)} + a_1^{(\nu)} \operatorname{tg} x_1 + a_2^{(\nu)} \operatorname{tg} x_2 + \ldots + a_n^{(\nu)} \operatorname{tg} x_n}{a_0^0 + a_1^0 \operatorname{tg} x_1 + a_2^0 \operatorname{tg} x_2 + \ldots + a_n^0 \operatorname{tg} x_n}$$

für einen begrenzten Raum, aber von der Form

$$\operatorname{tg} i x'_\nu = \frac{a_0^{(\nu)} + a_1^{(\nu)} \operatorname{tg} i x_1 + a_2^{(\nu)} \operatorname{tg} i x_2 + \ldots + a_n^{(\nu)} \operatorname{tg} i x_n}{a_0^0 + a_1^0 \operatorname{tg} i x_1 + a_2^0 \operatorname{tg} i x_2 + \ldots + a_n^0 \operatorname{tg} i x_n}$$

für einen unbegrenzten Raum, worin die Nenner der Ausdrücke für die verschiedenen Coordinaten x'_ν einander gleich sind und die gesammten $(n+1)^2$ Coefficienten durch $\frac{1}{2}n(n+1)$ von einander unabhängige Grössen bestimmt sind.

Wenn die gemeinsame Einheit der Coëfficienten $\alpha_\mu^{(\nu)}$ auf angemessene Weise gewählt ist, so kann man die Bedingungsgleichungen für diese in die Form bringen:

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=n} \alpha_\mu^{(\nu)} \alpha_\mu^{(\nu)} = 1, \quad \sum_{\nu=0}^{\nu=n} \alpha_\lambda^{(\nu)} \alpha_\mu^{(\nu)} = 0$$

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=n} \alpha_\nu^{(\mu)} \alpha_\nu^{(\mu)} = 1, \quad \sum_{\nu=0}^{\nu=n} \alpha_\nu^{(\lambda)} \alpha_\nu^{(\mu)} = 0$$

für je zwei verschiedene Indices λ und μ aus der Reihe 0, 1, 2, 3 . . n.

Unter diesen selben Voraussetzungen haben die Transformations-Gleichungen für die im Lehrsatz IV angewandten Coordinaten die Form

$$\frac{1}{\Delta} \operatorname{tg} i\xi'_\nu = \frac{\alpha_0^{(\nu)}\Delta + \alpha_1^{(\nu)} \operatorname{tg} i\xi_1 + \alpha_2^{(\nu)} \operatorname{tg} i\xi_2 + \cdot + \alpha_n^{(\nu)} \operatorname{tg} i\xi_n}{\alpha_0^0 \Delta + \alpha_1^0 \operatorname{tg} i\xi_1 + \alpha_2^0 \operatorname{tg} i\xi_2 + \cdot + \alpha_n^0 \operatorname{tg} i\xi_n}$$

worin 2Δ für $1 - \Sigma \operatorname{tg} i\xi_\nu^2$ und 2Δ für $1 - \Sigma \operatorname{tg} i\xi_\nu'^2$ gesetzt ist. Im Gaussischen Raume hat man $\sqrt{-1}$ für i, im Riemannschen $+1$ für i zu nehmen.

Die Ordnungszahl einer algebraischen Linie Fläche oder einer mehrfach ausgedehnten räumlichen Gestalt wird durch den Grad der Gleichung in $\operatorname{tg} i x_\nu$ für den Gaussischen Raum oder in $\operatorname{tg} x_\nu$ für den Riemannschen Raum dargestellt bei irgend welcher Lage der Coordinatenaxen im Raume.

Diejenigen räumlichen Gestalten, welche durch Gleichungen $m$ten Grades in $\operatorname{tg} i\xi_\nu$ oder $\operatorname{tg} \xi_\nu$ bestimmt werden, sind im Allgemeinen von $2m$ter Ordnung, und nur diejenigen Gestalten deren Gleichungen homogen in $\operatorname{tg} i\xi_\nu$ oder $\operatorname{tg} \xi_\nu$ dargestellt werden sind $m$ter Ordnung.

Die Lehrsätze für das gegenseitige Durchschneiden von räumlichen Gestalten, welche durch algebraische Gleichungen bestimmt werden, lauten für Euclidische Gaussische und Riemannsche Räume ganz übereinstimmend.

Lehrsatz VI. Ein homogenes Raumgebilde von $n-\nu$facher Ausdehnung wird in einem $n$fach ausgedehnten Raume durch ν lineare Gleichungen zwischen $\operatorname{tag} x_1, \ldots \operatorname{tag} x_n$ für begrenzte Raumgebilde im begrenzten Raume und durch ν lineare

Gleichungen zwischen $\text{tag}\, i x_1, \ldots \text{tag}\, i x_n$ für unbegrenzte Raumgebilde im unbegrenzten Raume bestimmt.

Eine Normale zu einem weniger als $n$fach ausgedehnten Raumgebilde soll die von einem nicht in diesem Raumgebilde liegenden Punkte nach dem Raumgebilde gezogene kürzeste Linie genannt werden. Der gemeinsame Punkt beider heisse der Fusspunkt von wo aus die Normale als errichtet betrachtet wird. Zwei Raumgebilde sollen in einem Punkte als zu einander rechtwinkelig genannt werden, wenn jedes Raumgebilde eine in dem gemeinsamen Punkte zu dem andern Raumgebilde errichtete beliebig kurze Normale enthält.

Lehrsatz VII. Die durch die Gleichung

$$\text{cotg}\, i a_1^2\, \text{tg}\, i x_1^2 + \text{cotg}\, i a_2^2\, \text{tg}\, i x_2^2 = 1$$

bestimmte Curve besitzt in den von dem Mittelpunkte gerechneten Entfernungen $\pm e$, wenn $\cos i a_1 = \cos i e \cos i a_2$ ist, auf der Hauptaxe x_1 Brennpunkte, für welche die von ihnen nach einem Punkte der Curve gezogenen Brennpunktsstrahlen eine unveränderliche Summe haben und gleiche Winkel mit der Normale zur Curve bilden. Diese Curven will ich Gaussische Ellipsen, wenn $\sqrt{-1}$ für i gesetzt wird, dagegen Riemannsche Ellipsen wenn $+1$ für i gesetzt wird, in den Ebenen der betreffenden Räume nennen.

Lehrsatz VIII. Die räumliche Gestalt

$$1 = \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \text{cotg}\, i a_\nu^2\, \text{tg}\, i \xi_\nu^2$$

ergibt durch gleiche additive Aenderung der

Parameter $\mathrm{tg}\, i\alpha_\nu^2$ ein orthogonales System, welches den Gaussischen $n$fach ausgedehnten Raum erfüllt. Für den Riemannschen Raum erhält man solches System, wenn man statt i die reelle Einheit setzt.

Lehrsatz IX. Die durch die Gleichung

$$\mathrm{cotg}\, i\alpha_1^2\ \mathrm{tg}\, i\xi_1^2 + \mathrm{cotg}\, i\alpha_2^2\ \mathrm{tg}\, i\xi_2^2 + \mathrm{cotg}\, i\alpha_3^2\ \mathrm{tg}\, i\xi_3^2 = 1$$

bestimmte Fläche lässt sich in den kleinsten Theilen ähnlich auf einer Euclidischen Ebene $u+iv$ mit Hülfe der Gleichungen:

$$\mathrm{tg}\, i\alpha_1^2 \mathrm{cotg}\, i\xi_1 \cos\varphi = \mathrm{tg}\, i\alpha_2^2 \mathrm{cotg}\, i\xi_2 \sin\varphi\cos\psi = \mathrm{tg}\, i\alpha_3^2 \mathrm{cotg}\, i\xi_3 \sin\varphi\sin\psi$$

$$k^{\frac{1}{2}} . \sin\mathrm{am}\,(u+iv, k) = e^{i\psi}\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\varphi$$

abbilden. (Meine Preisschrift» über conforme Abbildung des Ellipsoids auf der Ebene«. Göttingen 1858). Für den Riemannschen Raum hat man α_ν und ξ_ν statt $i\alpha_\nu$ und $i\xi_\nu$ in diesen Formeln zu setzen.

Mit Hülfe dieser Lehrsätze ist es leicht die wesentlichsten der für Kegelschnitte und Flächen zweiten Grades im Euclidischen Raum geltenden Eigenschaften auf den allgemeinen homogenen Raum zu übertragen.

Die Mittheilung meiner Untersuchungen über die höhere Geometrie in einem homogenen Raume zunächst über die Kummerschen Flächen und Strahlensysteme in demselben behalte ich mir für eine andere Gelegenheit vor.

Göttingen 1873, Januar 4.

Ueber die Beugung des Lichtes

von G. Quincke,
correspondirendem Mitgliede der Kön. Gesellschaft.

Bei einer eingehenden Untersuchung der Erscheinungen, die bei der Beugung des Lichtes auftreten, bin ich zu Resultaten gekommen, welche von den bisherigen Vorstellungen in einigen, und wie ich glaube, wesentlichen Punkten abweichen.

Vor einiger Zeit habe ich (Pogg. Ann. 146. p. 1—65. 1872) die Erscheinungen theoretisch behandelt, welche man wahrnimmt sobald man auf einen Lichtpunkt oder eine Lichtlinie mit dem Fernrohr oder dem blossen Auge durch ein Gitter blickt, d. h. durch eine Combination gleichartiger und gleichgestalteter Oeffnungen in gleichen Abständen von einander. Die Theorie umfasst also sowohl Gitter mit undurchsichtigen oder durchsichtigen Stäben, als solche die mit einer Diamantspitze in einen ebenen Glas- oder Metallspiegel getheilt sind. Ausser der Gültigkeit des Huyghens'schen Princips wurde dabei vorausgesetzt, dass ein Furchengitter aus Thälern mit kleinen treppenförmigen Absätzen besteht, deren eine Fläche parallel der unverletzten Spiegelfläche liegt.

Die Formeln für Furchengitter sind viel complicirter als für Gitter mit undurchsichtigen Stäben. Sie zeigen in Uebereinstimmung mit den Versuchen, dass die Lichtintensität bei den Furchengittern, die vorzugsweise in der Praxis benutzt werden, sehr wesentlich von den Dimensionen der Furchen und der dieselben ausfüllenden Substanz abhängt, mag das Licht durch ein solches Gitter durchgegangen oder von demselben reflectirt worden sein.

Die Untersuchung des reflectirten Lichtes gewährt den Vortheil, dass man den Versuch mehr, als bei durchgehendem Licht, den Voraussetzungen der Rechnung anpassen kann. Symmetrisch gestaltete Furchen und Hügelgitter aus demselben Material, die sich mit Hülfe einiger experimentellen Kunstgriffe galvanoplastisch in sehr vollkommener Weise herstellen lassen, zeigen dieselben Eigenschaften, sobald man rechts und links vertauscht.

Gewöhnlich benutzt man zur Bestimmung der Wellenlängen des Lichtes die schon Fraunhofer [1]) bekannten sogenannten Maxima 2ter Klasse. Dieselben haben um so grösseren Abstand von einander, je grösser die Wellenlänge und je kleiner die Entfernung zweier benachbarten Oeffnungsgruppen des Gitters ist.

Neben diesen sogenannten Maximis 2ter Klasse treten aber, wie der Versuch lehrt, noch andere lichtschwächere Maxima auf, welche ich secundäre genannt habe, und die die Theorie nicht vorhersehen lässt. Bedeutet m eine ganze Zahl, so liegen die secundären Maxima auf $\frac{1}{m}$ $\frac{2}{m}$ etc. des Abstandes 2er benachbarten Maxima 2ter Klasse, oder an den Stellen, wo ein Gitter mit 2 3 ... mMal grösserem Abstand der Oeffnungen oder Furchen Maxima 2ter Klasse zeigen würde. Die relative Lage derselben gegen die Maxima 2ter Klasse ist bei demselben Gitter dieselbe im durchgehenden oder reflectirten Licht für Beugung in den verschiedensten Substanzen. Die einfallenden Strahlen können dabei einen beliebigen Winkel mit der Normale der Gitterfläche bilden. Unter sonst gleichen Umständen kann aber der Werth von m mit der Farbe sich ändern.

1) Gilbert Ann. 74. p. 340. 1823.

Die Gitter selbst waren so verschieden wie möglich gewählt. Der Abstand 2er benachbarten Oeffnungsgruppen schwankte zwischen 0,2 mm und 0,0025mm. Es wurden untersucht Gitter mit undurchsichtigen Stäben in freier Luft oder in Wasser, mit Oeffnungen in einer undurchsichtigen Schicht von Russ, Silbercollodium, Silber, Goldblatt, oder in Jodsilber auf einer Glasplatte, Furchen oder Hügelgitter in Glas oder Metall getheilt.

Ich habe nun weiter die Beugung des polarisirten Lichtes durch diese Gitter untersucht.

Blickt man durch ein doppeltbrechendes Prisma und ein Gitter mit vertikalen Oeffnungen oder Furchen auf eine Natron-Flamme, so sieht man übereinander 2 Reihen Flammenbilder ∓ und ⊥ zur horizontalen Hauptbeugungsebne polarisirt. Zwei übereinander liegende Flammenbilder, demselben Maximum 2ter Klasse entsprechend, erscheinen gewöhnlich gleich hell. Nur an einzelnen Stellen, vorzugsweise solchen mit schwacher Lichtintensität, zeigen sich Unterschiede. Geht man zu Flammenbildern höherer Ordnung fort, so kann bald das Licht ∓, bald das ⊥ zur Hauptbeugungsebne polarisirt, überwiegen.

Aehnliche Verschiedenheiten beobachtet man im reflectirten Licht, und zwar zeigen hier wieder Furchen und Hügelgitter symmetrischer Gestalt dieselben Erscheinungen, sobald man rechts und links vertauscht.

Kleine Unterschiede in der Gestalt der Oeffnungen oder Furchen (Hügel) eines Gitters, haben einen sehr bedeutenden Einfluss auf die Verschiedenheit der Lichtintensität ∓ und ⊥ zur Hauptbeugungsebne polarisirt. Die Erscheinung ändert sich mit der Farbe der Lichtflamme, der

Substanz, in welcher die Beugung stattfindet und dem Einfallswinkel der auffallenden Strahlen.

Ich habe ferner vor die Objectivlinsen eines Collimators und eines astronomischen Fernrohrs Nicol'sche Prismen gebracht, deren Azimuth an vertikalen Kreisen, bis auf Minuten genau bestimmt werden konnte. Zwischen die Nicol'schen Prismen wurden die Gitter gebracht. In einigen Fällen wurde das astronomische Fernrohr fortgelassen und mit dem Auge direct durch das analysirende Nicol'sche Prisma auf das Gitter gesehen. Der Spalt des Collimators wurde gewöhnlich mit Sonnenlicht erleuchtet.

Bei gekreuzten Nicol'schen Prismen erschien der Lichtspalt im Ocular des Fernrohrs schwarz. Beim Einschalten des Gitters erhellte sich derselbe und die Maxima oder Spectra 2ter Klasse mit den Fraunhofer'schen Linien wurden sichtbar. Das centrale Bild des Spaltes erscheint je nach der Stellung der Nicol'schen Prismen verschieden gefärbt. Mit einem Ocular-Prisma betrachtet, zeigt es meist einen dunklen Streifen im Spectrum parallel den Fraunhofer'schen Linien, der beim Drehen des analysirenden Nicol'schen Prismas auf grössere Azimuthe bei einigen Gittern nach Roth, bei anderen nach Blau wandert. Der letztere Fall, wo die parallel der Hauptbeugungsebne polarisirte Componente für Roth grösser ist, als für Blau ist der häufigere.

Die Grösse der Drehung des analysirenden Nicol'schen Prismas, welche den dunklen Streifen durch das ganze Spectrum des centralen Bildes führte, änderte sich mit dem Einfallswinkel, der Natur des Materials der Gitterstäbe oder Furchen, der Feinheit des Gitters und der Substanz, in welcher die Beugung stattfand.

Sie schwankte zwischen einem Bruchtheil einer Minute bis zu etwa $^3/_4{}^0$ im durchgehenden Licht.

In den Seitenspectren treten ebenfalls dunkle Streifen parallel den Fraunhofer'schen Linien auf, die beim Drehen auf grössere Azimuthe, je nach dem Gitter und dem Spectrum, von Roth nach Blau oder von Blau nach Roth gehen. Diese Drehung ist bei den verschiedenen Gittern und bei den verschiedenen Seitenspectren desselben Gitters sehr verschieden und kann 5° und mehr betragen. Bei grösseren Beugungswinkeln stört die Uebereinander-Lagerung der Spectra verschiedener Ordnung die Beobachtung.

Schaltet man mehrere parallele Gitter hintereinander, so treten sehr complicirte Erscheinungen auf, die zum Theil schon von Brewster [1]) und Crova [2]) untersucht worden sind. Bei passender Anordnung der Gitter kann man die Drehung der Polarisationsebne für ein bestimmtes Maximum 2ter Klasse vermehren.

Oft erscheint der dunkle Streifen im Spectrum erst, wenn man gleichzeitig mit dem Gitter ein Glimmerblatt von $\frac{\lambda}{4}$ in einem passenden Azimuth zwischen die Nicol'schen Prismen bringt. Das gebeugte Licht ist dann elliptisch polarisirt. Für einzelne Gitter lässt sich der Phasenunterschied der Componenten $\parallel$ und $\perp$ zur Hauptbeugungsebne polarisirt mit einem Babinet'schen Compensator bestimmen.

Noch auffallender als im durchgehenden Licht, sind die Erscheinungen, wenn man das im Azimuth $\pm$ 45° linear polarisirte Licht von

1) Phil. Mag. (4) XXXI. p. 22 und 98. 1866.
2) C. R. LXXII. p. 855. 1871; LXXIV. p. 932. 1872.

einem Gitter reflectiren lässt, besonders bei versilberten Furchen- oder Hügelgittern.

Es treten dann in dem Spectrum des centralen Bildes oder den Seitenspectren 2ter Klasse bei einer bestimmten Stellung der Nicol'schen Prismen ein oder mehrere dunkle Streifen auf, die beim Drehen der Nicol'schen Prismen von einer Fraunhofer'schen Linie zur anderen rücken oder verschwinden. Ihre Lage ändert sich mit Gestalt, Abstand und Material der Furchen oder Hügel, dem Einfallswinkel und der Substanz, in welcher die Beugung stattfindet. Symmetrisch gestaltete Furchen und Hügelgitter zeigen wieder dieselben Erscheinungen. Abweichungen sind durch kleine Verschiedenheiten in der Gestalt der Furchen oder Hügel zu erklären, die die Erscheinung sehr bedeutend beeinflussen.

Zwischen gekreuzten Nicol'schen Prismen zeigt ein Gitter im durchgehenden oder reflectirten Licht secundäre Maxima mit Fraunhofer'schen Linien, die sich ohne dieselben der Wahrnehmung entziehen. Dieselben sind je nach dem Azimuth des analysirenden Nicol'schen Prismas verschieden gefärbt.

Verschiedene Gitter zeigen quantitative aber nicht qualitative Unterschiede, wie ich durch zahlreiche Messungen gefunden habe, die an einer anderen Stelle demnächst mitgetheilt werden sollen, wo man auch die Arbeiten anderer Beobachter aufgeführt finden wird.

Abgesehen von jeder theoretischen Betrachtung zeigten die Versuche:

1. Linear polarisirtes Licht giebt nach der Beugung im allgemeinen elliptisch polarisirtes Licht.

2. Phasenunterschied und Amplitudenverhält-

niss der Componenten $\parallel$ und $\perp$ zur Hauptbeugungsebne polarisirt ändern sich bei demselben Einfallswinkel mit der Ordnung des Spectrums, so dass sie mit wachsendem Beugungswinkel zu oder abnehmen können. Auf eine Zu- oder Abnahme kann wieder eine Ab- oder Zunahme folgen u. s. f.

3. Die Zu- oder Abnahme ist für verschiedene Farben sehr verschieden und kann unter sonst ähnlichen Bedingungen die eine Farbe eine Zunahme, die andere eine Abnahme zeigen.

4. Ist der Phasenunterschied der beiden Componenten, $\parallel$ und $\perp$ zur Hauptbeugungsebne polarisirt, klein, so nimmt man an dem gebeugten Licht eine Drehung der Polarisationsebne wahr, die bei demselben Einfallswinkel und demselben Spectrum 2ter Klasse für verschiedene Farben verschieden gross ist, und deren absoluter Werth mit steigender Wellenlänge zu oder abnehmen kann. Einem Azimuth $+\alpha$ oder $-\alpha$ des auffallenden Lichtes entspricht nach der Beugung dasselbe Azimuth $+$ oder $-\beta$ des durchgegangenen oder reflectirten Lichtes. Die Drehung der Polarisationsebne kann für die direct durchgegangenen oder reflectirten Strahlen (dem Beugungswinkel 0° entsprechend) wenige Minuten oder mehrere Grade, bei den seitlichen Maximis 2ter Klasse 90° und mehr betragen. Der Fall wo die Amplitude $\perp$ zur Hauptbeugungsebne oder $\parallel$ den Gitterstrichen (Furchen) polarisirt für blaues Licht grösser ist, als für rothes, ist der häufigere.

5. Ein Gitter zwischen Nicol'sche Prismen oder polarisirende Vorrichtungen eingeschaltet, ertheilt bei weissem auffallenden Lichte dem direct durchgegangenen oder reflectirten Lichte

ähnliche Farben, wie sie Krystallplatten zwischen polarisirenden Vorrichtungen zeigen.

6. Amplitudenverhältniss und Phasenunterschied ändern sich unter sonst gleichen Bedingungen mit der Neigung des Gitters gegen die einfallenden Strahlen.

7. Amplitudenverhältniss und Phasenunterschied ändern sich sowohl für normal als für schief auffallende Strahlen mit der Substanz, aus welcher bei durchgehendem Licht die Oberfläche der Gitterstäbe, bei reflectirtem Licht die Furchen oder Hügel des Gitters bestehen.

8. Amplitudenverhältniss und Phasenunterschied ändern sich mit der Breite der Oeffnungen oder mit der Gestalt der Furchen oder Hügel des Gitters.

9. Die durch die Beugung hervorgebrachte Aenderung des Amplitudenverhältnisses und des Phasenunterschiedes der ∓ und ⊥ zur Hauptbeugungsebne polarisirten Lichtwellen ist unter sonst gleichen Verhältnissen um so grösser, je feiner das Gitter ist, oder je mehr es gegen die einfallenden Strahlen geneigt wird.

10. Das von gefurchten Metallspiegeln in der Hauptbeugungsebne direct reflectirte Licht zeigt sehr nahe denselben Phasenunterschied, wie bei einem ungefurchten Spiegel aus demselben Material. Die Amplitude parallel der Reflexions- oder Hauptbeugungsebne polarisirt überwiegt noch mehr über die Amplitude ⊥ zur Einfallsebne polarisirt, wie bei einem ungefurchten Metallspiegel. Das von gefurchten Metallspiegeln direct reflectirte Licht nähert sich also in seinen Eigenschaften mehr dem von durchsichtigen Substanzen reflectirten Licht als es bei dem von glatten ungefurchten Metallspiegeln reflectirten Lichte der Fall ist.

die Polarisationsebne nicht bestimmt werden kann, wie dies die Theorien und theoretischen Betrachtungen von Stokes [1]), Holtzmann [2]), Lorenz [3]), Lallemand [4]) und Strutt [5]) versucht haben.

Würzburg, den 4ten Januar 1873.

1) Cambr. transact. IX. p. 85. 1851.
2) Pogg. Ann. 99. p. 446. 1856.
3) Pogg. Ann. 111. p. 321. 1860.
4) C. R. LXIX. p. 190. 1869.
5) Phil. Mag. (4). XLI. p. 450. 1871.

Verzeichniss der bei der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangenen Druckschriften.

November 1872.

Nature. 157. 158. 159. 160. 161.

Mémoires de l'Académie des Sciences. etc. de Lyon. Classe des Sciences. T. 18. Classe des Lettres. T. 14. Lyon 1870. 71. 8.

Annales de la Société d'Agriculture etc. de Lyon. 4. serie. T. 1. 2. 1869. Ebd. 1870. 8.

Annales de la Société Linnéenne de Lyon. A. 1870—71. T. 18. Ebd. 1872. 8.

Schriften der naturforschenden Gesellschaft in Danzig. Neue Folge. Bd. III. Hft. 1. Danzig 1872. 8.

Vierteljahrsschrift der naturf. Gesellschaft in Zürich redigirt von Dr. Rudolph Wolf. Jahrg. XVI. Hft. 1. 2. 3. 4. Zürich 1871. 8.

Abhandlungen der naturhistorischen Gesellschaft zu Nürnberg. Bd. V. Nürnberg 1872. 8.

L. Kronecker zur algebraischen Theorie der quadratischen Formen. Berlin 1872. 8.

— Auseinandersetzung einiger Eigenschaften der Klassenzahl idealer complexer Zahlen. (Auszug aus dem Monatsbericht der Königl. Akad. der Wiss. zu Berlin.) 8.

(Fortsetzung folgt.)

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

5. Februar. № 3. 1873.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Ueber unsere jetzige Kenntniss der Gestalt und Grösse der Erde.

Von

J. B. Listing.

Das auf dem Meter als Grundmass beruhende decimale System von Mass und Gewicht, welches kurz vor Beginn dieses Jahrhunderts geschaffen worden, hat anfänglich zwar eine sehr langsame, in letzter Zeit dagegen eine desto schleunigere Verbreitung in der civilisirten Welt gefunden, und mit jedem Jahre gewinnt die Hoffnung, dass dieses System sowohl in der Wissenschaft als auch im engeren und weiteren industriellen Verkehr dereinst das allgemeine und ausschliessliche sein werde, eine festere Begründung. Man darf die Seelenzahl der Länder, in welchen das metrische System, sei es vollständig, sei es mit Modificationen, legalisirt ist, auf 440 Millionen schätzen. Die beiden englisch redenden Nationen Grossbritanien und die nordamerikanische Conföderation, bei welchen dasselbe vorerst durch gesetzliche Acte —

in England 1864 (Juli 21), in den Ver. Staaten 1866 (Juli 27) — permissiv geworden, ohne sofort in vollem Umfang an die Stelle der zeitherigen englischen Masse und Gewichte zu treten, haben die Frage der Adoption seit geraumer Zeit ernstlich erwogen und sind ihrer Lösung trotz der unverkennbaren Schwierigkeiten bereits sehr nahe getreten *). Durch ihren Beitritt würde jene Ziffer auf über 500 Millionen erhöht werden, und Russland mit 78 Millionen würde voraussichtlich diesem Vorgange folgen. Bei jedem solcher culturgeschichtlich wichtigen Schritte pflegt eine theoretische auf das Grundmass bezügliche Frage von neuem auf die Tagesordnung zu kommen und mehr oder weniger lebhafte Discussionen zu veranlassen, nämlich die ursprüngliche Definition des Meters als eines von den Dimensionen des Erdkörpers entnommenen Naturmasses, wonach der 10millionte Theil des meridionalen Erdquadranten als Grundlage des Systems die lineare Masseinheit bilden sollte. Dass diese Idee eines Naturmasses illusorisch ist, hat Bessel in, man möchte sagen, übermässig gründlicher Weise **) nachgewiesen,

*) England betreffend gibt die ausgezeichnete Untersuchung von James Yates, einer der sechs Vicepräsidenten der seit 1855 in England bestehenden Association for obtaining a uniform decimal system of measures and coins, die Darlegung des Standes der Frage vor bereits 14 Jahren unter voller Empfehlung des Meters: „What is the best unit of length? an inquiry showing, that the best unit of length is the metre". London 1858. Und hinsichtlich Nordamerikas, welches voraussichtlich dem Vorgange Englands folgen würde, findet sich die Angelegenheit mit gleicher Fürsprache für das metrische System in der vor Kurzem erschienenen Schrift von Barnard „the Metric System of weights and measures", revised edition. New York 1872.

**) Schumacher's Jahrbuch für 1840 S. 142. Bessel's

welche vor der nunmehr auch in Deutschland erfolgten Einführung eine Zeit lang innerhalb wissenschaftlicher Kreise zumal in Preussen eine merkliche Aversion gegen das Meter zur Folge gehabt hat. Man weiss längst, dass so weit unsere gegenwärtige Kenntniss von Grösse und Gestalt der Erde reicht, das Meter nicht mehr genau, wie man vor 73 Jahren meinte, dem 10 millionten Theile des Erdmeridianquadranten gleichkommt, eine Abweichung freilich, welche für die Zwecke der Praxis ganz bedeutungslos und nur in wissenschaftlichen Vorkommnissen beachtenswerth ist, und dass, will man an dem ersten Erforderniss eines Masses festhalten, nämlich dass es unveränderlich sei und frei von jeder Art von Mehrdeutigkeit, das Meter seine Definition ebenso wie andere bisher gebräuchliche Längeneinheiten in conventioneller Weise findet, nämlich in der Länge des in Paris als gesetzliches Original aufbewahrten Platinstabes in der Temperatur des schmelzenden Eises, welche am 22. Juni 1799 gesetzlich auf 443.296 par. Linien der sog. Toise du Pérou in der Temperatur von 16.25 Grad der hunderttheiligen Scale normirt worden ist*).

Der Werth eines Naturmasses ist abhängig einerseits von der Beständigkeit des Objects, von welchem es entnommen oder abgeleitet wird, und andererseits von seiner Bestimmtheit, d. h. von dem Grad der Schärfe, mit welcher es gemessen werden kann. In ersterer Beziehung ist z. B. die Länge des einfachen Secundenpendels an einem bestimmten Orte, z. B.

populäre Vorlesungen über wissenschaftliche Gegenstände, herausgegeben von Schumacher. Hamburg 1848. S. 52 und 282.

*) Base du Système Métrique I. p. 94. III. p. 138.

London, abhängig von der Beständigkeit der Schwerkraft an dem genannten Orte, so wie der Unveränderlichkeit des Sterntages, d. i. der Umdrehungsgeschwindigkeit der Erde. Die Schwerkraft ist fortwährend kleinen und regelmässigen in kurzen Perioden wiederkehrenden Veränderungen unterworfen. Ihr Einfluss ist, weil berechenbar und von äusserst geringem Betrag, ganz unschädlich, ähnlich wie die Veränderungen eines Massstabes in Folge von Temperaturveränderungen. Der Sterntag hat nachweislich seit zwei Jahrtausenden keine merkliche Veränderung erlitten. Aber es könnten Aenderungen mit der Masse der Erde und ihrer Vertheilung eintreten, welche die physische Constanz der Pendellänge wegen möglicher Einflüsse auf die Intensität der Schwere am gedachten Orte und auf die Tageslänge in Frage stellen würden. Gleicherweise ist Grösse und Figur der Erde und somit ein davon entnommenes Naturmass in seiner Beständigkeit an den Beharrungsstand des Massenbetrags und der Massenvertheilung des Erdkörpers geknüpft, dessen Dauer wir nicht für absolut verbürgt halten dürfen. Vorgänge, welche allmälige oder plötzliche Eingriffe in diese physischen Bedingungen der Constanz des Masses ausüben könnten, sind je nach der Natur des Massobjectes dem Grade ihrer Unwahrscheinlichkeit nach verschieden. Als Beispiele, für welche diese Unwahrscheinlichkeit, nach jetzigem Stand unseres Wissens, als unendlich gross, d. h. die physische Constanz als eine absolute angesehen werden darf, bieten in der Astronomie die (in der Theoria Motus) mit k bezeichnete Gravitationsconstante, in der Electricitätslehre die (von Weber) mit c bezeichnete Geschwindigkeit, in der Optik die

Geschwindigkeit des Lichts oder die Wellenlänge einer bestimmten Stelle des Spectrums im kosmischen Raume dar. Ganz anders wiederum verhalten sich die Naturmasse in der zweiten Beziehung, nämlich rücksichtlich ihrer Bestimmtheit oder der Genauigkeit ihrer Auswerthung, welche, fast ganz unabhängig von der physischen Beständigkeit, lediglich von dem jeweiligen Stand unserer Kenntnisse und dem derzeitigen Grad der Vollkommenheit unserer Hülfsmittel und Methoden der Messung abhängt. Die Pendellänge ist eines verhältnissmässig hohen Grades von Schärfe der Messung fähig, etwa $\frac{1}{500000}$. Wesentlich geringer ist diese Schärfe hinsichtlich der Dimensionen der Erde und noch weniger würden von dieser Seite die vier zuletzt erwähnten Beispiele zur Benutzung als Naturmasse empfohlen werden dürfen, obschon sie von Seiten ihrer physischen Constanz einen so hohen Rang behaupten. Die Undulationslänge des Lichtes ist in der That als einzuführendes Naturmass vorgeschlagen worden. Wollte man den millionfachen Betrag der Wellenlänge im Vacuo für gelbes Licht, welches der Mitte zwischen den beiden Fraunhofer'schen Linien *D* des Spectrums entspricht zur linearen Masseinheit wählen, eine Länge, welche sich auf 589.586 Millimeter herausstellen würde, so möchte ich unter Zugrundlegung der neueren Messungen von Stephan, Ditscheiner, Angström und van der Willigen die wahrscheinliche Unsicherheit in dieser Feststellung gegenwärtig für nicht geringer halten als $\frac{1}{4}$ Millimeter und die diesem entsprechende Genauigkeit von $\frac{1}{2356}$ würde somit weit hinter der etwa 1000 mal grösseren Schärfe zurückbleiben, deren heutzutage die Vergleichung der Massstäbe fähig ist. Es verdient er-

wähnt zu werden, dass sich ein Naturmass seit Langem im Gebrauch eingebürgert hat, es ist die sog. deutsche oder geographische Meile, nicht zu verwechseln mit der erst neuerdings im deutschen Reich gesetzlich eingeführten Meile von 7500 Metern. Die geographische Meile ist der 5400te Theil des äquatoriellen Umfangs der Erde. Ueber ihre physische Beständigkeit darf man sich beruhigen. In ihrer Auswerthung aber spiegelt sich der jeweilige Stand unserer Kenntniss der Erddimensionen, ihr Cours so zu sagen steigt oder fällt mit dem Werthe, welchen wir zeitweilig dem äquatorialen Radius des terrestrischen Sphäroids beilegen, sie stand zu Anfang dieses Jahrhunderts, als man den meridionalen Umfang der Erde genau gleich 40000000 Meter schätzte, auf 7418^{m}5, im Jahre 1819 auf 7419.5, 1830 auf 7419.9, 1841 auf 7420.4 und gegenwärtig noch ein volles Meter höher. Die Zeit wird nicht ausbleiben, wo sie wieder auf 7420.4 Meter herabgeht.

Ganz ähnlichen Schwankungen würde die Länge des Meters unterliegen, wenn es dem zehnmillionten Theil des Meridianquadranten gleichen, d. h. ein wirkliches Naturmass sein sollte. Dasselbe ist aber in der That in Folge des oben erwähnten Einführungsgesetzes ein Linearmass von bestimmtem numerischen Verhältniss (443.296 : 864) der Toise du Pérou. Sollte das in einem Platinstab verkörperte Original des Meters durch einen Unglücksfall, ähnlich dem Westminster-Brande im Jahr 1834, welcher das englische Original-Yard vernichtete, verloren gehen, so würde man zu seiner Wiederherstellung nicht auf eine neue Meridianmessung, sondern auf die zahlreichen genauen und authentischen Copien recurriren, die sich an den

verschiedensten Orten des civilisirten Theils der Erde vorfinden. Der Vorzug des metrischen Systems beruht nicht in der Eigenschaft des Zusammenhangs mit einem Naturmass, sondern vielmehr einerseits auf der durchgeführten decimalen Einrichtung und dem einfachen Zusammenhang der Einheiten für Flächen, Volumen und Gewicht mit der Längeneinheit, sowie andrerseits auf seiner grossen, in fortwährender Zunahme begriffenen Verbreitung.

Für die Wissenschaft aber hat, wenn auch gewissermassen indirect, das metrische System eben vermöge der mit ihm anfänglich verknüpft gewesenen Idee eines Naturmasses einen nicht zu unterschätzenden Erfolg bereitet, nämlich die mit ungewöhnlichem Eifer betriebenen Veranstaltungen zur Förderung unserer Kenntniss der Gestalt und Grösse der Erde. Gradmessungen und Messungen der Länge des Secundenpendels, auf denen wesentlich diese Kenntniss beruht, sind in verschiedenen zum Theil weit auseinander liegenden Gegenden der Erde zu sorgfältiger Ausführung gekommen. Gleichwohl muss ihre Vervielfältigung ins Künftige noch sehr viel weiter getrieben werden, um das Resultat mehr und mehr von der Unsicherheit zu befreien, mit der es heute noch behaftet ist.

Die Bestimmung der Erddimensionen ist von so hervorragend wissenschaftlichem Interesse, dass es wohl der Mühe lohnt, ganz abgesehen von der vorhin berührten Frage über den Fehler des Meters als zehnmillionten Theils des Meridianquadranten, einen Blick auf die zeitherigen Erwerbnisse unserer Kenntniss in dieser Richtung zu werfen. Das Nachstehende soll in Kürze einen Ueberblick der bisherigen Resultate geben, wie sie vorzugsweise aus den

Gradmessungen gewonnen worden sind, mit Andeutungen über die in der Frage für die nächste Zukunft sich darbietenden Aufgaben.

Bei der Bestimmung der Gestalt und Grösse der Erde kommt zunächst in Betracht, was unter Oberfläche des Erdkörpers zu verstehen sei. Der Begriff derselben, sofern man hier wie bei anderen Vorkommnissen die Atmosphäre, obwohl sie einen integrirenden Massenbestandtheil der ganzen Erde ausmacht, als über der Erdoberfläche befindlich ansieht, wäre einfach, wenn die Erde, statt theilweise, ganz mit Wasser bedeckt wäre. Es wäre die Oberfläche des gesammten Meeres in seinem Gleichgewichtszustande, welcher dann stattfinden würde, wenn das Wasser lediglich unter der Wirkung erstlich der Totalanziehung aller Theile der gesammten Erdmasse und sodann der aus der Rotation der Erde um ihre Axe hervorgehenden Centrifugalkraft stände. Man sieht hierbei also ab von den verhältnissmässig kleinen Störungen dieses Gleichgewichtes, wie sie in Ebbe und Fluth aus den Gravitationswirkungen von Mond und Sonne, in den Veränderungen des Niveaustandes und im Wellenschlage aus Druckunterschieden und Bewegungen der Atmosphäre entspringen. Die Oberfläche des Wassers und somit die physische Begrenzung des Erdkörpers wäre alsdann eine sog. Gleichgewichtsfläche, welche die Richtungen der Lothlinie allerorten senkrecht schneidet. An der nur zum Theil mit Wasser bedeckten Erde aber erhebt sich die physische Oberfläche der Continente und Inseln in den complicirtesten Gestaltungen über die Meeresfläche. Letztere lässt sich jedoch in Gedanken über die ganze Erde erweitern, und in einem Netze von Canälen, die

man sich unter sich und mit dem Meere communicirend in den Continenten angelegt denken könnte, würde der Stand des Wassers diesen Theil der Meeresfläche versinnlichen. Die so vervollständigte Meeresfläche, die man wohl als mathematische Oberfläche der Erde bezeichnet hat, ist es, auf welche sich die mathematisch geographischen Untersuchungen über Gestalt und Grösse der Erde beziehen. Man weiss längst, dass diese mathematische Oberfläche mit manchfachen, in ihrer Gesammtheit durch keine Formel darstellbaren Unregelmässigkeiten begabt ist, und die Untersuchung musste also auf den Versuch gerichtet sein, eine ideale regelmässige Fläche zu finden, welche durch einen einfachen Ausdruck geometrisch bestimmbar, im Ganzen und Grossen sich möglichst nahe an vorerwähnte mathematische Oberfläche der Erde anschliesst. Theoretische Betrachtungen, zu welchen bereits Huyghens und Newton den Grund gelegt haben, geben der Wahl eines abgeplatteten Rotationsellipsoids den entschiedenen Vorzug, obwohl bereits öfter sphäroidische Rotationskörper mit anders als elliptisch gestaltetem Meridian sowie auch Ellipsoidformen von drei ungleichen Axen zu diesem Versuch angewendet worden sind.

Es kommen also in unserer Frage zwei mathematische Flächen zur Sprache, beide im Allgemeinen von sphäroidischer Gestalt, die eine jedoch vergleichungsweise mehr von physischer, die andere mehr von abstract mathematischer Bedeutung. Wir werden die vorhin definirte mathematische Oberfläche der Erde, von welcher die Oberfläche des Oceans einen Theil bildet, die geoidische Fläche der Erde oder das Geoid nennen, und für die zweite Fläche, die durch einen einfachen mathematischen Ausdruck

darstellbar, in Form und Grösse sich möglichst nahe an das Geoid anschliessen soll, die Benennung Sphäroid reserviren. Diese Namen dienen füglich Verwechselungen vorzubeugen, welche durch den Gebrauch des Ausdruckes »mathematische Oberfläche«, der nicht minder oft auf die zweite als auf die erste Fläche angewendet worden, fast unvermeidlich sind.

Die Messungen auf der Erde, welche zur Bestimmung ihrer Gestalt und Grösse veranstaltet werden, sind doppelter Art, nämlich sog. Gradmessungen und Messungen der Länge des einfachen Secundenpendels. Bei den ersteren wird die Länge eines mehr oder weniger ausgedehnten Bogens des Meridians durch geodätische Operationen, d. h. durch Triangulation, verbunden mit einer Basismessung, bestimmt und verglichen mit der astronomisch ermittelten Amplitude, d. i. dem Winkel zwischen den Richtungen der Schwere an den Endpunkten des gemessenen Bogens, oder aber es wird die lineare Grösse eines Parallelbogens unter bestimmter geographischer Breite geodätisch ermittelt und verglichen mit dem astronomisch bestimmten Längenunterschied der Endpunkte. Die Pendelmessungen dienen unter Zuhülfenahme des von Clairaut theoretisch entdeckten Zusammenhanges der Abplattung des Erdsphäroids mit der Schwere und der Schwungkraft, aus einer genauen Vergleichung der durch das Pendel gemessenen Beträge der Schwerkraft an verschiedenen Punkten der Erdoberfläche die Abplattung zu ermitteln. Die Pendelmessungen, obwohl sie nur einen Weg zur Bestimmung der Gestalt, nicht der Grösse der Erde eröffnen, sind dennoch neben den Gradmessungen ein wichtiges Hülfsmittel, welches man mit Recht einen Fühl-

hebel genannt hat, den man der Erde auch an solchen Stellen anlegen kann, wo wie auf weit von den Continenten entlegenen Inseln, das geodätische Verfahren seinen Dienst versagt.

Von den bis jetzt ausgeführten Gradmessungen, auf die wir das Hauptaugenmerk richten, kommen zehn bis zwölf meist ältere Messungen, sei es wegen später nachgewiesener Fehler, sei es anderer Misstände wegen, nicht mehr in Betracht. Die gegenwärtig als brauchbare und werthvolle Grundlage für die Untersuchungen über Gestalt und Grösse der Erde geltenden Breitengradmessungen gibt nachstehende Uebersicht, wo die eingeklammerte Jahrszahl die Zeit der Vollendung oder Publication angibt, und in den übrigen Columnen die geogr. Länge (östl. von Greenwich), die geogr. Breite der Mitte des Bogens, die Grösse des Bogens und die Zahl der End- und Zwischenpunkte mit gemessenen Polhöhen enthalten sind.

Gradmessung.		Länge. (Greenw.)	Mittel-Breite.	Amplitude.	Stationen.
1. Russische	(1851)	26° 40′	58° 0′	25° 20′1	13
2. Schwedische	(1803)	26 40	66 20	1 37.3	2
3. Franz. Engl.	(1858)	0 30	49 45	22 9.7	12
4. Zweite Ostind.	(1847)	77 40	18 50	21 21.3	8
5. Erste Ostind.	(1805)	79 20	12 32	1 35.0	2
6. Cap d. g. Hoffn.	(1852)	18 30	−32 3	4 36.8	5
7. Preussische	(1838)	20 30	54 58	1 30.5	3
8. Hannoversche	(1828)	9 56	52 32	2 1.0	2
9. Dänische	(1828)	10 33	54 8	1 31.9	2
10. Peruanische	(1744)	281 0	— 1 31	3 7.1	2

Die Summe der zehn Bogen beträgt 84° 50′7, der astronomisch bestimmten Punkte 51. Durch die 31 Zwischenpunkte stellen diese zehn Breiten-

gradmessungen 41 geodätisch bestimmte, mit astronomisch festgelegten Endpunkten versehene Bogen dar von einer durchschnittlichen Grösse, von 2° 4′.

Um einen ungefähren Massstab für die relative Bedeutsamkeit dieser Messungen zu gewinnen, kann man das Product aus der Bogenlänge in die um 1 verminderte Zahl der Stationen als einen angenäherten Ausdruck des extensiven Werthes einer Messung betrachten. Es ergeben sich auf diese Weise der Reihe nach die zehn Zahlen 304.0, 1.6, 243.7, 149.4, 1.6, 18.4, 3.0, 2.0, 1.5, 3.1. Legen wir die zehn Messungen auf eine ungezwungene Weise zu sechs Gruppen zusammen, so dass wir die Schwedische Messung mit der Russischen, die ältere Indische mit der neueren, die Hannoversche und Dänische mit der Preussischen je zu einer Gruppe vereinigen und die Englisch-Französische, die Peruanische und die Messung am Cap als die drei übrigen betrachten, so können die relativen Gewichte aus den obigen Zahlen in folgender Vertheilung entnommen werden.

Osteuropäische	Gruppe . . .	97
Westeuropäische	» . . .	78
Ostindische	» . . .	48
Südafrikanische	» . . .	6
Mitteleuropäische	» . . .	2
Peruanische	» . . .	1

Diese, wenn auch ganz rohe, Auswerthung gibt ein Bild von dem gegenwärtigen Stimmverhältniss dieser Gruppen, wo sich die drei ersten als die weitaus vorwiegenden, unter sich im Verhältniss von 4 : 3 : 2 stehend, die drei letzten zusammengenommen nur als dem fünfundzwanzigsten Theil der drei ersten gleichkommend herausstellen, wobei natürlich von anderen als extensiven Werthverhältnissen ab-

gesehen ist. Durch Zusammenlegen des Dänischen mit dem Hannoverschen Bogen (Amplitude 3° 21'4 mit 4 Stationen), was längst bei den zeitherigen Berechnungen hätte geschehen sollen, würde an die Stelle der achten und neunten der obigen zehn Werthe die Zahl 10.0 treten und die 6 Gruppen durch die Verhältnisszahlen 97, 78, 48, 6, 4, 1 dargestellt werden.

In nachstehender kurzer Darlegung der zeitherigen auf die Gradmessungen gegründeten Berechnungen des Erdsphäroids bezeichnen wir für das Rotationsellipsoid die grosse Halbaxe der Meridianellipse oder den Halbmesser des Aequators durch a, die kleine Halbaxe oder die halbe Polaraxe durch b, die Differenz $a—b$ durch c, die Abplattung $\frac{a—b}{a}$ durch $\frac{1}{\omega}$, den Quadranten des Aequators durch Q^0, die geographische Meile oder den 5400ten Theil des äquatorialen Umfangs durch M, den Meridianquadranten vom Aequator bis zum Pol durch Q, und durch G die mittlere Länge eines Breitengrades (gewöhnlich in Toisen ausgedrückt). Es ist alsdann

$$a = \omega c$$

$$b = (\omega—1)\, c$$

$$Q^0 = \frac{\pi}{2} a$$

$$M = \frac{\pi}{2700} a.$$

Die Länge s des vom Aequator bis zur geographischen Breite oder Polhöhe φ gerechneten

Bogens der Meridianellipse, deren Excentricität $\varepsilon = \frac{1}{a}\sqrt{(aa-bb)}$, ist bekanntlich

$$s = a(1-\varepsilon\varepsilon)\int d\varphi\,(1-\varepsilon\varepsilon\sin\varphi^2)^{-\frac{3}{2}}$$

und mit Einführung der Abplattung $\frac{1}{\omega} = 1 - \frac{b}{a}$:

$$s = a\left(1-\frac{2}{\omega}+\frac{1}{\omega\omega}\right)\int d\varphi\left(1-\frac{2\omega-1}{\omega\omega}\sin\varphi^2\right)^{-\frac{3}{2}}$$

woraus sich (bis zum Quadrat der Abplattung) ergibt

$$Q = \frac{\pi}{2}a\left(1-\frac{1}{2\omega}+\frac{1}{16\omega\omega}\right)$$

$$G = \frac{\pi}{180}a\left(1-\frac{1}{2\omega}+\frac{1}{16\omega\omega}\right)$$

Für ein dreiaxiges Ellipsoid bezeichne a' den grössten, a'' den kleinsten Radius des Aequators, b die halbe Polaraxe, Q^0 den Quadranten des Aequators zwischen seinen extremen Halbmessern, Q' den kleinsten, Q'' den grössten Meridianquadranten. Setzen wir noch $a'-b = c'$, $a''-b = c''$, $a'-a'' = c^0$ und

$$\omega' = \frac{a'}{a'-b} = \frac{a'}{c'}$$

$$\omega'' = \frac{a''}{a''-b} = \frac{a''}{c''}$$

$$\omega^0 = \frac{a'}{a'-a''} = \frac{a'}{c^0}$$

welche drei Abplattungsnenner durch die Relation

$$(\omega^0-1)\,\omega'\,(\omega''-1) = \omega^0\,(\omega'-1)\,\omega''$$

zusammenhängen, so wird $a' = \omega' c' = \omega^0 c^0$, $a'' = \omega'' c''$, $b = (\omega'-1)\,c' = (\omega''-1)\,c''$ und

$$Q^0 = \frac{\pi}{2} a' \left(1-\frac{1}{2\omega^0}+\frac{1}{16\omega^0\omega^0}\right)$$

$$Q' = \frac{\pi}{2} a' \left(1-\frac{1}{2\omega'}+\frac{1}{16\omega'\omega'}\right)$$

$$Q'' = \frac{\pi}{2} a'' \left(1-\frac{1}{2\omega''}+\frac{1}{16\omega''\omega''}\right)$$

und

$$M = \frac{Q^0}{1350}.$$

Die Meridianquadranten haben ungleiche von ihrer geographischen Länge abhängige, zwischen den extremen Werthen Q' und Q'' liegende Grössen, ebenso also auch die den verschiedenen Meridianen zugehörigen mittleren Breitengrade. Schon hieraus ergibt sich, dass die den Parallelkreisen der Kugel oder des Rotationssphäroids entsprechenden Linien auf dem dreiaxigen Ellipsoid Curven doppelter Krümmung sind. Auch sind genau genommen die ebenen durch die Polaraxe gelegten Schnitte mit Ausnahme der beiden die Halbaxen a', b und a'', b enthaltenden Hauptschnitte keine Meridiane, indem sie aufhören geodätische Linien zu sein.

Für die Grösse allein, abgesehen von der durch ω oder durch ω', ω'' und ω^0 bestimmten Gestalt eines Ellipsoides, gibt der Radius einer Kugel, welche mit dem Sphäroid gleiches Volumen besitzt, den natürlichsten Massstab. Nennen wir diesen Kugelradius R, so ist bekanntlich für das Rotationssphäroid $R = \sqrt[3]{(aab)}$ und für das dreiaxige Ellipsoid $R = \sqrt[3]{(a'a''b)}$. Bei Unterschieden zwischen den drei Dimensionen des Sphäroids, die wie bei der Erde nur etwa $\frac{1}{300}$ betragen, weicht das arithmetische Mittel derselben nur unbedeutend von dem geometrischen Mittel und zwar in Plus ab. Wäre z. B. für ein Rotationsellipsoid $\omega = 290$ und in geogr. Meilen $c = 2.9635$, also $a = 859.4367$, $b = 856{,}4732$, so wäre $R = 858.4477$, während $\frac{1}{3}(2a + b) = 858.4489$, zwölf Zehntausendstel einer Meile oder kaum 9 Meter grösser. Der Radius einer Kugel von gleicher Oberfläche mit dem Sphäroid liegt zwischen beiden Werthen.

Aus der Zeit des Ursprungs des metrischen Systems heben wir unter den zahlreichen damals und in der nächsten Folgezeit angestellten Berechnungen des Erdsphäroids nur die Zahlen hervor, welche die Unterlage für die Feststellung und Einführung des Meters gebildet haben. Die Abplattung wurde aus der Peruanischen und der Französischen Messung $= \frac{1}{334}$ gefunden, Hiermit und aus dem zwischen Dünkirchen und Montjouy gemessenen Bogen des Pariser Meridians wurde dann die Länge des Meridianquadranten zu 5130740 Toisen berechnet*) und der zehnmillionte Theil hiervon, d. i. $0^T513074$ oder 443.295936 Linien, abgerundet

*) Base du Syst. Métr. III. p. 432.

auf 443.296 Linien der Toise Pérou in der Temperatur von 16°25 der hunderttheiligen Scale (13° Reaumur) im Jahre 1799 in Frankreich gesetzlich als Länge des Meters festgestellt *). Es ergibt sich hieraus in Metern

$$\begin{aligned} a &= 6\,375653^{m} \\ b &= 6\,356564 \quad \text{(1) Delambre} \\ c &= \quad 19089 \qquad\quad 1800 \\ \omega &= 334 \end{aligned}$$

$$Q^{0} = 10\,014985^{m}, \quad M = 7418^{m}51$$
$$Q^{1} = 10\,000000\ , \quad G = 57008^{T}23045$$
$$R = 6\,369284^{m}$$

Hierbei ist zu bemerken, dass man bereits während der Fortsetzung der Französischen Messung in Spanien die Abplattung 1 : 334 für zu klein hielt und unter Zuziehung der neuen Station Barcelona (welche später dem nah gelegenen Punkte Montjony substituirt worden) die Ziffer 308,64 als die definitive betrachtete **).

---

*) Wir bemerken bei dieser Gelegenheit, dass aus dem gesetzlichen Verhältnisse von 443296 : 864000 des Meters zur Toise sich die genauen Zahlen so ergeben

Meter = 0.513 074 074 074 . . . . . Toise
Toise = 1.94903 63098 24586 73211 6 Meter.

Hiernach muss in: Comparisons of the Standards of Length, Ordnance Survey, London 1866, in der Finaltabelle pag. 280 die vorletzte Zahl 1949.03631 heissen.

**) Base du Syst. Métr. III (1810) p. 134,135. Dem Sphäroid sind späterhin in Frankreich neben dieser Abplattung die Halbaxen $a = 6376986^{m}$ und $b = 6356323^{m}$ beigelegt worden und seitdem bis in die neueste Zeit in Frankreich für die officiellen topographischen Arbeiten (Nouvelle description géométrique de la France), sowie bei ähnlichen Publicationen in anderen Ländern, wie Belgien, Italien, Baden, zum Grund gelegt worden. Dieser Annahme entspricht $Q = 10000724^{m}$ und $G = 57012^{T}3576$, sowie $Q^{0} = 10016793^{m}$ und M (der 5400te Theil des Ae-

Die vielen anderen vorzugsweise auf den vorhandenen Gradmessungen, zum Theil aber auch auf Pendelmessungen oder auf astronomischen Argumenten beruhenden Bestimmungen der ersten Jahrzehnte dieses Jahrhunderts geben Abplattungsziffern, die sich in sehr weiten Grenzen bewegen. Ihre Details haben gegenwärtig nur geringes Interesse.

Beachtenswerth dagegen ist die zuerst von Walbeck*) nach der Methode der kleinsten Quadrate unternommene Bestimmung des Rotationsellipsoides, welches die Gradmessungen in Peru, in Frankreich, in England, die neuere in Lappland (Schwedische), und die beiden in Ostindien (die zweite von Punnae bis Namthabad) so vereinigt, dass die Summe der Quadrate der Differenzen zwischen den gemessenen und berechneten Amplituden ein Kleinstes wird. Von den sechs Messungen sind die Polhöhen bloss der Endpunkte und von der Abplattung nur die erste Potenz in die Rechnung aufgenommen. Das Resultat ist $\omega = 302.781$, $G = 57009^{T}746$ und ergibt in Metern:

---

quators) = 7419^{m}845, wegegen man öfter unter der Benennung »lieue géographique« dem 5400ten Theil des Meridianumfangs $4Q$ im Betrag von 7407^{m}943 begegnet, wie er z. B. in den von Delcros im Annuaire météorologique de la France pour 1850 veröffentlichten Tafeln zur Areal-Berechnung untergelegt ist, durch welches Quid pro quo diese Tafeln, ganz abgesehen von den jetzt veralteten numerischen Werthen für ω und a, so gut wie ganz unbrauchbar geworden sind. Vollkommenen Ersatz dafür bieten die von H. Wagner im Geographischen Jahrbuch III (1870) mitgetheilten, auf das Besselsche Sphäroid basirten Tafeln.

*) De forma et magnitudine telluris ex dimensis arcubus meridiani definiendis. Abose 1819.

$$a = 6\,376896^{m}$$
$$b = 6\,355833 \qquad (2)\ \text{Walbeck}$$
$$c = 21062 \qquad 1819$$
$$\omega = 302.781$$
$$Q^{0} = 10\,016805^{m}, \quad M = 7419^{m}85$$
$$Q = 10\,000268\ , \quad G = 57009^{T}75$$
$$R = 6\,369868^{m}.$$

Ed. Schmidt hat auf Gauss' Veranlassung die Berechnung unter Benutzung derselben Gradmessungen wie Walbeck und Zuziehung der 1827 vollendeten Hannoverschen Gradmessung wiederholt, dabei von den 7 gemessenen Bogen die Polhöhen auch der Zwischenpunkte (zusammen 25 Oerter) und von der Abplattung auch das Quadrat in die Rechnung aufgenommen, dabei die Fehlerquadratsumme nicht der Amplituden, sondern der Polhöhen zum Minimum gemacht. Die erste Rechnung*) ergab $\omega = 298.39$, $G = 57010^{T}35$; die zweite**) — nach Verbesserung eines in die erste eingeschlichenen Rechnungsfehlers und Berücksichtigung kleiner inzwischen bekannt gewordener Modificationen in den Linearmassen der Englischen und Ostindischen Messung — $\omega = 297.479$, $G = 57008^{T}655$; die dritte***) — unter Hinzuziehung des zwischen Jacobstadt, Dorpat, Hochland gemessenen Bogens der Russischen Gradmessung (Summe der Bogen 39° 12′ mit 28 Oertern) und Rückkehr zu dem Walbeck'schen Princip, statt der Polhöhen

*) veröffentlicht in Gauss' Breitenunterschied zwischen Göttingen und Altona, Göttingen 1828, S. 82.

**) Lehrb. der math. u. phys. Geographie, Göttingen 1830, I. S. 197 und Vorrede V. — Astr. Nachr. VII. No. 161 (1829 Juni).

***) Harding u. Wiesen kl. astr. Ephemeriden für 1831, Göttingen 1830, S. 105.

die Differenzen derselben, d. h. die Amplituden in ihrer Fehlerquadratsumme auf ein Minimum zu bringen — $\omega = 297.648$, $G = 57008^{T}579$, $a = 3271844^{T}827$, $b = 3260852^{T}493$ oder in Metern

$$\begin{aligned} a &= 6\,376945^{m}4 \\ b &= 6\,355520.9 \quad \text{(3) Schmidt} \\ c &= \quad 21424.5 \quad\quad 1830 \\ \omega &= 297.648 \end{aligned}$$

$$Q^{0} = 10\,016881^{m}, \quad M = 7419^{m}91$$
$$Q = 10\,000061\ , \quad G = 57008^{T}58$$
$$R = 6\,369796^{m}.$$

Airy fand*) aus der Discussion von 14 Breitengradmessungen und Hinzuziehung einiger gemessenen Längengrade $\omega = 299.33$, $a = 20923713$, $b = 20853810$ engl. Fuss somit in Metern **)

---

*) in einem 1830 geschriebenen Artikel »Figure of the Earth« der Encyclopaedia Metropolitana, London 1845, p. 172.

**) Ohne hier auf minutiöse Schärfe in den Zahlenergebnissen Gewicht zu legen, mag nur bemerkt werden, dass für die vorgenommenen Reductionen zwischen französischen und englischen Massen statt der ältern Bestimmung

1 Toise = 2.13153053 Yard

und der neueren von 1858 (in Ordn. Survey: Principal Triangulation p. 745)

1 Toise = 2.13151459 Yard

die neueste von 1866 (in Ordn. Survey: Comparisons p. 280)

1 Toise = 2.13151116 Yard

und somit

1 Yard = 0.914391801 Meter

durchweg angewandt worden ist.

$a = 6\,377490^{m}5$
$b = 6\,356184.3$ (4) Airy 1830
$c = 21306.0$
$\omega = 299.33$
$Q^0 = 10\,017741^{m}$, $M = 7420^{m}55$
$Q = 10\,000976$, $G = 57013^{T}73$
$R = 6\,370380^{m}4$

Die wichtigste Arbeit vor Ablauf der ersten Hälfte dieses Jahrhunderts hat Bessel geliefert. Er sichtete zunächst mit scharfsinniger Kritik die bis dahin ausgeführten Gradmessungen, revidirte das numerische Material der adoptirten Messungen, wobei sich verschiedene Ungenauigkeiten in den von Schmidt angewandten Daten herausstellten, und brachte in ausführlicher Darlegung*) wesentliche Verbesserungen an der zweiten Indischen und an der Englischen Messung an. Bessel legte der Rechnung zum Grunde folgende 10 Gradmessungen mit beigefügter Bogenlänge λ (Differenz der Polhöhen der Endpunkte), der Mittelbreite μ (halbe Summe der Polhöhen der Endpunkte) und der Zahl n der astronomisch bestimmten Punkte des Bogens:

		λ	μ	n
1.	Peruanische	3° 7′	— 1° 34′	2
2.	erste Ostindische	1 35	12 32	2
3.	zweite Ostindische	15 58	16 8	7
4.	Französische	12 22	44 51	7
5.	Englische	2 50	52 2	5
6.	Hannoversche	2 1	52 32	2
7.	Dänische	1 32	54 8	2
8.	Preussische	1 30	54 58	3
9.	Russische	8 2	56 3	6
10.	Schwedische	1 37	66 20	2

*) Astr. Nachr. XIV. (1837) No. 334, 335, 336.

Gesammtlänge der gemessenen Bogen $50^{g}\ 34'$, Zahl der Oerter 38. Die nach der Methode der kleinsten Quadrate geführte Rechnung erzielt das Minimum der Summe der Quadrate der Unterschiede zwischen den beobachteten und den für das Rotationsellipsoid berechneten Polhöhen. Die erste Berechnung*) ergab $\omega = 300.7047$, $G = 57011^{T}453$ und hieraus $R = 6370080^{m}$. Einige Jahre später wurde von Puissant ein erheblicher Fehler in der Berechnung der Französischen Messung nachgewiesen**), wonach die Entfernung der Parallelen von Montjouy und Mola statt $153605^{T}77$ auf $153673^{T}61$, also um 67.84 Toisen grösser zu setzen ist. Bessel wiederholte hierauf mit Verbesserung dieses Fehlers***) die ganze Rechnung, und das Resultat dieser zweiten Arbeit ist $\omega = 299.1528$, $G = 57013^{T}109$, $a = 3272077^{T}14$, $b = 3261139^{T}33$, oder

$$\begin{aligned} a &= 6\,377397^{m}16 \\ b &= 6\,356078.96 \qquad (5)\ \text{Bessel} \\ c &= \quad 21318.20 \qquad\quad 1841 \\ \omega &= 299.1528 \end{aligned}$$

$$Q^{0} = 10\,017592^{m}0, \quad M = 7420^{m}44$$
$$Q = 10\,000855.8, \quad G = 57013^{T}11$$
$$R = 6\,370283^{m}2$$

Die auffallend nahe Uebereinstimmung des Resultats zweier von einander unabhängig angestellten Berechnungen von so hervorragenden Astronomen wie Airy und Bessel, ausgehend von sehr verschieden gearteten, sowohl im Detail als auch besonders im Umfange ungleichen nume-

*) Astr. Nachr. XIV (1837) No. 338.
**) Comptes Rendus 1841. Juni 21.
***) Astr. Nachr. XIX (1842) No. 436.

rischen Grundlagen, unter Anwendung nicht minder verschiedener Principien des Calcüls, konnte nicht verfehlen ein grosses Vertrauen in die Genauigkeit des Ergebnisses zu erzeugen. Die Gestalten der Ellipsoide von Airy und Bessel, wie sie sich in der Abplattungsziffer 299.33 und 299.15 aussprechen, sind so gut wie vollkommen übereinstimmend, wenn man bedenkt, dass die Bessel'sche Rechnung für die mittlere Unsicherheit in dieser Ziffer $\pm$ 4.7 Einheiten ergibt. Und die nach R bemessene Grösse der Sphäroide betreffend, so beträgt die Differenz von $97^{m}2$, um welche das Bessel'sche kleiner ist als das Airy'sche, weniger als den 65000ten Theil von R, während die mittlere Unsicherheit in der Bestimmung dieser Grösse sich etwa auf $\pm$ 316^{m}, nahe auf den 20000ten Theil erstreckt. Das Airy'sche Sphäroid ist bei den officiellen topographischen und chartographischen Arbeiten in England bis in die neueste Zeit als Norm zum Grund gelegt worden, und obwohl man in den verschiedenen Staaten Deutschlands die mannigfaltigsten früheren Bestimmungen hierfür verwendet hat, so ist doch das Bessel'sche Resultat auf dem Gebiet der Wissenschaft als das zuverlässigste betrachtet und bei astronomischen wie geodätischen Arbeiten vorzugsweise zum Grund gelegt worden. Encke sagt*) »grosse Aenderungen wird diese (Bessel'sche) Bestimmung wohl auf keinen Fall mehr erfahren, und Tafeln, welche auf sie gegründet sind, werden noch für lange Zeit allen Anforderungen entsprechen«.

Gleichwohl darf die grosse Uebereinstimmung zwischen den beiden in Rede stehenden

*) Berliner astr. Jahrb. für 1852. S. 322.

Sphäroiden nur als ein Spiel des Zufalls betrachtet werden. Die beiden Bestimmungen von Bessel, die erste vor, die zweite nach Verbesserung des Irrthums in der Berechnung der Französischen Gradmessung (die übrigen Daten sind übereinstimmend) zeigen den Einfluss dieses Irrthums in dem Complex der von Bessel benutzten Messungen. Das verbesserte Sphäroid ist um 203^{m} grösser geworden. Das Airy'sche, welches jenen Fehler involvirt, würde somit durch die Verbesserung um einen ähnlichen Betrag grösser werden müssen, und die Discordanz also, schon von diesem Gesichtspunkte betrachtet, sich von 97 auf 580^{m} im Werthe von R steigern.

Allgemeinere Erwägungen aber, die wir an die weiterhin zu besprechenden Berechnungen des Erdsphäroids werden zu knüpfen haben, werden den Grad des Vertrauens in die Sicherheit der vorliegenden wie vieler späterer Bestimmungen merklich herabmindern und uns die Ueberzeugung nahe legen, dass wir in der Annäherung an die Wahrheit auf dem fraglichen Gebiet uns noch ziemlich weit unterhalb der Stufe befinden, auf welcher wir bereits vor 30 Jahren zu stehen glaubten.

Oberst Everest gab in seinem letzten grossen Berichte über die Indische Vermessung*) eine Berechnung der Gestalt und Grösse des Erdsphäroids, bei welcher er einen eigenthümlichen Weg einschlug, ähnlich dem der bei manchen älteren Untersuchungen vor der allgemei-

*) an Account of the Measurement of two Sections of the Meridional Arc of India, conducted under the Orders of the Hon. East-India Company by Colonel Everest, London 1847, introd. CLXXIX und pag. 425.

nen Adoption der Methode der kleinsten Quadrate bei Berechnungen dieser Art betreten worden ist.

Er legte 10 Bogen*) zum Grunde, welche der Indischen, Französischen, Russischen, Peruanischen, Englischen und Schwedischen Gradmessung entnommen sind. Der (neuere) Indische Bogen zwischen Punnae und Kaliana concurrirt ganz und in verschiedener Weise getheilt fünfmal mit den Amplituden $5^0\,24'$, $6^0\,4'$, $11^0\,28'$, $9^0\,54'$ und $21^0\,21'$, die übrigen einfach und zwar der Russische von Jacobstadt bis Hochland mit $3^0\,35'$, sodann Frankreich mit $12^0\,22'$, Peru mit $3^0\,7'$, England, von Dunnose bis Clifton, mit $2^0\,50'$ und Schweden mit $1^0\,37'$; alle zehn Bogen also mit $77^0\,42'$, jeder mit seinen beiden Endpunkten. Von den 14 verschiedenen Stationen, unter denen 4 Indische, concurriren Indische zwei 2mal, zwei 3mal, die übrigen zehn jede 1mal. Diese zehn Bogen treten zu 42 Combinationen zu 2 zusammen, aus denen 42 verschiedene Sphäroide mit ihren Constanten ($\varepsilon\varepsilon$, $\frac{1}{\omega}$, a, c und Q) hervorgehen. Die Abplattungsziffer ω bewegt sich zwischen den Extremen 191.6 und 390.2, a zwischen 3497543.25 und 3482538.66 fathoms, c zwischen 18253.74 und 8924.64 fath. Den zehn Bogen entsprechen 10 Gruppen dieser Combinationen, worin jeder Bogen mit einer Anzahl (5 bis 9) der übrigen combinirt ist. Die Gruppen liefern für a und c

*) Die erste Aufstellung führt 12 Bogen auf, von welchen die beiden letzten nur, ähnlich wie die vier ersten der Indischen Messung, Theile des Russischen Bogens sind, die aber im weiteren Verlauf der Rechnung nicht mitsprechen.

je zehn arithmetische Mittel, in welchen die Abplattungsziffer noch zwischen 315.6 und 283.1, die grosse Halbaxe a zwischen 6381176 und 6376170 Meter variirt. Aus ihnen geht unter Hinzuziehung gewisser mit dem Gewicht der 10 Werthe zusammenhängender Grössen nach der Regel von Cotes das Endresultat hervor. Bei dieser Bestimmung, deren Berechnungsmethode übrigens viel Arbiträres enthält und der Indischen Messung, welche mit $54^0\ 11'$ in der Amplitudensumme von $77^0\ 52'$, also in der Rate von 70 Procent concurrirt, eine grosse Prävalenz einräumt, ging die Absicht vorzugsweise dahin, ein plausibeles Sphäroid als Grundlage für den Indischen Atlas zu gewinnen.

Das Resultat ist $a = 20920902.48$, $b = 20853642.00$ feet, also

$$\begin{aligned} a &= 6\,376633^{m}8 \\ b &= 6\,356133.0 \qquad (6)\ \text{Everest} \\ c &= \quad 20500.8 \qquad\qquad 1847 \\ \omega &= 311.043 \end{aligned}$$

$$Q^0 = 10\,016394^{m}, \quad M = 7419^{m}55$$
$$Q = 10\,000299\ , \quad G = 57008^{T}45$$
$$R = 6\,369794^{m}.$$

Die wichtigsten numerischen Arbeiten in unserer Frage sind in jüngster Zeit aus dem Königl. Grossbritanischen Vermessungsamte zu Southampton unter der Oberaufsicht des Obristen des K. Ingenieurcorps Sir Henry James hervorgegangen. Die hier in Betracht kommenden Rechnungen sind sämmtlich von Capt. Alexander Ross Clarke ausgeführt.

In einem kurzen von James an die K. Societät zu London mitgetheilten Bericht*) über

*) Philos. Trans. for 1856 Vol. 146. p. 607: On the

Stand und Gang der Arbeiten des Vermessungs-Amtes findet sich das Resultat der ersten Berechnung von Capt. Clarke. Ausgehend von dem oben mitgetheilten Airy'schen Sphäroid wird zunächst unter Beibehaltung des Werthes $\omega = 299.33$ die Grösse desjenigen Rotationsellipsoides bestimmt, welches sich der ganzen in England ausgeführten Triangulation innerhalb des Breitenunterschiedes von 10°56′ zwischen Saint Agnes und Saxavord am genauesten und so anschliesst, dass die Summe der Quadrate der übrigbleibenden Polhöhe-Abweichungen ein Kleinstes wird. Es findet sich $a = 20926249^f = 6378263^m5$, $b = 20856337^f = 6356954^m5$, $\omega = 299.33$. Sodann wird auf Grund von 10 Gradmessungen, nämlich der Peruanischen, der ersten und zweiten Ostindischen (letztere in der Ausdehnung von 21°21′ mit 4 Stationen), der Französischen, der Englischen (von Dunnose bis Saxavord, 10°13′ mit 8 Stationen), der Hannoverschen, der Dänischen, der Preussischen, der Russischen (von Belin bis Hochland, 8° 2′ mit 6 Stationen) und der Schwedischen, deren Bogensumme 63°20′, Zahl der Stationen 38 ist, ganz der Bessel'schen Rechnungsmethode folgend, für das Erdsphäroid gefunden: $\omega = 298.07$, $a = 20924933^f$, $b = 20854731^f$, oder

a	$= 6\,377862^m4$	
b	$= 6\,356465.0$	(7) Clarke
c	$= \quad 21397.4$	1856
ω	$= 298.07$	

Figure, Dimensions and mean Specific gravity of the Earth, as derived from the Ordnance Trigonometrical Survey of Great Britain and Ireland. Communicated by Lieut. Colonel James, Superintendant of the Ordnance Survey, — und: Proceedings of the Royal Society of London. Vol. VIII (1857) pag. 111.

$$Q^0 = 1\,0018313^m, \quad M = 7420^m99$$
$$Q = 1\,0001515, \quad G = 57016^T8$$
$$R = 6370728.$$

An der 2°40′ südlich von Paris liegenden Station Evaux des Französischen Meridianbogens findet eine auffallende Localablenkung des Lothes nach Süden Statt, welche bereits von Schmidt = 5″88, von Bessel, erste Rechnung 6″897, zweite Rechnung 6″447 gefunden worden. Clarke findet jetzt 6″848 und bemerkt, dass durch Ausschliessung dieser Station aus der Rechnung die Halbaxen a und b etwa um 200 Fuss grösser, die Abplattung um ein Geringes stärker ausgefallen wäre, nämlich $\omega = 297.72$, $a = 20925174^f$, $b = 20854914^f$ oder

$$a = 6\,377935^m8$$
$$b = 6\,356521.0 \qquad \text{(8) Clarke}$$
$$c = 21413.8 \qquad 1856$$
$$\omega = 297.72$$

$$Q^0 = 10\,018438, \quad M = 7421^m.06$$
$$Q = 10\,001620, \quad G = 57017^T.5$$
$$R = 6\,370790$$

und auf diesem Sphäroid stellt sich die Polhöhendifferenz für Evaux nunmehr auf 8″059, während alle übrigen im Ganzen etwas geringer ausfallen. Es wird deshalb auch Evaux bei späteren Berechnungen meistens weggelassen.

Die erwähnte Mittheilung in der Royal Society bildete einen Vorläufer zu der zwei Jahre darauf aus der Ordnance Survey publicirten grossen Arbeit »Principal Triangulation«, einer ausführlichen Darlegung der bis Saxavord, dem nördlichsten Punkte der Shetlands-Inseln ausge-

dehnten Vermessung Grossbritaniens*). A. R. Clarke widmet darin der Sphäroidfläche, welche die Gesammtheit der beobachteten Polhöhen, Längen und Azimute des gesammten Netzes der Grossbritanischen Vermessung am genauesten darstellt, eine umfassende Untersuchung, bei welcher auch die Lothablenkungen, wie sie sich aus den Terrainverhältnissen angenähert berechnen lassen, berücksichtigt werden. Die verschiedenen Rechnungsprincipien führen zu einer Reihe verschiedener Sphäroide mit zum Theil sehr ungleichen Abplattungsziffern, wie 281.08, 269.15 297.88, 282.94 und Werthe von a bezw. 20926181, 20926228, 20926840, 20927170, von welchen die beiden letzten durch arithmetische Mittel aus gewissen Rechnungselementen auf das Sphäroid führen, bei welchem Clarke als dem plausibelsten stehen bleibt. Hier ist $a = 20927005^{f} = 6378493^{m}9$, $b = 20852372^{f} = 6355746^{m}0$, $c = 74633^{f} = 22747^{m}9$ und $\omega = 280.4$.

Bei der hierauf vorgenommenen Bestimmung des allgemein, für die ganze Erde gültigen Sphäroids werden zwei erhebliche in der Zwischenzeit gemachte Vervollständigungen der bisherigen Gradmessungen in die Ausgangsdata der Rechnung aufgenommen, nämlich die geodätische Verbindung zwischen der Französischen

---

*) Der vollständige Titel ist: Ordnance Trigonometrical Survey of Great Britain and Ireland. Account of the Observations and Calculations of the *Principal Triangulation* and of the Figure, Dimensions and mean Specific gravity of the Earth as derived therefrom. Published by Order of the Master-General and Board of Ordnance. Drawn up by Captain Alexander Ross Clarke, R.E. F.R.A.S. under the direction of Colonel H. James, R.E. F.R.S. M.R.I.A. etc. Superintendent of the Ordnance Survey. London 1858.

und Grossbritanischen Vermessung und die Vollendung des Russischen Bogens im Süden bis Staronekrassofka bei Ismail (lat. 45°20′) und im Norden bis Fuglenaes auf der im Eismeer gelegenen Insel Kvalö (unter lat. 70°40′). Die 9 Breitengradmessungen, welche Capt. Clarke zum Grunde legt, sind die Englische von Saint Agnes an der Südwestspitze von Cornwall unter 49°54′ bis Saxavord auf der nördlichsten der Shetlands Inseln unter 60°50′, Breitendifferenz 10°56′ mit 28 Stationen, die Französische von Formentera bis Dünkirchen mit der Amplitude 12°22′ und (unter Auslassung von Evaux) mit 6 Stationen und diese beiden grossen Messungen sind durch die geodätisch ermittelte Entfernung zwischen den Parallelen von Dünkirchen und Greenwich mit einander verknüpft, ferner die Russische in der Ausdehnung von 25°20′ mit 13 Stationen, die neuere Indische von 21°21′ mit 8 Stationen, die ältere Indische 1°35′ mit 2, die Preussische von 1°30′ mit 3, die Peruanische von 3°7′ mit 3, die Hannoversche von 2°1′ und die Dänische von 1°32, mit je 2 Stationen. Die Schwedische Messung ist durch die nördliche Vervollständigung des Russischen Bogens entbehrlich geworden. Die Summe dieser 9 Bogen, sofern die Englisch-Französische Messung als Eine von der Amplitude 22°10′ betrachtet wird, beträgt 78°36′. Die Zahl der concurrirenden Polhöhen ist 66, wobei für England, statt der sonstigen 8, diesmal 28 eingeführt sind. Es werden zwei Rotations-Sphäroide berechnet nach dem Bessel'schen Modus, nämlich der Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf die Polhöhen-Differenzen. Das erste nicht elliptische, dessen Meridiancurve von der auf denselben Halbaxen beschriebenen Ellipse im Ganzen unbedeutend,

am merklichsten unter 45° Breite abweicht, berührt das auf denselben Halbaxen beschriebene Ellipsoid in den beiden Polen und längs des Aequators. Bei ihm kommen statt zweier, wie bei dem Rotations-Ellipsoid, drei Parameter in Betracht, von welchen es abhängt ob seine Fläche ausser den Berührungsstellen gegen das Ellipsoid nach innen oder nach aussen abweicht, und zwischen welchen sich eine Relation aufstellen lässt, welche diese Abweichung tilgt, d. h. die Fläche in ein Ellipsoid überführt. Das zweite ist das gebräuchliche Ellipsoid, welches nach Einführung der eben erwähnten Relation aus dem nicht elliptischen Sphäroid, versteht sich unter gleichzeitiger Abänderung seiner Halbaxen und ihres Verhältnisses, hervorgeht.

Nach kritischer Revision des numerischen Details ergibt nun die Berechnung für

das nichtelliptische Sphäroid $a = 20927197^f$, $b = 20855493^f$ und $\omega = 291{,}86$. Die Fläche weicht von dem osculirenden Ellipsoid nach aussen ab, so dass sie sich unter lat. 45° um 177^f5 oder 53^m95 darüber erhebt. Es ist also

$$\begin{aligned} a &= 6\,378552^m1 \\ b &= 6\,356697.3 \\ c &= \quad 21854.8 \\ \omega &= 291.86 \end{aligned}$$

(9) Clarke 1858

$$\begin{aligned} Q^0 &= 10\,019406^m, \quad M = 7421^m78 \\ Q &= 10\,002300\ , \quad G = 57021^T33 \\ R\ (\text{nahe}) &= 6\,171270^m. \end{aligned}$$

Mittelst der betreffenden Relation ergibt sich aus diesem nichtelliptischen für

das elliptische Rotationsellipsoid $a = 20926348^f$, $b = 20855233^f$, $\omega = 294.26$, oder

$$a = 6\,378293^{m}7$$
$$b = 6\,356618.0 \qquad (10)\ \text{Clarke}$$
$$c = \quad 21675.7 \qquad 1858$$
$$\omega = 294.26$$

$$Q^0 = 10\,019000^{m}, \quad M = 7421^{m}49$$
$$Q = 10\,001984\ , \quad G = 57019^{T}3$$
$$R = 6\,371060^{m}.$$

Wir bemerken noch, dass bei dieser Bestimmung durch die Aufnahme von 28 englischen Stationen, deren Polhöhen und Distanzen ihrer Parallelen allerdings aus der Trigulation der Ordnance Survey aufs Sorgfältigste festgelegt sind, die Westeuropäische Gruppe von Gradmessungen, und zwar speciell zu Gunsten des Britischen Areals, durch ein hervorragendes Stimmrecht begünstigt ist, wodurch die oben für diese Gruppe aufgeführte Zahl 78 auf 168 gesteigert wird.

Den ersten Versuch, die Erde durch ein Ellipsoid von drei ungleichen Axen darzustellen, hat General von Schubert gemacht*). Nach Aufstellung elliptischer Formeln, die bis zur dritten Potenz der Abplattung (sechste Potenz der Excentricität) gehen, werden der Rechnung folgende Gradmessungen zum Grund gelegt:

1. Russische, Amplitude $\lambda = 25^{0}20'$, Mittelbreite $\mu = 58^{0}0'$, Länge ψ (von Ferro) $= 44^{0}23'$.
2. zweite Ostind. $\lambda = 21^{0}21'$, $\mu = 18^{0}50'$, $\psi = 95^{0}20'$.
3. Französische, $\lambda = 12^{0}22'$, $\mu = 44^{0}51'$, $\psi = 20^{0}0'$.
4. Cap, $\lambda = 4^{0}37'$, $\mu = -32^{0}3'$, $\psi = 36^{0}9'$.

*) Mém. de l'Acad. Petersbourg, VII. Serie, T. I. 1859 Nr. 6. Essai d'une détermination de la veritable figure de la terre. — Monthly Notices of the Roy. Astr. Soc. vol. XX (1859) p. 104. (Anzeige von Airy).

5. Peru, $\lambda = 3^{0}7'$, $\mu = -1^{0}31'$, $\psi = 298^{0}44'$.
6. Preussische, $\lambda = 1^{0}30'$, $\mu = 54^{0}58'$, $\psi = 38^{0}10'$.
7. Englische, $\lambda = 2^{0}50'$, $\mu = 52^{0}2'$, $\psi = 17^{0}40'$.
8. Pensylvanien, $\lambda = 1^{0}29'$, $\mu = 39^{0}12'$, $\psi = 300^{0}10'$.

Diese acht Bogen, jeder bloss mit seinen beiden Endpunkten, werden — ähnlich wie bei der besprochenen Rechnung von Everest — zu zweien combinirt und dadurch 28 Ellipsoide gefunden, deren Elemente a, b, ω und Quadrat der Excentricität grosse Abweichungen unter einander darbieten. Ausser zwei ganz extrem kleinen Abplattungen, nämlich $\omega = 14501$ (Combination des Preussischen mit dem Russischen Bogen) und 12668 (Pensylv. mit Cap) variirt ω zwischen 116 (Engl. mit Preuss.) und 527 (Pensylv. mit Ostind.). Die Werthe von a variiren zwischen 1279419^{T} (Pensylv. mit Frankr.) und 3259832 (Pensylv. mit Cap), die Werthe von b zwischen 3273905 (Preuss. mit Russl.) und 3245754 (Engl. mit Preuss.).

Die Voraussetzung elliptischer Meridiane von gemeinsamer kleiner Axe wird nun gegenüber der offen gehaltenen Frage in Betreff ihrer Gleichheit festgehalten und zunächst, da die vorstehenden Combinationen sehr verschiedene Werthe für b geben, zur Bestimmung der Polaraxe nur die Vergleichung von Bogen desselben Meridians benutzt. Es werden zu diesem Zwecke die drei grösseren Bogen, der Russische, der Indische und der Französische, je in zwei nahezu gleiche Theile getheilt, bez. in den Stationen Dorpat, Damargida und Carcassonne, und alsdann für jeden aus drei Combinationen, nämlich der beiden Stücke unter sich und jedes Stückes mit dem Ganzen durch das arithmetische Mittel a, b

und ω bestimmt. Die drei Ergebnisse sind für den Bogen von

Russland	a=3272610,	b=3261429,	ω=292.674.
Ostindien	3272650,	3261547,	294.725.
Frankreich	3273448,	3260365,	250.199.

Die dritte Ellipse würde von der grossen Abweichung, die sie gegenüber der ersten und zweiten zeigt, durch die Annahme befreit, dass die Polhöhe des Theilungspunktes Carcassonne nahe 2 Secunden grösser sei, als sie die Messung ergibt. Dieser Abweichung wegen aber wird b nur aus den beiden ersten Ellipsen bestimmt, wobei v. Schubert Russland das doppelte Gewicht gibt. So findet er $b = 3261467^{T}9$, wonach sich die Länge des ganzen Russischen Bogens um $17^{T}62$ zu klein, des Indischen um 25.81 zu gross herausstellt, Grössen, welche geringfügig erscheinen, wenn sie in die entsprechenden Abweichungen der Amplitude, nämlich $-1''$ und $+1''5$, übersetzt werden. Mit dem so erhaltenen Werthe von b erhält man nun für den Meridian von Dorpat $a = 3272650{,}1$ und $\omega = 292.674$, so wie von Kaliana $a = 3272581.3$ und $\omega = 294\,725$. Zur Bestimmung des als elliptisch vorausgesetzten Aequators wird nun noch die Peruanische Messung zu Hülfe genommen, und für diesen Meridian aus derselben kleinen Axe gefunden $a = 3272382.8$, $\omega = 299.81$. Die so gefundenen, den geographischen Längen $44^{0}23'$, $95^{0}20'$ und $298^{0}44'$ entsprechenden Radien der äquatorialen Ellipse führen dann zur Kenntniss ihrer beiden Halbaxen a', a'' und der Zahl ω^{0}, welche die Annäherung an die Kreisform ausdrückt. Es findet sich $a' = 3272671.5$, $a'' = 3\,272303.2$ und die geogr. Länge

der grossen Axe des Aequators 58°44′, welche Längenbestimmung übrigens bei der geringen Ellipticität ziemlich unsicher ist. Es würde hiernach Archangel, Erzerum, der südliche Theil des Rothen Meeres und Mozambique, so wie der östliche Theil von Russisch Amerika nahezu auf dem grössten Meridian liegen, während der kleinste, zur Länge 148°44′ gehörig, durch das Lena-Delta, und Ostsibirien, durch die Mandschurei, das Japanische Meer und fast mitten durch Neuholland, so wie über Brasilien durch die Mündung des Amazonenstroms und die Westküste von Grönland über Godhaab verläuft. Wir finden also für dies Schubert'sche Ellipsoid

$$
\begin{aligned}
a' &= 6\,378555^{m}6 \\
a'' &= 6\,377837.4 \\
b &= 6\,356719.4 \\
c^0 &= 718.2 \\
c' &= 21836.2 \\
c'' &= 21118.0 \\
\omega^0 &= 8881.3 \\
\omega' &= 292.109 \\
\omega'' &= 302.004
\end{aligned}
$$

(11) v. Schubert 1859

$$Q^0 = 10018849^{m}, \quad M = 7421^{m}37$$
$$Q' = 10002263$$
$$Q'' = 10001707$$
$$R = 6\,371031^{m}.$$

Gegen die Annahme eines dreiaxigen Ellipsoides wie gegen den hier eingeschlagenen Weg des Calculs sind bereits mit Recht erhebliche Einwendungen gemacht worden*). Zudem kam

*) Vgl. namentlich die ausführliche Kritik des Schubert'schen Verfahrens in der sehr beachtenswerthen Schrift von Ph. Fischer: Untersuchungen über die Gestalt der Erde. Darmstadt 1868. S. 186.

v. Schubert nach zwei Jahren selbst wieder von der Idee eines Sphäroids von elliptischem Aequator zurück.

Gleichwohl hat dieser Versuch den Capt. Clarke*) veranlasst ein dreiaxiges Ellipsoid in vorwurfsfreierem Wege der Berechnung, nämlich ganz dem auf die Methode der kleinsten Quadrate gegründeten Verfahren entsprechend, welches er bei der Bestimmung der bereits besprochenen Rotations-Sphäroide eingeschlagen hat.

Clarke benutzt, wie v. Schubert, die drei grossen Bogen, den Russischen von Staronekrassofka bis Fuglenaes, Ampl. 25°20′ und 13 Stationen, den Französisch-Englischen und zwar in seiner ganzen Ausdehnung von Formentera bis Saxavord, 22°10′ mit 12 Stationen, und den Indischen von Punnae bis Kaliana, 21°21′ mit 8 Stationen, ferner den Bogen am Cap, 4°37′ mit 5 Stationen und den Peruanischen mit 3°7′ Amplitude und 2 Stationen, lässt aber die Preussische Messung wegen der Kürze des Bogens und die Pensylvanische wegen notorischer Mängel weg, die sich auch in v. Schubert's Zahlen offenbart haben. Die Berücksichtigung der dritten Potenz der Abplattung (oder einer kleinen Grösse gleicher Ordnung) erscheint völlig überflüssig, insofern in dem Ausdruck für den elliptischen Bogen das von der dritten Potenz abhängige Glied bei dem Russischen Bogen, dem grössten von allen, sich nur auf etwa $1\frac{1}{2}$ Zoll beläuft, während der wahrscheinliche Fehler in der Länge von 1447787 Toisen $\pm$ 7 Toisen beträgt.

*) On the Figure of the Earth, by Capt. A. R. Clarke, read April 8. 1860, in Memoirs of the Royal Astronomical Society, vol. XXIV. London 1861 p. 2, und Monthly Notices of the R. Astr. Soc. vol. XX. p. 264.

Die Rechnung ergibt nun für die drei Halbaxen $a' = 20926485^f$, $a'' = 20921177^f$, $b = 20853768^f$, so dass der grösste Radius des Aequators auf die geogr. Länge $13^0 58'$ östl. von Greenwich, der kleinste also auf $103^0 58'$ fällt, mithin 27^0 weiter nach Westen als nach dem Schubert'schen Resultat, was indess bei der geringen Ellipticität des Aequators nicht befremden darf. Wir finden also für dieses Ellipsoid

$$\begin{aligned} a' &= 6\,378335^m4 \\ a'' &= 6\,376717.6 \\ b &= 6\,356171.5 \\ c^0 &= 1617.8 \\ c' &= 22163.9 \\ c'' &= 20546.1 \\ \omega^0 &= 3942.6 \\ \omega' &= 287.779 \\ \omega'' &= 310.364 \end{aligned}$$

(12) Clarke 1861

$Q^0 = 10\,017791^m$, $M = 7420^m59$
$Q' = 10\,001663$
$Q'' = 10\,000391$
$R = 6\,370400^m$.

Der grösste Meridian liefe hiernach über Spitzbergen durch Skandinavien über Kopenhagen, durch Deutschland über Leipzig, durch Italien über Venedig und Rom, durch das mittelländische Meer, über Tripolis durch Afrika, 7 Grad westlich vom Cap in das Südpolarmeer, sodann durch den pacifischen Ocean über die Schiffer- und Fuchsinseln durch die Beringsstrasse, der kleinste durch das Asiatische Nordcap, durch Sibirien über Irkutzk, durch die Mongolei, zwischen Tübet und China durch Hinterindien, über Malacca und Sumatra durch den Indischen Ocean, sodann durch den Pacific in der Nähe und längs

der Westküste Südamerikas über Ecuador, Panama, Jamaica, Cuba, durch Nordamerika über Washington, durch Canada und die Baffinsbay.

Die Umgestaltung in ein Sphäroid mit kreisförmigem Aequator ergibt $\omega = 294.754$ und $a = 20926217^{f}$, $b = 20855221$, oder

$$\begin{aligned} a &= 6\,378253^{m}6 \\ b &= 6\,356614.4 \\ c &= \quad 21639.2 \\ \omega &= 294.754 \end{aligned} \qquad \begin{matrix} (13)\ \text{Clarke} \\ 1861 \end{matrix}$$

$$Q^{0} = 10018936^{m}, \quad M = 7421^{m}43$$
$$Q = 10001949\ , \quad G = 57018^{T}97$$
$$R = 6\,371032^{m}.$$

Dieses Sphäroid kommt nahe mit dem von Clarke berechneten Rotations-Ellipsoid überein, welches in »Principal Triangulation« p. 773 mitgetheilt und oben bereits unter (10) aufgeführt ist. Es beruht nahe auf denselben Gradmessungen wie jenes, nur dass hier die englische nicht wie dort mit 28, sondern mit 6 Stationen neben 6 Stationen des Französischen Antheils des Französisch-Englischen Bogens eingeführt ist.

v. Schubert, wie bereits erwähnt, kam im Jahr 1861 selbst wieder von der Idee eines dreiaxigen Sphäroids zurück, und berechnet*) ein neues Ellipsoid wiederum mit kreisförmigem Aequator. Es werden zu diesem Behuf nur drei grosse Gradmessungen zum Grunde gelegt, nämlich die Russische, erstlich ganz und sodann getheilt bei der Station Dorpat, so dass diese Messung mit den drei Amplituden $25^{0}20'$, $12^{0}17'$ und $13^{0}3'$ also mit grossem Uebergewicht concurrirt, dabei wird an der Polhöhe des nördlich-

*) Astr. Nachr. Bd. 55 (1861) Nr. 1308.

sten Punktes Fuglenaes wegen Localattraction eine Correction von — 3″ angebracht nach einer sehr arbiträren Schätzung. Ferner wird der ganze Englische Bogen von Dunnose bis Saxavord, mit $10^{0}13'$ und den bekannten 6 Stationen, sowie die Französische Messung von Formentera bis Dünkirchen mit $12^{0}22'$ und 5 Stationen (Barcelona und Evaux bei Seite lassend) hinzugenommen. Bei letzterer werden noch einige Verbesserungen nach der 3. Ausgabe der Géodésie von Puissant vorgenommen. Nach unserm obigen Modus der Schätzung der Stimmenvertheilung würde jetzt der Russischen Messung das Gewicht von 455.3 (statt 304.0) und der Französisch-Englischen Messung durch ihre Trennung in die beiden ehemaligen Antheile die Gewichte 51.0 und 49.5 zusammen 100.5 (statt 149.4) zufallen, so dass nach dem oben aufgestellten Massstab auf Osteuropa jetzt 147 statt 102, auf Westeuropa jetzt 33 statt 78 fallen würde, und somit Russland mit $4^{1}/_{2}$fachem Gewichte von England-Frankreich ausgestattet erscheint. Dies Verhältniss äussert sich jedoch nur in modificirter Weise in Folge des auch diesmal eingeschlagenen Weges der Combinationen zu Zwei, welcher eine Mitwirkung der 28 Zwischenpunkte der fünf bei den Combinationen betheiligten Bogen ausschliesst. Nach der nur an der einzigen Station Fuglenaes vorgenommenen Abänderung der Polhöhe aber sind die Elemente ω, a, b, welche die zehn Combinationen ergeben, in überraschender Weise harmonirend, so dass ω nur zwischen 282.697 und 283.237, a zwischen 3272665.5 und 3272668.6, b zwischen 3261089.2 und 3261112.9 variirt. Das einfache Mittel ergibt $\omega = 283.032$, $a = 3272667^{T}1$, $b = 3261104^{T}3$, oder

$$a = 6\,378547^{m}0 \qquad (14)$$
$$b = 6\,356010.7 \qquad \text{v. Schubert}$$
$$c = 22536.3 \qquad 1861$$
$$\omega = 283.032$$
$$Q^{0} = 10\,019400^{m}, \quad M = 7421^{m}78$$
$$Q = 10\,001708\ , \quad G = 57018^{T}0$$
$$R = 6\,371026^{m}.$$

Wäre gegen den Modus der Vertheilung in der Beitrags-Rate der beiden Europäischen Hauptmessungen so wie gegen die Handhabung der Zahlen nicht auch hier manches Triftige einzuwenden*), so würde dies Ellipsoid, welches unter Ausschluss der ganzen Ostindischen Messung berechnet worden, einen lehrreichen Beitrag zu der Einsicht in die Wirkung liefern, welche wenigstens nach zeitheriger Berechnungsmethode die Messung in Indien, einem Terrain von so eigenthümlicher Natur, auf die gewonnenen Resultate ausübt. Wir halten dies Sphäroid für einen angenäherten Ausdruck der Gestaltung der Meeresfläche oder des Geoids vorzugsweise in der östlichen Region von Europa.

Kleine Verbesserungen in den Polhöhen der Russischen Stationen, die nach der Publication der »Principal Triangulation« bekannt geworden sind, wurden von Capt. Clarke benutzt, das oben unter (10) aufgeführte Sphäroid zu berichtigen**). Die Aenderungen sind nur gering; es

*) Vgl. Fischer a. a. O.

**) Extension of the Triangulation of the Ordnance Survey into France and Belgium, by Colonel Sir Henry James. London 1863. — Die oben aufgeführten ersten Werthe von a und b finden sich als Ergebnis der Rechnung auf p. 52, die um 1 engl. Fuss grösseren abgerundeten in der Introduction pag. III, und von den letzteren wird nachgehends noch weiterer Gebrauch gemacht.

fand sich $a = 20926329$ oder abgerundet 20926330 und $b = 20855239$ oder rund 20855240^f, $\omega = 294.36$. Es ist also

$$\begin{aligned} a &= 6\,378288^m2 \\ b &= 6\,356620.1 \\ c &= \quad 21668.1 \\ \omega &= 294.36 \end{aligned}$$

(15) Clarke 1863

$$\begin{aligned} Q^0 &= 10018913^m, \quad M = 7421^m47 \\ Q &= 10001902\ , \quad G = 57019^T1 \\ R &= 6\,371057^m. \end{aligned}$$

Dies Sphäroid ist also sehr nahe dem obigen (10) gleich und theilt mit ihm das der Englisch-Französischen Messung, in welcher England mit 28 Stationen aufgenommen ist, eingeräumte, im Verhältniss von 168 : 78 erhöhte Stimmrecht.

John Henry Pratt, Archidiaconus zu Calcutta, hat sich seit einer Reihe von Jahren mit ausführlichen Untersuchungen über die sogenannten Deflexionen oder Ablenkungen der Lothlinie beschäftigt und dieselben in den Philosophical Transactions*) mitgetheilt. Er berechnet namentlich für die 4 Hauptstationen Punnae, Damargida, Kalianpur und Kaliana der grossen Indischen Messung Ablenkungen nach Norden von bezw. 22″21, 17″23, 21″06 und 34″16, freilich nicht ohne öftere Aenderung in den Unterstellungen der Rechnung. Die daraus hervorgehenden Aenderungen in den Amplituden der von jenen Stationen begrenzten 3 Bogen

*) Phil. Tr. for 1855 p. 53, for 1856 p. 31, for 1858 p. 787, for 1859 p. 745, 779, for 1861 p. 579, sowie die betreffenden Notizen in den Proceedings of the Roy. Society, und J. H. Pratt a treatise on attractions, Laplace's functions, and the figure of the Earth. 3. edit. Cambridge and London 1865.

sind + 4″98, — 3″82 und — 13″11. Sie sind das Ergebniss der Berechnung einerseits der Attractionswirkung der Gebirgsmassen des Himalaya und des daran stossenden Tafellandes, andererseits der negativen Wirkung des indischen Oceans. Es ist dies der Anfang zur Beseitigung erheblicher Zweifel und Schwierigkeiten, welche die grosse Ostindische Messung zeither durch die aus der hervorgehenden Rechnung sogenannten Fehler der Polhöhen veranlasste, die gegenüber den zuerwartenden Anomalien in der Richtung der Schwere unbedeutend waren.

Um die Gestalt der Erde unter Berücksichtigung der Deflexionen der Lothlinie zu bestimmen, nimmt Pratt die drei grossen Messungen, die Englisch-Französische, die Russische und die Indische so in Rechnung, dass der Betrag der Ablenkung im ganzen Bogen jeder der drei Messungen als eine unbekannte Grösse betrachtet wird, welche so zu bestimmen ist, dass die 3 mit ihr behafteten Bogen möglichst nahe derselben Meridian-Ellipse entsprechen. Die Forderung der Gleichheit der Halbaxen der 3 Ellipsen führt auf 4 Bedingungsgleichungen der 3 Deflexionen, woraus nach der Methode der kleinsten Quadrate diese Deflexionen bestimmt werden: für den Englisch-Französischen Bogen — 1″37, für den Russischen — 2″22 und für den indischen — 0″033, welche nach Einführung in die Ausdrücke für die jedem Bogen entsprechenden Halbaxen, folgende Werthe der Reihe nach ergeben*)

---

*) Die Rechnung ist mitgetheilt in Proceed. Roy. Soc. vol. XIII p. 255 und im Resumé in dem angeführten treatise art. 134.

$a_1 = 20\,926029^f$ $b_1 = 20\,855264^f$
$a_2 = 20\,926468$ $b_2 = 20\,855332$
$a_3 = 20\,926072$ $b_3 = 20\,855352$

Die Annäherung wird für hinreichend gehalten, um das arithmetische Mittel als den wahren Werth der Halbaxen des Erdsphäroids betrachten zu dürfen. So findet sich $a = 20926189^f$, $b = 20855316^f$, $\omega = 295.3$, also

$a = 6\,378245^m2$ (16) Pratt
$b = 6\,356643.3$ 1863
$c = 21601.9$
$\omega = 295.263$
$Q^0 = 10018922^m$, $M = 7421^m42$
$Q = 10001924$, $G = 57018^T5$
$R = 6\,371036^m$.

So bedeutsam im gegenwärtigen Stadium der Untersuchungen über die Gestalt der Erde die Anomalien der Schwere sind, so möchte doch der hier von Pratt betretene Weg wenig Beifall finden. Durch keine Rechnung dürfen fortan diese Anomalien, welche mit dem wesentlichen Unterschied zwischen Geoid und Sphäroid in engem Zusammenhang stehen, Beobachtungsfehlern gleich, auf ein Minimum gebracht werden, vielmehr müssen sie unter Zugrundlegung eines plausibelen, vorerst nothwendigerweise als provisorisch zu betrachtenden Sphäroids, nach Vorschriften, wie sie gegenwärtig bereits mehrfach in Anwendung gebracht sind, an dsr Hand topographischer und geologischer Daten so weit bestimmt werden, als sichtbare Ursachen, wie Terrainbeschaffenheit und Seetiefen, gestatten, um vorläufige Amplitud-Correctionen zu gewinnen, durch welche wir schrittweise von der geoi-

dischen Fläche zu dem bei jedem Schritte von neuem genauer bestimmbaren Sphäroide überzugehen vermögen.

Die sorgfältigsten Vergleichungen der wichtigsten bei geodätischen Arbeiten benutzten Masse sind neuerdings im K. Grossbritanischen Vermessungsamte vorgenommen und ihre Resultate so wie deren Ableitungen aus den Beobachtungen veröffentlicht*). Auf Grund dieser sorgfältigen Massvergleichungen sind die Bogenlängen der Gradmessungen auf Englische Standard Feet reducirt und von Clarke**) einer neuen Berechnung des Erdsphäroids zum Grunde gelegt worden, für welches er noch einmal die eventuell elliptische Gestalt des Aequators einführte, um auch diesmal von dem dreiaxigen Ellipsoid nachgehends das aus ihm ableitbare plausibelste Rotationsellipsoid zu bestimmen. Die Berechnungsmethode ist die bisherige Besselsche. Bei der Wahl der Messungen sind nur Bögen über 3 Grad Länge aufgenommen, und folgeweise die Schwedische, die ältere Ostindische, und die drei mitteleuropäischen Messungen nicht hinzugezogen. Die aufgenommenen Gradmessungen sind also 1. die Englisch-Französische mit 12°10′ und 12 Stationen (von Fermentera bis Saxavord unter Beseitigung von Evaux), 2. die Indische mit 21°21′ und 8 Stationen (von Punnae bis Kaliana), 3. die Russische mit 25°20′ und 13 Stationen (von Staro Nekrassofka bis Fuglenaes),

*) Comparisons of the Standards of Length of England, France, Belgium, Prussia, India, Australia, made at the Ordnance Survey Office, Southampton, by Captain A. R. Clarke under the direction of Colonel Sir Henry James. London 1866.

**) In einem Appendix zu dem angeführten Werke »Comparisons« pag. 281—287.

4. vom Cap mit 4°37′ und 5 Stationen (Nord End bis Cape Point). 5. Die Peruanische mit 3°7′ und 2 Stationen (Tarqui und Cotchesqui). Das Stimmverhältniss, nach unseren früheren Zahlen bemessen, wird hier durch 78, 47, 201, 6 und 4 ausgedrückt und den weggelassenen kleinen Bogen entspricht in Summa die Ziffer 5. Man vermisst ungern die mitteleuropäische Gruppe mit vereinigtem Hannoversch-Dänischem Bogen.

Das Ergebniss ist folgendes dreiaxige Ellipsoid*) $a' = 20926350^f$, $a'' = 20919972$, $b = 20853429$ und somit

a'	$= 6\,378294^m0$	
a''	$= 6\,376350.4$	
b	$= 6\,356068.1$	
c^0	$= 1943.6$	(17) Clarke
c'	$= 22225.9$	1866
c''	$= 20282.3$	
ω^0	$= 3281.2$	
ω'	$= 286.976$	
ω''	$= 314.385$	

*) Die in »Comparisons« p. 285 aufgeführten Werthe der drei Abplattungsbeträge sind in der Form gegeben

$$\frac{a-c}{c} = \frac{1}{285.97'} \quad \frac{b-c}{c} = \frac{1}{313.38'} \quad \frac{a-b}{c} = \frac{1}{3269.5}$$

wo a, b, c die von uns mit a', a'', b bezeichneten Halbaxen sind, während die Reciproken unserer Abplattungsziffern, wie gewöhnlich, die Ellipticität nach der grösseren Halbaxe bemessen. Setzt man die Reciproke der durch die halbe Polaraxe dividirten Differenzen der Halbaxen $= \theta'$, θ'', θ^0 (wo also im vorliegenden Fall $\theta' = 285.97$, $\theta'' = 313.38$, $\theta^0 = 3269.5$), so findet man

$$\omega^0 = \theta^0 + \frac{\theta''}{\theta'' - \theta'}, \quad \omega' = \theta' + 1, \quad \omega'' = \theta'' + 1.$$

$$Q^0 = 10\,017475^m, \quad M = 7420^m35$$
$$Q' = 10\,001553$$
$$Q'' = 10\,000013$$
$$R = 6\,370228^m.$$

Der Aequator dieses Ellipsoids ist noch merklicher elliptisch als bei Clarke's Ellipsoid (12) vom Jahre 1861, während bei dem ersten derartigen Sphäroid (11) v. Schubert's die Ellipticität des Aequators sehr gering war. Der grösste Meridian fällt jetzt in die Länge 15° 34′ östlich von Greenwich, der kleinste 105° 34′. Diese Extreme liegen also nur $1^1/_2$ Grad östlicher als in (12), haben also noch im Wesentlichen den dort näher bezeichneten Verlauf über Meer und Continente.

Die Beseitigung der von der geogr. Länge abhängigen Ungleichheit der Ellipticität der Meridiane führt auf das den untergelegten Daten am genauesten entsprechende Rotations-Ellipsoid. Der sog. wahrscheinliche Polhöhen-Fehler (im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate) zeigt sich durch die Forderung, dass alle Meridiane gleich ausfallen sollen, gegenüber dem vorigen Ellipsoid, wo die Ungleichheit derselben nach Massgabe eines elliptischen Aequators zulässig war, nur im Verhältniss etwa von 15 zu 14 vergrössert, und beträgt in beiden Fällen weniger als 1″5. Die Dimensionen dieses Sphäroids sind $a = 20\,926062^l$, $b = 20\,855121$, $\omega = 294.98$ oder

$$a = 6\,378206^m4$$
$$b = 6\,356583.8 \qquad \text{(18) Clarke}$$
$$c = \quad 21622.6 \qquad\qquad 1866$$
$$\omega = 294.979$$
$$Q^0 = 10\,018862^m, \quad M = 7421^m37$$

$$Q = 10001887^{m}, \quad G = 57019^{T}0$$
$$R = 6370990^{m}.$$

Den letzten in unserer Reihe, aber nicht minder bedeutsamen Beitrag zur Bestimmung des Sphäroids hat Ph. Fischer in seinen wichtigen »Untersuchungen über die Gestalt der Erde, 1868« geliefert. Der eingeschlagene Weg ist dem bisher betretenen gegenüber gewissermassen ein synthetischer, der mit dem Stadium, in welches unsere Frage erst gegenwärtig mit kaum hinreichend klarem Bewusstsein überzugehen im Begriff steht, auf's engste zusammenhängt. Wir werden in den Schlussbemerkungen dieser kurzen Darlegung auf diesen Punkt umständlicher zurückkommen und deuten hier nur kurz die Hauptschritte an, durch welche Fischer zu den numerischen Elementen seines Sphäroids gelangt.

Die Abplattungsziffer ω wird aus den umständlich discutirten Ergebnissen der Pendelmessungen entnommen und für ihren Werth 288.5 angesetzt, indem unter den verschiedenen durch Berechnung der bisherigen Pendelbeobachtungen von Ed. Schmidt, Baily, Borenius und Paucker gefundenen Abplattungen dem Paucker'schen Resultat der Vorzug gegeben wird. Ausser der Ziffer ω, welche nur die Gestalt des gesuchten Sphäroids feststellt, ist noch ein die Grösse desselben bestimmendes Element erforderlich, das nur an der Hand der Gradmessungen gefunden werden kann. Es wird hierzu die Englisch-Französische Messung in ihrer jetzigen Ausdehnung von Formentera bis Saxavord gewählt, um unter Benutzung der 6 französischen und 12, aus den früher erwähnten 28 passend ausgewählten englischen Stationen durch Combination zu zwei 31 Bogen, sämmtlich über 10 Grad Länge,

zu bilden. Diese Zahl hätte grösser ausfallen können, wenn die Französische Messung mehr astronomisch bestimmte Zwischenpunkte besässe, zudem musste auf Evaux verzichtet werden. Diese Bogen mit ihrer Mitte nur wenig von 45° lat. entfernt liefern für G Werthe, welche nach ihrer Grösse geordnet eine gegen die Mitte der Reihe grössere Frequenz kleinerer Differenzen zeigt, welche angenähert den Habitus von Beobachtungsfehlern*) bekunden. Diese Mitte stellt mit hinreichender Deutlichkeit den gesuchten Werth heraus, nämlich $G = 57017.8$ oder abgerundet $= 57018^{T}$.

Aus $\omega = 288.5$ und $G = 57018^{T}$ findet sich nun $a = 3\,272560^{T}$ und $b = 3\,261320^{T}$, oder

---

*) Diese Differenzen sind ihrer Natur nach zum einen Theil Beobachtungsfehler, zum andern Theil Abweichungen die aus den im Meridian wirksamen Abweichungen der Amplituden erwachsen, welche selbst aus den Differenzen der betreffenden Polhöhen der Endpunkte jedes Bogens hervorgehen, sofern diese Polhöhen mit den localen Deflexionen der Lothlinie behaftet sind. — Den gesuchten Werth von G betreffend könnte man versuchsweise aus der (nach der Grösse geordneten) Reihe für die untergelegte Abplattungsziffer 288.5 einen mittleren Theil von Nummer 8 bis 28, in welchen G nur zwischen 16 und 20 variirt (hierunter den Zusatz zu 57000 im Betrag von G verstanden) herausheben. Unter diesen 21 sind 4 enthalten, Nummer 10, 15, 26 und 27, in deren Bogen die Mittelbreite sich über 5 Grad nördlich von 45° lat. entfernt. Die 17 übrigen geben im arithmetischen Mittel 17.60, die 21 (incl. der besagten vier) geben 17.68, alle 41 endlich 18.07, so dass sich auch auf diese Weise der von Fischer gewählte runde Werth 18.0 hinreichend rechtfertigt. Gleichwohl dürfte die in Zukunft genauer zu berücksichtigende Höhe der Meeresfläche über dem Sphäroid in der continentalen Region zwischen den Balearen und den Shetlands-Inseln diesen Werth noch um 8 bis 9 Toisen verringern.

$$
\begin{aligned}
a &= 6\,378338^{m}3 \\
b &= 6\,356229.6 \qquad (19)\ \text{Fischer} \\
c &= \quad 22108.7 \qquad\qquad 1868 \\
\omega &= 288.50 \\
Q^{0} &= 10\,019069^{m}7, \quad M = 7421^{m}53 \\
Q &= 10\,001713.7, \quad G = 57018^{T}0 \\
R &= 6\,370960^{m}.
\end{aligned}
$$

Bevor wir eine Auslese aus den im Vorherigen besprochenen Gestalten des terrestrischen Sphäroids in übersichtlicher Zusammenstellung vorführen, möge in letzter Stelle dieser Reihe noch diejenige Gestalt des Sphäroids einen Platz finden, welche wir in bloss conjectureller Weise als »Typus« zur Vergleichung der zeitherigen wie der künftigen Sphäroidformen empfehlen möchten — selbst auf die Gefahr hin, dass der erste Eindruck eines als Bild der regelmässigen allgemeinen Gestalt der Erde aufgestellten Rotationsellipsoides, welches zwar weniger in seiner Form, viel mehr dagegen in seiner Grösse von den seit etwa vierzig Jahren durch sorgsame Rechnungen ermittelten Sphäroiden so wesentlich abweicht, gegenwärtig noch erhebliche Bedenken hervorrufen sollte.

Wir stellen für dieses typische Sphäroid folgende Elemente auf:

$$
\begin{aligned}
a &= 6\,377365^{m}0 \\
b &= 6\,355298.0 \qquad (20) \\
c &= \quad 22067.0 \\
\omega &= 289.00 \\
Q^{0} &= 10\,017542^{m}, \quad M = 7420^{m}40 \\
Q &= 10\,000218\ , \quad G = 57009^{T}47 \\
R &= 6\,370000^{m}.
\end{aligned}
$$

Dieses Ellipsoid weicht im Werthe R, dem

geometrischen Mittel der drei Halbaxen, gegen das Bessel'sche Ellipsoid (5) um $\frac{1}{22509}$ gegen das Clarke'sche (10) um $\frac{1}{6009}$, gegen das Clarke'sche (18) um $\frac{1}{6434}$, und gegen das von Fischer (19) um $\frac{1}{6635}$ in Minus ab.

In der nachstehenden Uebersicht stellen wir eine Anzahl der wichtigeren Bestimmungen des Erd-Sphäroids zusammen, wobei wir aus unserer im Bisherigen enthaltenen Aufzählung die von Everest (6), die beiden von Schubert (11) und (14), sowie die vier von Clarke (7), (9), (12) und (17) aus Gründen, die aus dem Bisherigen unschwer zu entnehmen sind, füglich übergehen können.

Kürze halber führen wir ausser den beiden Halbaxen a und b der Sphäroide und der Abplattungsziffer ω nur die lineare Abplattung $c = a - b$, den mittleren Radius $R = \sqrt[5]{(aaab)}$, den Werth M der geographischen Meile, sowie den in Toisen gemessenen 90ten Theil G des Meridianquadranten Q auf.

Uebersicht der wichtigeren seitherigen Bestimmungen des Erd-Sphäroids.

		a	b	c	ω	R	M	G
1800 Delambre	(1)	6 375653^m	6 356564^m	19089^m	334	6 369284^m	7418^{m}51	57008^{T}23
1819 Walbeck	(2)	6 376896	6 355833.	21062	302.781	6 369868	7419.85	57009.75
1830 Schmidt	(3)	6 376945.4	6 355520.9	21424.5	297.648	6 369796	7419.91	57008.58
1830 Airy	(4)	6 377490.5	6 356184.3	21306.0	299 33	6 370380	7420.55	57013.73
1841 Bessel	(5)	6 377397.16	6 356078.96	21318.20	299.153	6 370283	7420.44	57013.11
1856 Clarke	(8)	6 377935.8	6 356521.0	21413.8	297.72	6 370790	7421.06	57017.5
1858 Clarke	(10)	6 378293.7	6 356618.0	21675.7	294.26	6 371060	7421.49	57019.3
1861 Clarke	(13)	6 378253.6	6 356614.4	21639.2	294.754	6 371032	7421.43	57018.97
1863 Clarke	(15)	6 378288.2	6 356620.1	21668.1	294.36	6 371057	7421.47	57019.1
1863 Pratt	(16)	6 378245.2	6 356643.3	21601.9	295.26	6 371036	7421.42	57018.5
1866 Clarke	(18)	6 378206.4	6 356583.8	21622.6	294.979	6 370990	7421.37	57019.0
1868 Fischer	(19)	6 378338.3	6 356229.6	22108.7	288.50	6 370960	7421.53	57018.00
1872 (L.)	(20)	(6 377365.0)	(6 355298.0)	(22067.0)	(289.00)	(6 370000)	(7420.40)	(57009.47)

Ein Blick auf diese Ziffern genügt wahrzunehmen, wie wir im Verlauf unserer Kenntniss der Gestalt und Grösse des Erdkörpers binnen etwa 60 Jahren im Ganzen der Erde allmälig eine stärkere Abplattung und allmälig grössere Dimensionen beimassen.

Die Abplattung betreffend, so dürfen wir für 1810 etwa die von Delambre (Base du Syst. Métr. III. p. 286) berechnete Ziffer 308.6 annehmen, welche, wie bereits früher gelegentlich erwähnt, seitdem in Frankreich und einigen andern Ländern officielle Aufnahme gefunden, während die obige für 1800 angeführte Zahl 334, welche schon damals als zu gross galt, nur durch ihre Verknüpfung mit demjenigen Sphäroid, aus dessen Meridian das Meter abgeleitet worden, eine gewisse Geltung behält. Andererseits kann aus den Clarke'schen Bestimmungen (13) und (15) für 1862 etwa die Ziffer 294.5 entnommen werden, wonach in der That binnen einem halben Jahrhundert ω um 14 Einheiten abgenommen, und somit die Abplattung nahe 5 Procent zugenommen, sofern die Abplattungen für die Ziffern 308.6, 294.5 und 189.0 sich verhalten wie 93.5 : 98.1 : 100. Der Ziffer 334 würde hiernach 86.5 entsprechen, und die volle Aenderung zwischen den auf 1800 und 1870 fallenden Extremen würde somit in ω sich auf 45 Einheiten, in der Abplattung auf 14 Procent herausstellen.

Die Grösse des Erdkörpers aber, wie sich aus den allmälig steigenden Werthen von R ergibt, hat gleichzeitig einen erheblichen Zuwachs erfahren. Der mittlere Radius hat von Beginn des Jahrhunderts bis zum Jahre 1860 etwa $1\frac{3}{4}$ Kilometer zugenommen, also nahe um den 3600ten Theil, welches einer Volumvergrösserung um

$\frac{1}{1200}$ des Ganzen, d. i. mindestens $2\frac{1}{3}$ Millionen Cubik-Meilen entspricht*). Was die beiden Halbaxen a und b betrifft, so zeigen sie wegen der gleichzeitigen Zunahme von Grösse und Abplattung wesentlich ungleiche Veränderungen. Man darf den Zuwachs von a binnen 50 Jahren auf rund 2 Kilometer, von b auf 425 Meter, jenen also auf den 3190ten Theil des Ganzen, diesen auf den 15000ten Theil schätzen. In den vier Bestimmungen (10), (13), (15), (16) aus der Zeit 1858 bis 1863 gibt sich eine Art stationären Werthes von a, b, ω und R zu erkennen, der sich auch in c sowohl als in M und G kund gibt, und von hier ab stellen die beiden neueren (18), (19) den Beginn einer Umkehr dar, die sich indess nur auf die Veränderung der Grösse des Sphäroids erstreckt, welche eine geringe Abnahme erfährt. Die Abplattung aber, bei (18) noch wesentlich dem vorigen Stadium angehörig, setzt bei (19) die zeitherige Zunahme und zwar um einen grossen Schritt fort. Die Wirkung hiervon auf a und b ist nunmehr, dass beide in (18) ebenmässig eine geringe Abnahme, in (19) dagegen entgegengesetzte Veränderungen erfahren, indem a wiederum ein Geringes zu-

*) Die Wassermasse, welche durch Ebbe und Fluth binnen 24 Stunden von Ost nach West um die Erde durch alle Meridiane bewegt wird, kann auf 350 Cubik-Meilen veranschlagt werden, ein Volumen, welches man überraschend gross finden mag in Betracht der Kleinheit der Ursache, welche die Bewegung hervorbringt. Und doch wäre dies Quantum erst der 6300te Theil jener $2\frac{1}{3}$ Millionen Cubikmeilen. Eine Wassermenge von diesem Volumen als gleichförmig bedeckende Schicht zur Erde hinzugefügt, würde Berge von der Höhe etwa des Rigi unter Wasser setzen.

nimmt, b dagegen eine desto erheblichere Verringerung erleidet.

Fast möchte man sich bei diesem Stand der Dinge zu der Frage aufgefordert fühlen: hat sich die Erde in diesem kurzen Zeitraum, in welchem wir ihre Gestalt und Grösse mit allmälig vollkommneren Mitteln zu erforschen uns bemüht haben, vielleicht physisch in ähnlichem Sinne verändert? Und dennoch möchte heutzutage schwerlich Jemand wagen, die wenn auch an sich berechtigte Frage zu bejahen; vielmehr müssen wir aus den Wandlungen in den numerischen Ausdrücken für die regelmässige allgemeine Form des Erdkörpers entnehmen, dass unsere Feststellungen leider noch der angestrebten Sicherheit*) ermangeln und des Vertrauens

---

*) Hält man sich aus der Zeit von 1840 bis 1870 an die Bestimmungen (5) von Bessel, (10) und (18) von Clarke, nebst (19) von Fischer, so stellt sich in Bezug lediglich auf die Grösse des Sphäroids der Durchschnitt von R auf 6 370823^m und die wahrscheinliche Unsicherheit in dieser Bestimmung (nämlich die mit 0.6745 multiplicirte Quadratwurzel aus der durch 3 dividirten Summe der Quadrate der 4 Abweichungen von dem Mittel) auf $\pm$ 242^m, während der Calcül bei einzelnen Bestimmungen z. B. von (5) $\pm$ 214^m, von (9) $\pm$ 104^m, von (10) $\pm$ 61^m ergeben hatte. Wie labil aber diese Abwägungen je nach der Wahl der dabei zu Rath gezogenen Sphäroide sind, kann daraus abgenommen werden, dass unter Benutzung der 8 Ellipsoide (5), (8), (10), (13), (15), (16), (18), (19) statt der vorigen 4 die wahrscheinliche Unsicherheit sich zwar auf $\pm$ 178^m, das Mittel dagegen auf 6370901^m, also um 78^m höher stellt. Und im Hinblick auf den von uns aufgestellten Typus (20) dürfen wir kaum behaupten, den mittleren Halbmesser der Erde bis auf den 7000ten Theil, d. h. bis auf etwa 910^m genau zu kennen! Die Aenderung von R um 1 Meter ändert die Erdoberfläche um 2,9 Quadratmeilen (etwa die Grösse des Fürstenthums Liechtenstein). Die Unsicherheit in unserer Kenntniss des Areals der Oberfläche der Erde

entbehren, welches wir einzelnen aus der Reihe dieser Bestimmungen mitunter geraume Zeit hindurch geschenkt haben.

Die zeither vorzugsweise auf diese Ermittelungen angewandte Methode der kleinsten Quadrate hat die Discordanzen zwischen Polhöhen oder Amplituden, wie sie auf der Meeres- oder Geoidfläche gemessen und für das Ellipsoid berechnet wurden, nach Art blosser Beobachtungsfehler behandelt und durch das Ausgleichungsgeschäft Anomalien in der Richtung der Schwere von wesentlich physischer Natur häufig auf unbedeutende Beträge herabgemindert. Jetzt wo für die Einsicht in die Bedeutsamkeit der freilich längst als vorhanden erkannten Localablenkungen der Lothlinie, namentlich durch die Arbeiten von Pratt und durch Fischer's kritische Untersuchung, neue Grundlagen erworben sind, ist es an der Zeit, jene Discordanzen als in die Kategorie constanter Fehler fallend zu betrachten, über welche die Methode der kleinsten Quadrate nicht verfügen kann, während sie hinsichtlich der daneben übrigbleibenden unvermeidlichen Beobachtungsfehler ihre volle Anwendbarkeit behält. Die Untersuchung muss in dem neuen Stadium, zu welchem unsere Frage gediehen, neue Wege betreten.

Die geoidische oder Meeresfläche ist es, welcher die Messungen auf der Erde folgen, in dem wir sie, wie auch die Pendelmessungen, auf dieselbe beziehen oder zurückführen; auf ihr also fussen zunächst die aus den Messungen hervorgehenden Daten. Aus diesen Daten soll nun das regelmässige Sphäroid hergeleitet werden,

---

beläuft sich zur Zeit noch auf den fünffachen Flächeninhalt der Insel Sicilien.

welches sich am genauesten der geoidischen Fläche anschliesst. Die Unregelmässigkeiten des Geoids, durch welche dasselbe in kleinen sowohl als weitausgedehnten Erstreckungen von einer Ellipsoidfläche in wellenförmigen Erhöhungen und Einsenkungen abweicht, erschweren diesen Uebergang zu dem gesuchten Sphäroid dadurch, dass man dabei von den Besonderheiten jener Ungleichförmigkeiten in den Gegenden der Erde abhängig ist, in welchen die Messungen angestellt sind. Zur Erfüllung der idealen Forderung, ein Rotationsellipsoid zu finden der Art, dass

erstens die geoidischen Erhöhungen über und die Vertiefungen unter die Ellipsoidfläche gleiche Beträge, oder dass Sphäroid und Geoid gleiches Volumen erhalten, und dass

zweitens die Summe der Beträge von Erhöhungen und Vertiefungen ein Minimum sei

werden unsere Messungen wie bisher so auch noch in sehr fernen Zeiten unzureichend sein. Nichts desto weniger wird es sich empfehlen, diese Forderung, deren erster Theil sich auf die Grösse des Sphäroids, und zweiter Theil auf dessen Abplattung bezieht, in Zukunft im Auge zu behalten, um ihr mit derjenigen Annäherung zu genügen, welche die jeweiligen Hülfsmittel und Methoden ermöglichen werden.

So weit wir gegenwärtig die Abweichungen des Geoids von dem regelmässigen Sphäroid in ihren allgemeinen Zügen über die Gesammtoberfläche der Erde mit ihren continentalen Erhebungen und oceanischen Eintiefungen*) zu über-

*) Man wird sich den Verlauf des Geoids über und

blicken vermögen, kann vorerst nur ein roher Ueberschlag ihres Betrags versucht werden.

Rechnen wir von 33 Arealtheilen der ganzen Erdoberfläche 8 auf die gesammten Continente einschliesslich nahe liegender grösserer Inseln und 25 auf die oceanische Fläche sammt kleineren Inseln und legen in Gedanken ein erstes (litorales) Sphäroid so, dass es möglichst nahe die gesammte Meeresküste der Continente enthält, so dürfte das Geoid im Grossen und Ganzen auf dem continentalen Areal eine Erhöhung über,

---

unter dem Ellipsoid z. B. in einem bestimmten Meridian durch eine langgestreckte Curve versinnlichen, welche den durch eine horizontale gerade Linie dargestellten Meridian begleitet. Die Erhebungen des Geoids stellen sich alsdann durch Convexitäten, die Eintiefungen aber durch Concavitäten dar. Es mag nicht überflüssig sein, hervorzuheben, dass auf dem elliptischen Meridian und überhaupt in jedem Azimut das, was wir bisher Vertiefung oder Einsenkung genannt, nur Strecken des Geoids sind, bei welchen die convexe Krümmung vermindert ist, ohne in Concavität überzugehen. Ich bezweifle ob die Amplitude eines wenn auch ganz kurzen Bogens auf der Geoidfläche sich irgendwo auf der Erde negativ herausstellen mag. Selbst an der Westküste von Südamerika dürfte sich schwerlich eine Strecke von 100^m finden, wo der Unterschied der west-östlichen Ablenkungen im Sinne der Amplitud-Verminderung über 3″2 hinausgeht. Auch ist der merkwürdige 2 Meilen südlich von Moskau wahrgenommene Fall noch weit entfernt negative Amplituden zu ergeben. Wir haben uns also die Meeresfläche trotz ihres beschleunigten Ansteigens gegen die Continentalküsten und ebenso ihre geoidische Fortsetzung unter den Continenten ausnahmslos convex vorzustellen. Einen nicht unähnlichen, nur viel einfacheren und regelmässigen Fall bietet die trochoidische Mondbahn dar, in welcher unser Satallit die Erde auf ihrer elliptischen Bahn um die Sonne begleitet, indem die nähere Untersuchung zeigt, dass diese Trochoide durchweg gegen die Sonne concav ist und nur in der Nähe des Neumondes schwächer, in der Nähe des Vollmondes stärker gekrümmt als die Erdbahn.

auf dem oceanischen Areal eine Vertiefung unter diesem Litoral-Niveau besitzeu. Die Erhebung folgt in gewissermassen verjüngtem Massstabe dem Relief des Festlandes, die Eintiefung in ähnlicher Weise der Gestaltung des Meeresbodens, jene wahrscheinlich mit merklicheren Unregelmässigkeiten als diese. Die Höhe der Erhebungen mag sich auf Continenten mit hohen Gebirgsmassen, wie Centralasien und das tropische America, mit einem Relief bis 7 und 8tausend Meter über der Geoidfläche, leicht auf 5 bis 6 hundert Meter über dem litoralen Sphäroid erstrecken, und die Tiefe der Einsenkung an ausgedehnten, weit vom Continent entlegenen Theilen der Oceane gleichfalls auf 500 Meter reichen. Um nun eine wenn auch noch so rohe Vorstellung von dem Rauminhalte der Erhöhung und Vertiefung zu gewinnen, nehmen wir die mittlere Höhe der Erhöhung über den 8 Flächentheilen der Continente zu etwa 100^m, die mittlere Tiefe der Einsenkung über den 25 Theilen des Meeres zu etwa 400^m an, so dass wir für die Volumina die cubischen Beträge von 800 über, 10000 unter dem Küstenniveau erhalten. Sollen nun diese Beträge, die sich wie $1 : 12\frac{1}{2}$ verhalten, für das Erdsphäroid gleich ausfallen, so müssen wir dasselbe um eine gewisse Strecke x tiefer legen als das Küstenniveau, so dass die Scheidelinie zwischeu Erhöhung und Eintiefung von den Küsten meerwärts 10 bis 20 Grade verlegt wird. Rechnen wir 2 Arealtheile auf die Gesammtfläche, welche als ein in seiner Breite wechselndes Band die Continente umsäumend zwischen der Meeresküste und der Durchschnittslinie des Geoids mit dem Sphäroid auf der Eintiefungsböschung der Meeresfläche enthalten ist, so ergibt sich aus den Zahlen $800 + 9x$ für die

Erhöhung und $10000 - 24x$ für die Vertiefung, indem wir sie gleich setzen, $x = 279^m$ oder rund 280^m und somit für den cubischen Werth sowohl von Erhöhung als von Eintiefung rund 3300. Den 33ten Theil der Erdoberfläche zu 280600 Quadrat-Meilen gerechnet, wird der Werth der vorhin gebrauchten Einheiten 37,8 Cubik-Meilen, so dass sich das Volum der Gesammt-Erhöhung des Geoids über die Sphäroidfläche, wie der Eintiefung oceanischer Flächen unter das Sphäroid, = 124740 Cubik-Meilen ergibt, welches dem Rauminhalt eines Würfels von 50 geogr. Meilen Seite nahe kommt, und $\frac{1}{21244}$ des Rauminhalts der Erde (rund zu 2650 Millionen Cubik-Meilen gerechnet) entspricht. Das Bergrelief würde nach dieser ganz rohen und rundzahligen Abschätzung bis auf 9000 Meter über, die Eintiefung der Meeresfläche auf 220 Meter und der Meeresboden auf etwa 5000, stellenweise auf 10000 Meter unter die Sphäroidfläche reichen, und somit die auf die regelmässige Oberfläche der Erde bezogenen Relief-Unterschiede des Festen der linearen Abplattung c des Ellipsoids selbst (bis zu etwa $\frac{1}{12}$) nahe kommen.

So unvollkommen auch vorerst dieser Versuch sein mag, so reicht er doch hin, unsere frühere übliche Meinung von den kleinen wellenförmigen Abweichungen der mathematischen Oberfläche von der Sphäroidfläche dahin zu modificiren, dass es sich hierbei um weit grössere Beträge*) handelt, als man bisher geglaubt.

*) Diese Beträge würden sich leicht noch bedeutend grösser herausgestellt haben, wenn man die mitunter 50 bis 100 Procent höheren Zahlen von Fischer angewendet

Die Gradmessungen, sofern sie nur auf dem Continente ausführbar, gehören mehr oder weniger prominenten Theilen der Continental-Erhöhungen an und dieser Umstand wird zu einer Vergrösserung der Dimensionen des Sphäroids desto mehr beitragen, je mehr hochgelegene Messungen oder Bogentheile derselben nach und nach in die Berechnung des Sphäroids aufgenommen werden. Namentlich ist in dieser Richtung die grosse Indische Messung wirksam gewesen. Zur Verkleinerung der Abplattung scheint nicht zum geringen Theil die Peruanische Messung beigetragen zu haben, deren Meeresfläche vielleicht 600 bis 700^{m} über dem wahren Sphäroid gelegen, abgesehen von dem Einfluss der Ablenkung auf die Amplitude, eine Vergrösserung der Bogenlänge unter dem Aequator bewirkte, welche erst später durch das Hinzukommen anderer Messungen mehr und mehr redressirt wurde. Einen ähnlichen Einfluss übte wiederum die Indische Messung deren nördliche Bogen zum Theil eine Amplitud-Verminderung durch Local-Ablenkung erleiden. Offenbar aber machen sich diese Verhältnisse in der zum Theil grossen Verschiedenheit der Ellipsoide geltend, welche aus verschiedenen Combinationen zweier Gradmessungen oder zweier

---

hätte. Bei einer vorläufig auf so precären Grundlagen zu versuchenden Bestimmung der Körperräume der Erhebungs- und Vertiefungswellen glaubte ich möglichst gemässigte Ziffern unterlegen zu müssen. — Ob der nach vorliegendem Ueberschlag auf rund $\frac{1}{10600}$ des Körperinhalts der Erde sich belaufende Betrag, welcher im zweiten Theil der obigen Forderung in Betracht kommt, den künftigen genaueren Feststellungen als Minimum genügen werde, entzieht sich gegenwärtig noch ganz der Beurtheilung.

Stücke einer Messung hervorgehen, wovon die oben besprochenen Berechnungen sowohl von Everest als von Schubert sprechende Beispiele geliefert haben.

Unseres Erachtens müssen künftig die Ablenkungen der Lothlinie, soweit sie aus sichtbaren Ursachen hervorgehen, durch topographische Erforschung des continentalen Reliefs, durch geologische Ermittelung der Dichtigkeit seiner Bestandtheile und durch planmässige Sondirung der Oceane, nach den bereits schon angewandten, erfolgverheissenden Methoden der Berechnung numerisch ermittelt werden. Aus den gewonnenen Ablenkungen sind genäherte Bestimmungen der Höhe des Geoids über dem Sphäroid abzuleiten. Die meridionale Componente der Ablenkungen ist als Correction der beobachteten Polhöhen, die Höhendifferenz zwischen Geoid und Ellipsoid zur Reduction der bereits auf die Meeresfläche reducirten Bogenlängen auf das Ellipsoid zu verwenden. Jene Correction der Polhöhen und somit der Amplituden, sowie diese Reduction der Bogenlänge können vorerst nur unter Benutzung eines provisorischen plausibelen Sphäroids effectuirt werden. Durch Behandlung der so gewonnenen Daten in bisheriger Weise nach der Methode der kleinsten Quadrate findet man ein verbessertes Ellipsoid, mit welchem jene Operationen zu widerholen sind, um eine neue Verbesserung in zweiter Approximation zu gewinnen. Und so wird man sich schrittweise durch successive Approximationen dem finalen Ellipsoid allmälig nähern.

Daneben ist, wie dies bereits von Fischer in vollem Masse geschehen, die Wiederaufnahme der Pendelmessungen oder überhaupt solcher

Versuche*), welche auf Messung der Intensität der Schwere gerichtet sind, dringend zu empfehlen, weil ohne sie nahe $\frac{3}{4}$ der Erdoberfläche in Betreff der Abplattung würden unbefragt bleiben. Die oben besprochene allmälige Verstärkung der Abplattung, welche sich in unserer seitherigen Reihe gewonnener Sphäroidgestalten kund gegeben, ist nicht wenig geeignet, den Pendelmessungen die Gunst wieder zuzuwenden, die man ihnen früher geraume Zeit hindurch unverdienterweise entzogen. Auch ist in dem Sphäroid (19) der Werth der Abplattung, wie oben hervorgehoben, lediglich den mit dem Pendel gewonnenen Erfahrungen entnommen.

Dem angedeuteten, im Vergleich zu dem bisherigen Rechnungsmodus allerdings dornenvollen Wege wird sich anfänglich erst langsam der Beifall zuwenden, dessen er bedarf, um zu neuen Erfolgen zu führen. Man darf sich nicht verhehlen, dass eine Art Fusion der sehr genauen Daten heutiger Gradmessungen mit den ihrer Natur nach gewissermassen precären Werthen der Ablenkungen Bedenken hervorrufen wird, deren Ueberwindung durch fehlschlagende Erfolge sehr in Frage gestellt werden dürften. Jedenfalls wird eine richtigere Würdigung der mehr physischen Bedeutung der Geoidfläche und ihrer erheblichen Verschiedenheit von dem idealen Sphäroid mehr und mehr Platz greifen müssen, wenn die zeitherigen und die künftig neu

*) Der Gedanke J. W. Herschel's, die Schwere durch eine Federwage zu messen (Outlines of Astronomy, 1849. art. 234) verdient nicht unbeachtet zu bleiben. Die Anwendung dieses Princips würde mit entschiedenen Vortheilen lohnen, sobald es dahin gebracht werden könnte, hinsichtlich der Genauigkeit mit den Pendelmessungen gleichen Rang zu erreichen.

hinzukommenden Breitengradmessungen so wie Messungen von Längengraden und Triangulationen über ausgedehnte Areale, wie namentlich die vielversprechende Europäische Vermessung von Portugal bis zum Ural, zu einer von Täuschung freien Deduction des Ellipsoides aus den zunächst dem Geoid angehörigen Beobachtungen nutzbar werden sollen. Aus dem richtigen Ueberblick über diese vitalen Verhältnisse werden die geeigneten Methoden der Berechnung von selbst ihre Formulirung finden. Missverhältnisse, wie sie sich nach bisheriger Anschauungsweise in singulären Fällen *) öfter darboten, werden auf dem neu betretenen Wege der Untersuchung nicht als unwillkommene Abnormitäten bei Seite geschoben werden, sondern vielmehr als wesentliche Beihülfe in der Ausmittelung geoidischer Unregelmässigkeiten ihre Verwendung finden. Ist ja, wie bereits früher erwähnt, das Sphäroid nicht das letzte Object der geometrischen Untersuchungen des Erdkörpers, sondern das Geoid mit seinen verwickelten Gestaltungen vorerst in allgemeinen Zügen und nachgehends bis in die localen Einzelnheiten.

---

*) Wir erinnern an die Station Evaux der Französischen Gradmessung, welche wegen ihrer, je nach den zum Grunde gelegten Sphäroid 6″ bis 8″ betragenden Abweichung der Polhöhe bei neuern Berechnungen ausser Acht gesassen wird. Aehnlich verhält es sich mit dem englischen Dreieckspunkte Cowhythe, welcher eine Deflexion von 9″ bis 10″ ergibt (Principal Triangulation p. 662, 698, 699, 704, 710, 711, 713). Noch einen Fall der Art bietet der Brocken dar (Gauss' Breitenunterschied S. 72), durch dessen auffallende südliche Ablenkung die Amplitude von $1\frac{3}{4}$ Grad bis Altona eine Verringerung um nahe 16 Secunden, die Amplitude von $\frac{1}{4}$ Grad bis Göttingen eine Vergrösserung um nahe 10 Secunden erleidet.

Für das oben vorgeschlagene typische Sphäroid (20) wurden möglichst plausibele, zugleich aber rund- oder ganzzahlige Elemente gewählt, für die Abplattung die den Pendelmessungen vorzugsweise Rechnung tragende Ziffer 289 und für den mittleren Radius R die runde Zahl 6370000^m, auf welche mehrfache Reductionen nach Art obiger Ueberschläge der Continentalerhöhungen des Geoids so nahe hinführten, dass dadurch ihre Wahl indicirt war. Die scharfen Zahlen 6377365.00566, 6355297.99872 und 22067.00694 für a, b und c, welchen die ganzzahligen Werthe in unserem Typus (20) innerhalb 7 Millimeter nahe liegen, entsprechen der runden Zahl für R hinreichend genau. Die Zukunft wird lehren, ob dieser Werth von R, welcher angesichts der seit 30 bis 40 Jahren aufgestellten Sphäroidformen entschieden zu klein scheinen dürfte, der Wahrheit hinreichend nahe komme, oder ob er nicht vielmehr gleichfalls noch zu gross sei.

Um nun schliesslich noch einmal auf den im Eingange zur Sprache gebrachten sogenannten Fehler des Meters, .sofern es der anfänglichen Meinung nach dem vierzigmillionten Theil des Meridianumfangs der Erde gleichkommen sollte, zurückzublicken, so geben die für die besprochenen Sphäroide im Bisherigen mitgetheilten Werthe von Q Auskunft über die jeweiligen Werthe des idealen Meters ausgedrückt in wirklichen Metern oder in $\frac{443296}{864000}$ der Toise du Pérou. Der Ueberschuss des 10000ten Theils von Q über 1000 stellt in Millimeter-Decimalen den sog. Fehler des Meters dar, um welchen das wirkliche Meter k l e i n e r ist als der 10millionte

Theil des Meridianquadranten des terrestrischen Sphäroids.

Delambre selbst gelangt bereits 1810*) nach Vollendung der Französischen Gradmessung bis Formentera zu folgenden Werthen des 10millionten Theils von Q in par. Linien, abgeleitet aus

Montjouy, Barcelona, Greenwich	443.3255
Montjouy, Barcelona, Dünkirchen	443.328
Formentera, Greenwich (51°28'39"5)	443.31788
Formentera, Greenwich (51 28 40. 0)	443.31188

welche er in dem Mittel 443.322 zusammenfasst, wonach sich schon damals das Meter als um 0.0587 Millimeter zu klein herausstellte.

Das Platin-Meter der Pariser Archive stellt das gesetzliche Meter dar, wenn es sich in der Temperatur 0° befindet. Aus dem für Platin von Borda bestimmten Ausdehnungs-Coefficienten 0.00000856457 für 1° der hunderttheiligen Scale lässt sich die Temperatur t ableiten, bei welcher das Platin-Meter ein gegebenes ideales Meter darstellt, dessen Ueberschuss über das gesetzliche Meter q Millimeter beträgt, wie dies bereits von Delambre für die zweite der angeführten Bestimmungen**) geschehen, wo $q = 0.07233$ Millim. und somit $t = 8°445$ C. Die fragliche Temperatur t findet sich durch Division von q durch 0.00856457.

Den vermeintlichen Fehler des Meters auch für Diejenigen, welche geneigt sind auf diesen Punkt noch immer Gewicht zu legen, zu veran-

*) Base du Syst. Métr. III. p. 299 und: avertissement p. 9.
**) Base du Syst. Métr. III. p. 136.

schaulichen ist in nachstehender Uebersicht dieser Fehler ausser in Millim. auch in Haarbreiten aufgeführt, die mittlere Dicke eines Menschenhaares*) zu $\frac{1}{15}$ Millimeter angenommen. Hinzugefügt ist die Temperatur t in Graden Celsius, bei welcher das Original-Platinmeter dem jeweiligen idealen Meter (oder dem 10millionten Theil von Q) gleichkommen würde.

Der sogenannte Fehler des Meters beträgt

			Millim.	Haarbreiten.	t
1800	Delambre	(1)	0.0000	0.00	0° C.
1810	Delambre		0.0587	0.88	6.85
1819	Walbeck	(2)	0.0268	0.40	3.13
1830	Schmidt	(3)	0.0061	0.09	0.71
1830	Airy	(4)	0.0976	1.46	11.39
1841	Bessel	(5)	0.0856	1.28	9.99
1856	Clarke	(8)	0.1620	2.43	18.91
1858	Clarke	(10)	0.1984	2.98	23.17
1861	Clarke	(13)	0.1949	2.92	22.75
1863	Clarke	(15)	0.1902	2.85	22.21
1863	Pratt	(16)	0.1924	2.89	22.46
1866	Clarke	(18)	0.1887	2.83	22.03
1868	Fischer	(19)	0.1714	2.57	20.05
1872	(L.)	(20)	0.0218	0.33	2.51

*) Vgl. Bessel's popul. Vorles. S. 322.

Göttingen im December 1872.

Verzeichniss der bei der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangenen Druckschriften.

November 1872.

(Fortsetzung.)

Monatsbericht der königl. preuss. Akad. der Wiss. zu Berlin. Juli 1872. Berlin 1872. 8.

Abhandlungen der königl. preuss. Akad. der Wiss. zu Berlin. 1871. Ebd. 1872. 4.

Bulletin de l'Académie R. des Sciences etc. de Belgique. 41e année, 2e serie, tome 34. No. 9 et 10. Bruxelles. 1872. 8.

F. A. T. Winnecke, Bestimmung der Parallaxe des zweiten Angelander'schen Sternes aus Messungen am Heliometer der Sternwarte zu Bonn in den Jahren 1857—1858. Publication der Astron. Gesellsch. XI. Leipzig 1872. 4.

Dr. A. Weller, Grundzüge einer neuen Störungstheorie und deren Anwendung auf die Theorie des Mondes. Publication der Astron. Gesellsch. XII. Ebd. 1872. 4.

II. Jahresbericht der Akademischen Lesehalle in Wien über das Vereinsjahr 1872. Wien 1872. 8.

Annales de l'Observatoire R. de Bruxelles. (Bogen 10).

A. Scacchi, contribuzioni mineralogiche. Napoli. 1872. 4.

— notizie preliminari di alcune specie mineralogiche. 4.

— sulla origine della cenere vulcanica. 4.

— cristalli di alcuni composti di Toluene. Ebd. 1870. 4.

Annalen des physikalischen Centralobservatoriums, herausg. von H. Wild. Jahrg. 1870. St. Petersburg 1872. 4.

War Department. Three copies of Tri-daily Weather Map. Three copies of Tri-daily Bulletin.

Abhandlungen der mathem.-physikal. Classe der königl. bayer. Akad. der Wiss. Bd. XI. Abth. 1. München 1871. 4.

Abhandlungen der philosoph.-philolog. Classe. Bd. XII. Abth. 3. Ebd. 1871. 4.

Annalen der Sterwarte. Suppl. XII. Ebd. 1872. 8.

Festreden von Erlenmeyer und Friedrich. Ebd. 1871. 72. 4.

Nederlandsch kruidkundig Archief. Verslagen en Mededeelingen der Nederlandsche Botanische Vereeniging. Tweede serie. 1e deel. 2e stuk. Nijmegen. 1872

Carte géologique de la Suède. Livr. 42—45.
Coupe géognostique de la châine centrale de la Scandinavie par A. E. Tômebohm.
Die Einweihung der Strassburger Universität am 1. Mai 1872. Strassburg 1872. 8.
Zur Geschichte der Universität Strassburg. Ebd. 1872. 8.
Statut der königl. sächsischen Bergakademie zu Freiberg. 4.
Special-Regulative der königl. sächs. Bergakademie zu Freiberg. 8.

December 1872.

Nature. 162. 163. 164.
Mémoires de la Société de Physique et d'Histoire naturelle de Genéve. J. XXI. Seconde partie. Paris et Bale. 1872. 4.
Annals of the Lyceum of Natural History of New York. Vol. IX. December 1870. No. 13. Vol. X. February, March 1871. Nos. 1—3. July-November 1871. Nos. 4—5. March-May 1872. Nos. 6—7. New-York 1870—72. 8.
Proceedings of the Lyceum of Natural History of New-York. Vol. I.
Acta Universitatis Lundensis. 1869—70. Lund. 1869—71. 4.
Verhandlingen der Kon. Akademie van Wetenschappen. Afdeeling Letterkunde. Deel VII. Amsterdam 1872. 4.
Verslagen en Mededelingen der Kon. Akademie. Afdeeling Natuurkunde. 2e Reeks. Deel VI. Afd. Letterkunde. 2e Reeks. Deel II. Ebd. 1872. 8.
Jaarboek 1871. Amsterdam. 8.
Petri Esseiva ad Junenem satira. Ebd. 1872. 8.
Processen-Verbaal. 1871—72.
W. Wright, fragments of the Curetonian Gospels. London. 4.
— a specimen of a Syriac translation of the Kalisch Wa-Dimnah. Ebd. 8.
Dr. Augustus Dillmann, veteris Testamenti Aethiopici. Lipsiae. 1871. 4.
Kleine Schriften der Naturf. Gesellsch. in Emden. XVI. Die Winde in ihrer Beziehung zur Salubrität u. Morbilität, von Prof. Dr. Prestel. Emden 1872. 8.
Bulletin de l'Acad. R. des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique. 41e année, 2e série, t. 34. No. 11. Bruxelles. 1872. 8.
Luigi Cremona, commemorazione di Alfredo Clebsch. 8.

(Fortsetzung folgt.)

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

12. Februar. № 4. 1873.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 1. Februar.

Wieseler, Beiträge zur Symbolik der Griechen und Römer.

Wöhler legt eine Mittheilung der Hrn. Dr. Tollens und Wagner, über ein Parabansäurehydrat vor, desgl. eine Notiz von Tollens, über Schwefelreaction vorm Löthrohr.

Stern, Mittheilung der Hrn. Dr. Nöther und Prof. Brill.

Claus, Mittheilung des Hrn. Prof. Dr. Grenacher in Münden, »zur Entwicklungsgeschichte und Morphologie der Cephalopoden«.

Schering, die Schwerkraft in mehrfach ausgedehnten Gaussischen und Riemannschen Räumen.

Ueber Parabansäurehydrat*).

Von **B. Tollens** und **Rich. Wagner.**

Mit Parabansäure ist seit Liebig und Wöhler's klassischer Untersuchung der Harnsäurederivate

*) Diese Versuche sind ausgeführt bei Gelegenheit anderer, welche bezweckten, Parabansäure synthetisch mittelst Harnstoff und Cyan zu erhalten, leider aber negative Resultate lieferten.

mehrfach gearbeitet worden, und alle Beobachter scheinen sie ohne Schwierigkeit erhalten zu haben*). Erstaunt waren wir deshalb, als wir zuweilen, nach der gegebenen Vorschrift (mit Salpetersäure) arbeitend, nicht die schönen breiten Nadeln der Parabansäure erhielten, sondern grosse Krystalle, welche mit Alloxan gleichen Habitus zeigten aber durch ihre Resistenz gegen ziemlich starke erwärmte Salpetersäure sich sehr davon unterschieden.

Sie liessen sich aus Wasser umkrystallisiren und bildeten dann schöne, compacte, farblose, wie es schien, dem rhombischen System angehörige Krystalle. Diese Krystalle färbten sich beim Erhitzen, sowie bei längerem Stehen an der Luft roth. Ihre Lösung gab mit Silberlösung einen weissen Niederschlag. Nach dem Lösen in Ammoniak und gelindem Erwärmen bildete sich in der wieder erkalteten Flüssigkeit ein dichtes Haufwerk weisser Nädelchen und ebenso in der selbst sehr verdünnten ammoniakalischen Lösung auf Zusatz von Salzsäure.

Alle diese Reactionen sind diejenigen der Parabansäure, und die Analyse zeigte die Ursache der abweichenden Form nämlich, dass wir es mit einem Hydrate der Parabansäure zu thun hatten von der Formel $C^3H^2N^2O^3 + H^2O$

	Berechnet.	Gefunden.
C^3	27.27	27.41
H^4	3.03	2.80
N^2	21.21	20.69
O^4	—	—

Das Parabansäurehydrat ist sehr beständig,

*) Wheeler (Zeitschrift für Chemie 1866 S. 746) hat aus Harnsäure mit Schwefelsäure und Mangansuperoxyd ziemlich grosse Krystalle bekommen, welche er jedoch für gewöhnliches Parabansäureanhydrid hält.

trocken auf 100° erhitzt, verliert es kaum an Gewicht, nach 12 stündigem Erhitzen auf 150—160° dagegen zeigte sich ein Gewichtsverlust von 11.73 p. C. während obige Formel 13.63 p. c. H^2O verlangt. Die trockne Masse löste sich leicht in Wasser und gab nicht mehr grosse Krystalle, sondern die bekannten breiten Blätter des Anhydrids, während ein kleiner Theil sich unter Rothfärbung zersetzt hatte.

Das Hydrat löst sich leichter in Wasser als Parabansäureanhydrid; während von letzterem 1 Theil in 21.2 Theilen Wasser von 8° sich löste, brauchte das Hydrat 7.4 Theile Wasser von derselben Temperatur. In warmem Wasser löst es sich ausserordentlich leicht und die erkaltende sirupdicke Lösung giebt vor dem Krystallisiren Anzeichen von Uebersättigung. Diese Leichtlöslichkeit des Hydrates unterscheidet es aufs bestimmteste von der isomeren fast unlöslichen Oxalursäure.

In einigen Darstellungen hatten wir nur Hydrat erhalten, in anderen dagegen Gemenge desselben mit den breiten Blättern des gewöhnlichen Anhydrides, und es ist uns nach einigen Versuchen gelungen, die Bedingungen zur beliebigen Erhaltung sowohl des Hydrates als des Anhydrides zu präcisiren. Es bildet sich nämlich das Hydrat bei gelinder Einwirkung von nicht zu verdünnter Salpetersäure auf Harnsäure und nicht zu starkem Eindampfen, während eine heftig verlaufende Reaction und längeres Eindampfen wasserfreie Parabansäure liefert.

Wenn man in 3 Theile in einem abgekühlten Becherglase befindliche Salpetersäure von 1.3 spec. Gew. 1 Theil Harnsäure so allmälig

einträgt, dass die Temperatur nicht auf 50° steigt, so enthält die Flüssigkeit bald zahllose mikroscopische Hydratkryställchen suspendirt. Beim Erwärmen auf 70° oder bei gelindem Abdampfen im Wasserbade lösen sie sich und bilden beim Erkalten grössere Individuen, die sich durch Abgiessen der Mutterlauge und Umkrystallisiren aus Wasser leicht reinigen lassen.

Steigt die Temperatur höher, wie es z. B. bei der durch Uebergiessen von 20 grm. Harnsäure mit 60 grm. Salpetersäure eintretenden sehr heftigen Reaction nicht zu vermeiden ist, so erhält man stets Gemenge von Hydrat und Anhydrid, dampft man diese Gemenge 1—2 Stunden im Wasserbade ab, so vermindern sich bei mikroscopischer Untersuchung herausgenommener Tropfen die grossen Hydratkrystalle und zuletzt sieht man in einer solchen Probe nur zahlreiche Anhydridblättchen entstehen.

Dieser Punkt ist jedenfalls erreicht, wenn die am Rande der Schale befindlichen rothen Parthien beim Einrühren in den mittleren Theil der Schale nicht mehr augenblicklich entfärbt werden, doch ist bei so langem Erhitzen schon ein Theil zersetzt und die Ausbeute geschmälert. Man bringt die abgedampfte und erkaltete Masse auf einen porösen Stein und erhält nach dem Abtrocknen durch Krystallisiren aus Wasser prächtige flache Nadeln, welche bei einer von Herrn J. dos Santos e Silva angestellten Bestimmung 24. 45 p. c. Stickstoff ergaben (statt 24. 56 p. c.).

Was die Constitution des Parabansäurehydrates anbetrifft, möchten wir folgendes bemerken. Seltsam ist, dass diese Verbindung, einmal entwässert, nicht wieder mit Krystallwasser sondern wasserfrei aus ihrer Lösung an-

schiesst. Schwer ist es deshalb, sie als einfaches Hydrat zu betrachten und man kann vielleicht eine Gruppe $C(OH)^2$ in derselben annehmen, welche durch Erhitzen auf 150—160° sich in $CO + H^2O$ zersetzt und so Parabansäureanhydrid oder $\begin{matrix} CO-NH \\ | \\ CO-NH \end{matrix}\!\!>\!CO$ liefert. Wir möchten also die Formel $\begin{matrix} C(OH)^2-NH \\ | \\ CO \quad\quad -NH \end{matrix}\!\!>\!CO$ für das Parabansäurehydrat vorschlagen.

Ein Theil der obigen Resultate wurde von dem Einen von uns auf der Naturforscherversammlung in Leipzig*) mitgetheilt, ohne Kenntniss davon zu haben, dass ganz kurz vorher (August 1872) Ponomareff**) synthetisch, also ohne wie wir von der Harnsäure auszugehen, zu einer Substanz gelangt ist, welche er als Parabansäurehydrat anspricht, und deren Eigenschaften den von uns beobachteten ähnlich sind. Seine Arbeit und unsere ergänzen sich gegenseitig.

---

*) Tageblatt der Naturf. Vers. S. 57. Bericht der deutsch. chem. Ges. 1872. S. 801.

**) Bulletin de la Société chimique (2) 18 p. 97.

Notiz zur Auffindung von Schwefelverbindungen mittelst des Löthrohres.

Von B. Tollens.

Vielfach wird empfohlen, zur Prüfung auf Schwefelverbindung die zu analysirende Substanz mit Soda gemengt auf Kohle in der inneren Löthrohrflamme zu erhitzen und das gebildete Schwefelnatrium mittelst Schwärzung einer Silbermünze nachzuweisen. Merkwürdigerweise ist nirgends darauf aufmerksam gemacht, dass man zu dieser Probe sich der Gasflamme nicht bedienen darf, sondern eine Oel- oder Kerzenflamme anwenden muss, wenn man nicht in die gröbsten Irrthümer verfallen will, denn Steinkohlengas enthält zuweilen so viel Schwefel, dass schon nach nur eine Minute dauerndem Blasen auf Soda diese Silber stark schwärzt, während es mir bei Anwendung einer Kerzenflamme nie gelang, eine Bräunung hervorzubringen.

Obiges war übrigens zu vermuthen, da Wartha*) eine an einem Platindrath geschmolzene Sodaprobe als Mittel benutzt, den Schwefel des Gases zum Zweck der Nachweisung zu fixiren.

Universitäts-Laboratorium in Göttingen.

---

*) Bericht der deutschen chemischen Gesellschaft 1871. S. 529.

Zur Entwickelungsgeschichte und Morphologie der Cephalopoden.

Von Dr. H. Grenacher,

Prof. der Zoologie an der Forstakademie in Hann. Münden.

(Vorläufige Mittheilung).

Die Untersuchungen, deren wichtigste Resultate hier den Fachgenossen mitgetheilt werden sollen, habe ich vor Jahresfrist auf der Cap-Verdischen Insel San Vincent angestellt, wohin ich auf meiner Reise für die Rüppel-Stiftung in Frankfurt a. M. gelangte. Ich werde mich hier darauf beschränken, die Hauptzüge einer interessanten Entwickelungsform zu skizziren, ohne mich auf literarische Nachweise und Controversen einzulassen, welche für die ausführliche, illustrirte Arbeit reservirt bleiben mögen, die ich vorbereite.

Die Form, deren Entwickelung ich verfolgte, konnte leider nicht bestimmt werden, da der Laich pelagisch gefischt wurde und die Embryonen nicht bis zum Ende des Embryonallebens gezogen werden konnten. Hoffentlich führt die Radula, von der ich Abbildungen zu geben im Stande bin, später noch zur Bestimmung wenigstens der Gattung. Es steht nur soviel fest, dass es ein zehnfüssiger Cephalopode ist, obschon während der Beobachtungszeit nur acht Arme zur Entwickelung kamen.

Der Laich war wurstförmig, 75 Cm. lang, 15—16 Cm. dick, und bestand aus einer durchsichtigen Gallerte. Die Eier, mehrere Tausend an Zahl, waren auf seiner Oberfläche eingelagert, und umzogen in zwei einander genäherten Spiralen den Gallertkörper von einem Ende bis

zum andern. Die kugeligen Eier hatten einen Durchmesser von 1,25 Mm. und bestanden aus einem Chorion, und einer schön purpurviolett gefärbten, 1 Mm. messenden Dotterkugel, welche in einer farblosen Flüssigkeit suspendirt war. Eine Dotterhaut wurde nicht beobachtet.

Von der rasch verlaufenden Blastodermbildung kamen blos einzelne Stadien zur Beobachtung; sie scheint indessen nichts Abweichendes zu bieten. Sie beginnt an einem Eipole, und schreitet von da aus nach dem entgegengesetzten Pole hin fort. Die völlige Umschliessung des Dotters findet jedoch erst statt, wenn der Embryo seine Form geändert, und schon einige Organanlagen gebildet hat. Der freie Blastodermrand bekleidet sich frühzeitig mit Cilien.

Am Ausgangspole der Blastodermbildung hebt sich das Blastoderm blasenartig vom Dotter ab. Zugleich treten hier sternförmige, carminrothe Zellen auf, welche zu den Chromatophoren werden, die sich bekanntlich bei andern Cephalopoden erst gegen Ende des Embryonallebens bilden. Sie verändern weiterhin Form und Farbe, indem sie erst rothbraun, dann dunkelbraun werden.

Darauf streckt sich der Embryo etwas in die Länge. Die Blastodermabhebung dehnt sich unterdessen auf das hintere Drittel des Körpers aus, und grenzt sich durch eine Ringfalte ab. Damit ist die Bildung des Mantels gegeben. Ungefähr in der Mitte des Körpers machen sich Differenzirungen des Blastoderms bemerklich. Einmal sind dies rundliche Blastodermverdickungen, die Anlagen der Augen, deren Entwickelung wir nachher im Zusammenhang kennen lernen werden; dann zwei symmetrisch ge-

lagerte Faltenpaare, aus welchen der Trichter hervorgeht. Die innern Trichterfalten entspringen beiderseits unweit der Medianlinie des Bauches, und ziehen nach aussen und hinten; die äussern Trichterfalten bilden die Fortsetzung der innern gegen den Rücken hin; sie sind von den innern durch einen schmalen Zwischenraum getrennt. Bei andern Cephalopoden ist bekanntlich blos ein Faltenpaar beobachtet worden.

Am Vorderende des Körpers, wo noch die Blastodermöffnung persistirt, haben sich die Armanlagen bemerkbar gemacht. Sie treten in Form von drei Paaren niedriger faltenartiger Wülste auf, welche das Vorderende des Körpers umziehen.

Bei weiterer Entwicklung bildet sich die Mantelhöhle aus, und es treten in ihr die Anlagen der Kiemen als paarige, die Anlage des Afters als unpaariger Höcker auf. Die Augen, hier blasenförmig, treten beiderseits stark hervor; unter ihnen liegt das Ganglion opticum, neben diesem der sogenannte weisse Körper. Die Abstammung beider letztgenannten Gebilde ist mir verborgen geblieben. Die Trichterfalten haben sich vergrössert; an der Grenze zwischen innerer und äusserer Trichterfalte ist das Gehörorgan aufgetreten, das auch später für sich besprochen werden wird. Am Vorderende des Körpers macht sich eine stirnartige Vorwulstung des Dotters zwischen den Armanlagen bemerklich; die frühere Blastodermöffnung ist fast völlig geschlossen, aber auf die Rückenseite geschoben. Die Armanlagen haben sich erhoben, und beginnen eine eigenthümliche Drehung, die hier nicht näher beschrieben werden kann, deren Endresultat jedoch das ist, dass

ihre Basis, die früher senkrecht auf der Längsaxe des Körpers stand, allmählig derselben parallel wird, dann aber bei weiterer Fortsetzung der Drehung wieder senkrecht auf die Längsaxe zu stehen kommt. Auf der Rückenseite dicht hinter der Oeffnung des Blastoderms macht sich eine breite, taschenartige Einstülpung des Blastoderms bemerklich, welche nach hinten gerichtet ist, und welche als primäre Vorderdarmhöhle bezeichnet werden könnte, da von ihr die Bildung der Mundmasse mit Zungentasche und Speicheldrüsen, sowie des Vorderdarmes ausgeht.

Ich habe vorhin der stirnartigen Dottervorwulstung am vorderen Leibesende gedacht. Dieselbe erweckt den Gedanken, dass wir es hier mit der Anlage des äussern Dottersackes zu thun hätten, wodurch sich die Cephalopoden so scharf von den übrigen Weichthieren scheiden. Dies ist aber nicht der Fall, da es hier nie zur Abschnürung eines äussern Dottersackes kommt. Eine vergleichende Betrachtung späterer Stadien mit dem von andern Cephalopoden her Bekannten belehrt uns, dass diese Dotteransammlung nur verglichen werden kann mit dem Kopftheil des innern Dottersackes (von Argonauta z. B. nach Kölliker); dass, mit andern Worten, es hier nicht zur Differenzirung eines innern und äussern Dottersackes kommt, sondern nur der innere vorhanden ist, der dann wieder in Kopf-, Hals- und Mantelthеil zerfällt.

Bei weiterer Entwickelung verschmelzen die innern und äussern Trichterfalten jederseits zu einer Falte; an der Vereinigungsstelle bildet sich ein Muskel, der Herabzieher des Trichters. Nun beginnen die Trichterfalten in der be-

kannten Weise sich gegeneinander zu neigen, und sich zu einem Rohr zu schliessen. Besonders bemerkbar macht sich die Erhöhung, in welche das Auge eingebettet liegt; sie wird immer stärker und stärker, und ragt endlich als dicker Stiel, in welchem ausser dem Auge noch das Ganglion opticum und der »weisse Körper« eingeschlossen liegen, jederseits über den Mantelrand hervor. Die Gehörorgane, die erst an den Seiten des Körpers gelegen waren, rücken nach der Bauchseite zu, und treten, wenn der Trichter sich geschlossen hat, dort bald mit einander in Berührung. Die Mundöffnung verschiebt sich nach vorn, und gelangt so allmählig zwischen die Arme, von denen sie ursprünglich ziemlich weit entfernt war. Die Arme nehmen an Grösse zu; es kommt ein 4tes Armpaar hinzu, das aber nicht selbständig entsteht, sondern als ohrförmiges Gebilde am ersten Armpaare (von der Bauchseite aus gerechnet) sich entwickelt. Es treten die Saugnäpfe auf, zuerst als solide Knöpfe, die dann hohl werden, Saugstempel und Cuticula erhalten etc. Am Mantel tritt jederseits eine kleine Flosse auf.

Von weitern Veränderungen in der Leibesform will ich nur noch anführen, dass der Augenstiel bald wieder in das Niveau der übrigen Körperoberfläche zurücktritt, und dass damit die typische Cephalopodenform erreicht ist.

Von einzelnen Organen habe ich besonders die Entwicklung des Auges und des Gehörorganes verfolgt, und kann mancherlei Daten darüber beibringen.

Das Auge tritt zuerst als eine elliptische Vertiefung im Blastoderm mit verdicktem und zellig gestreiftem Boden auf. Durch Ueberwölbung der Ränder und darauf folgende Verwach-

sung kommt die primäre Augenblase zu Stande deren vordere dünne Wand der darüber hinziehenden Haut dicht anliegt. Die hintere Wand ist dick, das Lumen zuerst sehr klein, erweitert sich aber später beträchtlich. Das sehr früh auftretende Pigment lagert sich auf der Vorderfläche der Hinterwand ab, von wo aus auch später die Stäbchenbildung ausgeht. Sehr eigenthümlich ist die Entstehung der Linse, deren Bau bis jetzt noch keine Erklärung ihrer Entwickelung zugelassen hat. Die erste Spur, die ich davon sah, bestand in einem dünnen, gebogenen Stäbchen, das mit einem Ende dem Mittelpunkte der Vorderwand der Augenblase aufsass, mit dem andern frei in die Höhlung derselben hineinragte. Später wurde sein Volumen grösser, die Gestalt mehr ovoid, und endlich kugelig. Gleichzeitig verdickte sich die der vordern Augenwand aufliegende äussere Haut, mit Ausnahme des Centrums, der Ansatzstelle der Linsenanlage entsprechend; durch diese ringförmige Aufwulstung kommt schliesslich eine sanduhrförmig gestaltete Grube, die Kölliker'scha Linsengrube, zu Stande, in welcher der eben genannte Forscher die ganze Linse sich bilden liess. Die innere Erweiterung der Linsengrube dehnt sich weiterhin über die Vorderfläche der Augenblase aus, und bekleidet sich mit einer besondern Epithellage, die am ehesten mit der Conjunctiva des Säugethierauges verglichen werden kann. Soweit reichten meine Beobachtungen an Ort und Stelle. Nachträglich habe ich in Göttingen noch einen einzigen, in den letzten Tagen meines Aufenthaltes auf San Vincent pelagisch gefischten, viel älteren Em[illegible]vo derselben Art untersucht, und habe da[illegible]lgendes gefunden. Die Linse war schon

sehr gross geworden; sie bestand schon aus ihren zwei Segmenten, die ich durch Druck auseinandersprengen konnte. Getrennt waren die beiden Segmente durch eine doppelte Membran; im Innern des hinteren, grösseren Segmentes war deutlich die Linse in ihrer zuletzt zur Beobachtung gekommenen Form zu erkennen. Die innere der beiden Lamellen der Scheidewand, in deren Nähe der kugelige Linsenkern lag, muss deshalb nothwendig die Vorderwand der primären Augenblase sein; die äussere Lamelle aber kann nichts ander's sein, als derjenige Theil der äusseren Haut, welcher den Boden der Linsengrube bildete.

Die Entstehung der Segmente der Linse ist demnach die: das hintere Segment entsteht früher als das vordere, und zwar im Innern der Augenblase; das vordere aber leitet seine Entstehung von der äussern Haut ab, welche zu diesem Zwecke über dem Auge eine besondere Tasche bildet. Welches freilich die histologischen Vorgänge dabei sind, muss erst noch erforscht werden.

Auch das Gehörorgan ist eine Einstülpung des Blastoderms. Als ich es zum ersten Mal sah, war es eine kleine, dickwandige Blase, deren unregelmässig geformtes Lumen durch eine feine Oeffnung mit der Aussenwelt communicirte, und deren Wandung continuirlich in das Blastoderm überging. Dann schliesst sich die Oeffnung im Blastoderm; der Ausführungsgang der Gehörblase aber verlängert sich, trennt sich vom Blastoderm los, seine distale Oeffnung schliesst sich, und er nimmt einen gebogenen Verlauf an. Dann kommen noch Wimpern in seinem Lumen hinzu, und wir haben nun den

bekannten, von Kölliker entdeckten Gang, der auch noch bei ausgebildeten Cephalopoden persistirt. Die rundliche Gestalt der Gehörblase wird dann rundlich viereckig; die Crista acustica legt sich in Form einer flachen Leiste an; der Otolith erscheint an der vordern medialen Ecke der Blase. Sind die beiden Gehörblasen in der Medianebene unter dem Trichter in Berührung getreten, so lassen sich auf der Crista acustica an 3 Stellen modificirte Sinnesepithelien wahrnehmen, die schon sehr an die von Owsjannikow und Kowalevsky beschriebenen erinnern.

Die primäre Vorderdarmhöhle lässt auf ihrem, dem Dotter zugewandten, inneren Blatte zuerst eine weitere Einstülpung entstehen; weiter nach hinten zu folgt dann eine zweite. Aus der ersten geht ein dünner, langer Canal hervor, der sich dann am Ende in zwei Aeste spaltet. An diesen Aesten verdicken sich die Wandungen, das Lumen wird vielfach buchtig, und es bilden sich daraus die untern oder grossen Speicheldrüsen. Aus der zweiten Einstülpung geht die Zungentasche hervor. Vom Ende der Vorderdarmhöhle aus geht der eigentliche Darm weiter als dünnes Rohr; er verläuft deutlich zwischen Blastoderm und Dotter, bis er unter dem Mantel verschwindet. — Weitere Angaben hierüber verspare ich auf die ausführliche Arbeit. Ueber die Bildung von Magen, Leber etc. fehlen mir alle Beobachtungen.

After und Tintenbeutel gehen von derselben Anlage aus. Der Afterdarm ist eine Blastodermeinstülpung, die dem Vorderdarm entgegenwächst.

In Bezug auf die morphologische Auffassung

des Cephalopodenleibes, und die Reduction seiner einzelnen Theile auf homologe Theile anderer Molluskentypen habe ich mir vielfach abweichende Ansichten gebildet, deren vollständige Darlegung und Vergleichung mit den Ansichten anderer Forscher erst in der ausführlichen Arbeit gegeben werden kann. Hier nur soviel: ich kann weder in den Armen der Cephalopoden, noch im Trichter irgend etwas dem Fusse der Gasteropoden und Heteropoden Homologes entdecken; ich muss den Fuss mit seinen Unterabtheilungen als ein Gebilde sui generis erklären, das bei Pteropoden wohl schon angedeutet ist, aber erst bei Gasteropoden und Heteropoden seine volle Ausbildung erreicht. Nach dem, was ich über die Entwickelung der Arme bei unserm Cephalopoden gesehen habe, stehe ich nicht an, mit Lovén dieselben für ein Homologon des Velum der Larven anzusprechen; in den hier beobachteten äussern Trichterfalten sehe ich Homologa der Pteropodenflossen, deren Zugehörigkeit in die Categorie der Fuss-Bildungen mir in hohem Grade zweifelhaft ist.

Als Homologon der innern Trichterfalten fasse ich den sogenannten »Halskragen« der Clione borealis, und ähnliche Bildungen anderer Pteropoden auf, deren paarige Anlage zur typischen Fussform auch nicht stimmen will. Als erste Andeutung des Fusses bei Pteropoden spreche ich dagegen den unpaaren »Halskragenzipfel« der Clione borealis an, von wo aus sich dann leichter der Uebergang zu den so vielfach durch Anpassung modificirten Formen des Fusses bei Heteropoden und Gasteropoden finden lässt.

Ueber die algebraischen Functionen und ihre Anwendung in der Geometrie.

Von

A. Brill und **M. Noether.**

Vorgelegt von M. A. Stern.

Die Riemann'sche Theorie der Abel'schen Functionen und das Werk von Clebsch und Gordan über dieselbe Disciplin bieten eine reiche und für die Geometrie theilweise noch unbenutzte Quelle für werthvolle algebraische Sätze und Begriffe. Es muss die Aufgabe der Algebra sein, diese interessanten Beziehungen zwischen algebraischen Gebilden, deren wesentliche Eigenschaft ihre Unabhängigkeit von rationalen Transformationen ist, direct und ohne die in den genannten Theorien angewandte Beihülfe transcendenter Sätze zu beweisen, um dieselben einerseits für ihr eignes Gebiet zu erwerben, andrerseits auch der Geometrie leichter zugänglich zu machen. Im Folgenden sollen daher die algebraischen Beweise für die Hauptsätze einer Theorie der algebraischen Functionen, unter jenem Gesichtspunkte betrachtet, gegeben werden.

Im § 1 wird die Anwendung des Abel'schen Theorems, wie sie in dem Clebsch-Gordan'schen Werke, ferner für die bei den Flächenabbildungen auftretenden speciellen Punktsysteme von Clebsch*) und nach dessen Vorgange von Noether**) häufig zur Untersuchung des Zusammenhangs zwischen verschiedenen Punktsystemen einer Curve gemacht worden ist, durch einen einfachen geometrischen Satz ersetzt, vermöge

*) S. z. B. Math. Ann. II, p. 459.
**) Math. Annal. III.

dessen einzelne Theile eines Schnittpunktsystems auf einer gegebenen Curve als für sich bestehende und von der speciellen Schnittcurve unabhängige Punktgruppen aufgefasst werden können. Mit Hülfe dieses Satzes wird auch (§ 3) der Weg für die Betrachtung der besondern Punktsysteme in der Ebene überhaupt offen gelegt. Eine Anwendung dieses Satzes liefert sodann (in § 2) die Sätze über die Schnittpunkte einer gegebenen Curve mit den von Riemann durch φ bezeichneten*) Curven, deren Invarianteneigenschaft bei rationaler Transformation nachgewiesen wird, wobei sich denn zugleich der, übrigens schon in dem Clebsch-Gordan'schen Werke algebraisch bewiesene, Geschlechtssatz ergibt. Die Aufstellung besonderer Systeme φ bei einer Curve mit allgemeinen Moduln, für welche die Aufgabe theilweise in dem genannten Werke, § 61, gestellt und von Brill**) für mehrere Fälle gelöst und auf die Aufsuchung der Normalcurven angewandt worden ist, wird in § 5 der Note weiter behandelt. Endlich liefert § 4 zwei Beweise für den von Riemann gefundenen, von Roch †) explicite gegebenen Satz von der Constantenanzahl in algebraischen Functionen.

Wir bemerken noch, dass die hier in §§ 1 bis 4 benutzte Methode sich nur auf den in diesen Nachrichten, 1872, Nr. 25 von Noether bewiesenen Satz stützt, daher der wesentlichen Forderung genügt, völlig unabhängig von Constantenzählung zu sein und somit auch für Cur-

*) Riemann, Abelsche Functionen, § 9 und 16.
**) Mathematische Annalen, Bd. II, p. 471; Bd. VI. p. 33.
†) Borchardt's Journal, 64, p. 372.

ven mit beliebig speciellen Moduln gültig bleibt. Ausführungen im Einzelnen und Erweiterungen werden an einem andern Orte gegeben werden.

§ 1
Der Aequivalenzsatz.

Die folgenden Betrachtungen beziehen sich auf eine algebraische, irreducible Curve $n$ter Ordnung, $S = 0$, welche eine Reihe von 2-fachen, ..., i-fachen, ... Punkten besitzen möge, so dass, über alle mehrfachen Punkte ausgedehnt:

$$\Sigma \frac{i(i-1)}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - p .$$

Die Curven $(n-3)$ter Ordnung, welche jeden i-fachen Punkt von S zum $(i-1)$-fachen Punkt besitzen, werden wir als Curven φ bezeichnen; die Curven höherer Ordnung, welche sich in den mehrfachen Punkten von S ebenso verhalten, als Curven vom Charakter der φ.

Wir beweisen den Aequivalenzsatz:

„Wenn auf S ein System von Gruppen von je N beweglichen Punkten, ausgeschnitten durch ein System von Curven C_s, $s$ter Ordnung und vom Charakter der φ, welche durch M feste Punkte von S gehen, bekannt ist, so kann man jenes Punktsystem noch durch unendlich viel andere, den C_s also äquivalente, Curvensysteme aus S ausschneiden". Diese werden auf folgende Weise construirt:

Sei C_s' eine beliebige der Curven C_s, welche S noch in einer Gruppe N' von N beweglichen

Punkten schneide. Durch diese N Punkte möge man eine beliebige Curve C_t', von der Ordnung t und vom Charakter der φ, legen können, welche S weiter in μ Punkten treffe. Alsdann bilden die durch diese μ Punkte gehenden Curven C_t, $t$ter Ordnung und vom Charakter der φ, eine Schaar, welche ebenso viele Parameter enthält, als die der C_s und S in denselben beweglichen Punktgruppen schneidet.

Denn man hat eine identische Relation:

$$C_s \,.\, C_t' \equiv A \,.\, C_s' + B \,.\, S,$$

da $C_s C_t'$ durch den vollständigen Schnitt von C_s' mit S hindurchgeht und jeden i-fachen Punkt von S, der zugleich $(i-1)$-facher Punkt von C_s' ist, noch zum $(2i-2)$-fachen Punkt hat *). Die hierdurch sich ergebenden Curven $A = 0$ sind aber die bezeichneten C_t.

Bilden daher die Gruppen von je N Schnittpunkten, also auch das System der C_s und das der C_t, eine q-fach unendliche Schaar, und kann man durch die Gruppe N' eine r-fach unendliche Schaar von Curven C_t' legen, so erhält man auf S auch eine r-fach unendliche Schaar von Gruppen von je μ Punkten, und zwar dieselbe, von welcher Gruppe von N Punkten man auch ausgegangen sein mag.

---

*) Siehe die oben citirte Note, diese Nachr. 1872, Nr. 25.

§ 2.

Besondere Punktgruppen. Invariantencharakter der Curven φ. Geschlechtssatz.

Während im Allgemeinen p der Schnittpunkte einer Curve C_s ($s \geqq n-2$) mit S durch die übrigen bestimmt sind, also ein System von Gruppen von je N Punkten ein $(N-p)$-fach unendliches ist, wobei denn die N Punkte in einer der Gruppen ganz willkürlich gewählt werden können, bildet ein solches System, wenn es von Curven φ ausgeschnitten wird, wenigstens eine $(N-p+1)$-fach unendliche Schaar (∞^{N-p+1}). Wir werden umgekehrt zeigen, dass jedes System von ∞^{N-p+1} Gruppen von je N Punkten, um so mehr also von je $N'(<N)$ Punkten, von Curven φ ausgeschnitten werden kann.

Dieser Satz braucht nur für eine einfach unendliche Schaar in diesem System, mit $N-p$ beliebigen weiteren festen Punkten, bewiesen zu werden. Denn hat man eine solche Schaar ersetzt durch ein Büschel von Curven φ, so enthält dasselbe noch, wegen der $N-p$ willkürlichen festen Punkte, $N-p$ weitere Constante, die, beliebig angenommen, zu allen Büscheln des Systems führen, also das Büschel dem gegebenen Curvensystem äquivalent machen.

Man kann nun zunächst die ∞^1 Gruppen von p Punkten nach dem Aequivalenzsatz ausschneiden durch ein Büschel von Curven C, $(n-2)$ter Ordnung und vom Charakter der φ, das noch weiter auf $Sn-2+p$ feste Basispunkte hat, von denen wenigstens $n-2$ Punkte beliebig

angenommen werden können. Nimmt man diese $n-2$ Punkte auf dem Schnitt einer Geraden mit S an, so fällt noch ein weiterer der festen Basispunkte in diesen Schnitt; denn diese Punkte sind dieselben, von welcher der ∞^1 Gruppen man auch ausgegangen sein mag, und bei der speciellen Gruppe, bei welcher ein Punkt in einen der beiden übrigen Schnittpunkte der Geraden mit S fällt, zerfällt die Curve C in die Gerade und eine Curve φ, so dass auch der letzte Schnittpunkt fest wird.

Die Curven C müssen hier also sämmtlich in die feste Gerade und ein Büschel von Curven φ zerfallen, wodurch die gesuchte Schaar construirt ist.

Wir setzen nun voraus, dass es, wenn S irreducibel ist, nur ∞^{p-1} Curven φ gibt (ein Satz, der sich als Corollar des ersten Beweises in § 4 ergeben wird) und werden beweisen, dass bei einer eindeutigen Transformation der Curve S in eine Curve S' immer die Curven φ in Bezug auf S und die analogen Curven φ' in Bezug auf S' als einander entsprechend angesehen werden können, und dass daher die Zahl p bei der Transformation erhalten bleibt.

Sei für S' diese Zahl p', und sei $p \geqq p'$. Dem Schnitt von S' mit den Curven φ' entsprechen auf S $\infty^{p'-1}$ Gruppen von je $2p'-2$ Punkten, die nach dem ersten Satze dieses § von Curven φ ausgeschnitten werden. Umgekehrt muss jedem Büschel φ, das S in ∞^1 Gruppen von je p Punkten schneidet, auch der Schnitt von S' mit einem Büschel φ' entsprechen. Denn für Büschel

höherer Ordnung, als die der φ' ist, sind die p Punkte irgend einer der ∞^1 Gruppen von je p Punkten auf S' ganz willkührlich zu nehmen, wenn $p > p'$; daher müssen auch auf S ∞^1 Gruppen von je p Punkten, von denen irgend eine der Gruppen ganz willkürlich genommen werden könnte, existiren, was nach der Voraussetzung nicht der Fall ist. Da ebensowenig $p' > p$ sein kann, so ist der Satz bewiesen.

§ 3.

Specielle Punktsysteme in der Ebene.

Die hier bewiesenen Sätze erlauben eine Anwendung auf die allgemeine Aufstellung der Curvenschaaren, deren Basispunkte, welche im Allgemeinen zum Theil vielfache sein sollen, ein specielles Punktsystem der Ebene bilden. Diese werden folgendermassen construirt:

Irgend eine der Curven der Schaar, oder vielmehr ein irreducibler Theil einer solchen, wird als Curve S angenommen. Kann man nun die ∞^q Punktgruppen, in welchen S von den übrigen Curven C_s der Schaar geschnitten wird, einfach definiren (und das geschieht immer, wenn die Gruppen nicht allgemein sind, durch Systeme von Curven φ), so ergibt der Aequivalenzsatz die Curven C_s, wenn diese vom Character der φ sein sollen, und die Schaar selbst ist dann

$$C_s + S \,.\, R = 0,$$

wo, wenn S von der $n$ten Ordnung, C_s von der $s$ten Ordnung ($s \geqq n$), R eine beliebige Curve

$(s-n)^{ter}$ Ordnung ist. Die Anzahl der in dieser Schaar linear enthaltenen Parameter ist

$$q + \frac{(s-n+1)(s-n+2)}{2}.$$

Soll die ganze Schaar einen i-fachen Punkt von S zum k-fachen Punkt besitzen ($k \geqq i$), so müssen $ki-(i-1)i$ der festen einfachen Schnittpunkte der C_s mit S in den i-fachen Punkt rücken, die Anzahl der Bedingungen erhöht sich aber um $\frac{k(k+1)}{2} - \frac{(i-1)i}{2}$, so dass für die Schaar

$$\varrho = \frac{k(k+1)}{2} - \frac{(i-1)i}{2} - i(k-i+1) = \frac{(k-i)(k-i+1)}{2}$$

äussere, von dem Schnitt mit S unabhängige, Bedingungen hinzutreten. $\Sigma\varrho$ sei so, für alle vielfachen Punkte genommen, die Gesammtzahl der äusseren Bedingungen. Alsdann erniedrigt sich die Anzahl der in

$$C_s + SR = 0$$

linear vorhandenen Parameter um $\Sigma\varrho$. Wenn aber die Anzahl $\sigma = \frac{(s-n+1)(s-n+2)}{2}$ der Constanten von R grösser oder gleich $\Sigma\varrho$ ist, so specialisirt sich durch die hinzugefügten Bedingungen nur R, ohne dass sich die festen einfachen Schnittpunkte der C_s mit S ändern. Für $\sigma < \Sigma\varrho$ dagegen vermindert sich die Willkürlichkeit in der Annah-

me dieser Schnittpunkte um $\Sigma\varrho-\sigma$; während jene ∞^q Gruppen von beweglichen Punkten immer unverändert bleiben.

§ 4.

Der Riemann-Roch'sche Satz.

In Bezug auf die Anzahl willkürlicher Constanten in algebraischen Functionen kann man allgemein den folgenden, bisher für die Geometrie noch nicht verwertheten, Satz aussprechen:

Wenn auf S ein linear q-fach unendliches System von Gruppen von je N Punkten existirt, wobei $q \geqq N-p+1$, so kann man durch die N Punkte irgend einer solchen Gruppe noch ∞^r Curven φ legen, wo

$$r = q - (N-p+1) \equiv (p-1) - (N-q);$$

d. h. jede Curve φ, welche durch $N-q$ der Punkte einer Gruppe gelegt wird, geht auch durch die übrigen q Punkte der Gruppe.

Dieser Satz, von Riemann in § 5 seiner Abelschen Functionen für den Fall $q = 1$ gegeben, ist in Borchardt's J. 64 von Roch auf dem von Riemann eingeschlagenen Wege allgemein bewiesen worden. Riemann hat, in Nr. 3 seiner Abhandlung „Ueber das Verschwinden der Thetafunctionen" *), einen zweiten Beweis des Satzes, ebenfalls für einen speciellen Fall, $N=p$, $p-1$ und $p-2$, gegeben, der sich indess ohne wesentliche Aenderung auf den allgemeinen Fall ausdehnen lässt. Ausserdem kann man den Satz

*) Borchardt's Journal, 66.

direct aus den Differentialgleichungen des Umkehrproblems, für den unbestimmten Fall desselben, schliessen. Wir geben hier zwei algebraische Beweise.

Erster Beweis. Zunächst können die Gruppen von je N Punkten, nach dem ersten Satze des § 2, aus S durch ∞^q Curven φ ausgeschnitten werden, welche auf S noch $M=2p-2-N$ feste Punkte, $y_1, y_2, \dots y_M$, gemein haben.

Wir legen jetzt durch diese M Punkte y_i und durch $q+1$ beliebige Punkte von S, $x_1, x_2, \dots, x_q, x$, die Schaar der Curven C_{n-2} ((n—2)ter Ordnung und vom Charakter der φ), die immer eine mehrfach unendliche ist, da man schon direct unendlich viele zerfallende Curven der Schaar angeben kann. Die Curven dieser Schaar schneiden S noch in Gruppen von je

$$N' = (2p+n-2) - (2p-2-N+q+1)$$
$$= (N-q) + (n-1)$$

Punkten.

Sodann legen wir wieder rückwärts durch die N' Punkte irgend einer dieser Gruppen, sowie durch $(p-1) - (N-q)$ beliebige Punkte $a_1, a_2, \dots a_{p-1-N+q}$ von S eine Curve (n—2)ter Ordnung C'_{n-2} (vom Charakter der φ), was immer möglich ist, da man wenigstens $p+n-2$ Parameter in einer Curve C'_{n-2} hat. Nach dem Aequivalenzsatz sind nun die übrigen p Schnittpunkte von C'_{n-2} mit S dieselben, durch welche der Gruppen von je N' Punkten man C_{n-2}

auch gelegt haben mag. Wir behaupten, dass zu diesen p übrigen Schnittpunkten von C'_{n-2} mit S die Punkte $x_1, x_2, \ldots x_q, x$ gehören.

Betrachten wir nämlich diejenige Gruppe von N' Punkten, in welcher S von einer zerfallenden Curve der Schaar der C_{n-2}, z. B. von der durch die M Punkte y_i und die q Punkte $x_1, \ldots x_q$ zu legenden Curve C_{n-3} (einer Curve φ) und einer beliebigen durch den Punkt x gehenden Geraden G geschnitten wird. Die Gruppe besteht dann aus den $N-q$ Punkten $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{N-q}$, in welchen C_{n-3}, und aus den $n-1$ Punkten, in welchen G noch schneidet.

Legt man die Curve C'_{n-2} durch diese Gruppe und durch die willkürlichen Punkte a_i von S, so zerfällt auch diese Curve in die Gerade G, und in eine durch die ξ_i, a_i gehende Curve C'_{n-3}. Und da G noch durch x geht, so wird somit der Punkt x einer der festen Schnittpunkte der Schaar der C'_{n-2} mit S.

Ebenso folgt, dass auch die Punkte $x_1, x_2 \ldots x_q$ solche feste Punkte für die Schaar der C'_{n-2} sind.

Da nun die Curve C'_{n-3}, welche durch die ξ_i und a_i geht, verbunden mit einer beliebigen Geraden durch x, zu der Schaar der C'_{n-2} gehört, so muss auch die Curve φ, C'_{n-3}, durch

die Punkte $x_1, \ldots x_q$ gehen, welches auch die $(p-1)-(N-q)$ Punkte a_i seien; w. z. b. w.

Es ist dabei zu bemerken, dass in Folge dieses Satzes auch r nicht grösser sein kann, als $(p-1)-(N-q)$; da der Satz auch umgekehrt q aus dem gegebenen r liefern muss. Für die obige Relation kann man auch schreiben:

$$M+N=2(p-1)$$
$$M-N=2(r-q).$$

Corollar. Der specielle Fall $M=0$ ergibt, dass es nur ∞^{p-1} Curven φ gibt. Denn wäre hier $q>p-1$, so wäre es möglich, durch die $2p-2$ Punkte, in welchen S von einer Curve φ geschnitten wird, wenigstens eine einfach unendliche Schaar von Curven φ zu legen, denen man sodann noch weitere Schnittpunkte mit S zutheilen könnte, wobei S aber zerfallen muss.

Zweiter Beweis. Wir deuten, wegen seiner Beziehungen zu weitern Punktsystemen der Ebene, einen zweiten Beweis an, der indess von beiden Sätzen des § 2 Gebrauch macht.

Zunächst möge die zu Grunde gelegte Curve eindeutig in eine Curve S, von genügend hoher Ordnung n, nur mit Doppelpunkten behaftet, vom Geschlecht p, transformirt werden. Durch M Punkte y_i (wobei $M \geqq p-1$ sei) mögen wieder ∞^q Curven φ gehen, $C'_{n-3} - \lambda C_{n-3} = 0$, welche die ∞^q Gruppen von je N Punkten ausschneiden.

Sei Γ'_{n-3} eine zweite der ∞^r Curven φ,

welche durch die Gruppe, in der C_{n-3} schneidet, hindurchgehen. So folgt, wie in § 1:

$$(1) \ldots C'_{n-3} \Gamma^{\varphi}_{n-3} - C_{n-3} \Gamma'_{n-3} \equiv S . \Gamma^{\varphi}_{n-6},$$

wo die $r-1$ willkürlichen Parameter, welche noch in der durch jene Gruppe gehenden Curve Γ_{n-3} der Schaar

$$\Gamma^{\varphi}_{n-3} - \mu C_{n-3} = 0$$

enthalten sind, auch ebenso in Γ^{φ}_{n-6} auftreten. Umgekehrt muss Γ^{φ}_{n-3} noch $r^{(1)}$ Parameter enthalten, wenn Γ^{φ}_{n-6} $r^{(1)}$ willkürliche Constanten besitzt.

Die Curve Γ^{φ}_{n-6} hat aber, damit man die Gleichung (1) aufstellen kann, nur der Bedingung zu genügen, durch die ausserhalb S liegenden Schnittpunkte von einer Curve C'_{n-3} mit C_{n-3} hindurchzugehen. Dieses sind

$$\frac{(n-6)(n-3)}{2} - 1 + p - M$$

Punkte $x^{(1)}$, welche eine der ∞^{q-1} Gruppen bilden, in welchen C_{n-3} von den C'_{n-3} geschnitten wird. Da diese Gruppen nun weiter aus C_{n-3} auch von ∞^{q-1} Curven C_{n-6} ausgeschnitten werden können, welche auf C_{n-3} noch

$$\frac{(n-6)(n-3)}{2}+1-p+M$$

feste Puncte $y^{(1)}$ haben, so hat man hier wieder das ursprüngliche Problem, nur in vereinfachter Gestalt.

Dieses wird nun in derselben Weise auf das folgende Problem reducirt: Wenn auf einer Curve C_{n-6} ∞^{q-2} Gruppen von je

$$\frac{(n-9)(n-6)}{2}-1+p-M$$

Punkten $x^{(2)}$ gegeben sind, die Anzahl der durch eine solche Gruppe gehenden Curven Γ^{ϱ}_{n-9} zu bestimmen, Hat man $\infty^{r(2)}$ solcher Curven, so ist $r=r^{(1)}+1=r^{(2)}+2$. Indem man so fortfährt, erhält man endlich eine Curve C_{n-3q}, auf welcher eine einzige Punktgruppe von

$$\frac{(n-3q-3)(n-3q)}{2}-1+p-M$$

Punkten $x^{(q)}$ gegeben ist, durch welche noch ∞^{M-p+1} Curven $\Gamma^{\varrho}_{n-3q-3}$ gelegt werden können; d. h. es ist

$$r^{(q)}=M-p+1$$

$$r=r^{(q)}+q=q+M-p+1, \quad \text{w. z. b. w.}$$

§ 5.

Anwendung auf die Reduction der Curven mit allgemeinen Moduln auf Normalformen.

Diese Reductionen hängen von der Lösung der algebraischen Aufgabe ab, für die allgemeine Curve S (Geschlecht p) specielle Curvensysteme φ zu construiren. Sollen M Punkte auf S von der Art gefunden werden, dass ∞^q Curven φ hindurchzulegen sind, so kann man von diesen Punkten

$$M-(q+1)(M-p+q+1)$$

willkürlich annehmen, wodurch die übrigen im Allgemeinen auf eine endliche Anzahl von Arten bestimmt sind. Da jene Zahl nach dem Satze des § 4 $\geqq r$ sein muss, so ergiebt sich die Grenze

$$p \geqq (q+1)(r+1),$$

oder ∞^r Gruppen auf S bestehen aus wenigstens je

$$\frac{r(r+p+1)}{r+1}$$

Punkten.

So bestehen ∞^1 Gruppen auf S aus mindestens je

$\frac{p}{2}+1$ Punkten für gerades p;

$\frac{p+3}{2}$ „ „ unger. p.

Die Aufstellung dieser von Riemann gegebenen Gruppen kann auf zwei verschiedene algebraische Probleme zurückgeführt werden, die für gerade p einander völlig ersetzen können.

Für gerade p kann man einmal zu $\frac{p}{2}-1$ gegebenen Punkten $p-2$ weitere von der Art suchen, dass durch diese $3(\frac{p}{2}-1)$ Punkte N noch ∞^1 Curven φ gehen.

Oder man kann zu einem gegebenen Punkte $\frac{p}{2}$ weitere von der Art suchen, dass durch diese $\frac{p}{2}+1$ Punkte M noch $\infty^{\frac{p}{2}-1}$ Curven φ gehen.

Der Riemann-Roch'sche Satz zeigt, dass jeder Lösung der einen Aufgabe eine solche der andern eindeutig entspricht. Beträgt diese Anzahl der Lösungen ϱ, so hat man auf $S\varrho$ Doppelsysteme von ∞^1 Gruppen M und $\infty^{\frac{p}{2}-1}$ Gruppen N, welche durch Lösung einer Gleichung ϱten Grades gefunden werden, so dass zwischen den ϱ Systemen kein Uebergang stattfindet. Dagegen kann man jede Gruppe M auf $\varrho-1$ Arten zu einer, von dem System, dem M angehört, verschiedenen Gruppe N erweitern.

In Bezug auf die Curven niedrigster Ordnung, auf welche man die Curve mit allgemeinen Moduln zurückführen kann, sprechen wir hier nur die folgenden Sätze als specielle Fälle aus:

Ebenso, wie für $p=6$ *) und $p=8$ ist auch für $p=7$ der Normalcurve niedrigster Ordnung eine Curve $p$ter Ordnung.

Für $3(i+2) > p \geqq 3(i+1)$ ist die Normalcurve die Curve $(p-i+1)$ter Ordnung mit $\frac{(p-i)(p-i-1)}{2} - p$ Doppelpunkten. Diese Curve hat dann noch, für $p=3(i+1)$, $3p-3$ Constanten, dagegen für $p=3i+4$ und $3i+5$ eine, resp. zwei Constanten mehr, welche durch specielle Transformationen beseitigt werden müssen.

---

*) S. Cremona und Casorati, „osservazioni" etc. Rend. Jst. Lomb. 13. Mai 1869; Brill „2. Note etc." Math. Ann. II.

Darmstadt, Heidelberg, 1873, Jan. 29.

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

26. Februar. № 5. 1873.

Universität.

Verzeichniss der Vorlesungen auf der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen während des Sommerhalbjahrs 1873. Die Vorlesungen beginnen den 15. April und enden den 15. August.

Theologie.

Erklärung der Genesis und ausgewählter Stücke aus den übrigen Büchern des Pentateuchs: Professor *Bertheau* sechsstündig um 10 Uhr.

Erklärung der Psalmen: Professor *de Lagarde* fünfstündig um 10 Uhr.

Einleitung in das Neue Testament: Prof. *Lünemann* fünfmal wöchentlich um 12 Uhr.

Theologie des Neuen Testaments: Prof. *Wiesinger* fünfmal um 12 Uhr.

Erklärung des Evangeliums Matthaei unter vergleichender Berücksichtigung der andern Synoptiker: Prof. *Zahn* fünfmal um 9 Uhr.

Erklärung des Evangeliums Johannis: Prof. *Lünemann* fünfmal um 9 Uhr.

Erklärung des Römerbriefs: Prof. *Wiesinger* fünfmal um 9 Uhr.

Erklärung des Briefs an die Hebräer: Prof. *Zahn* fünfstündig um 10 Uhr.

Kirchengeschichte: I. Hälfte: Prof. *Wagenmann* sechsstündig um 8 Uhr.

Kirchengeschichte II. Hälfte: Prof. *Duncker* sechsmal um 8 Uhr und zweimal (Dienst. und Freit.) um 7 Uhr.

21-8

Kirchengeschichte der neuesten Zeit: Professor *Wagenmann* vierstündig um 7 Uhr, öffentlich.

Reformationsgeschichte: Prof. *Duncker* zweimal, Mittwochs und Sonnabends um 7 Uhr, öffentlich.

Apologie oder Darstellung der Hauptlehren über Religion und Christenthum für Zuhörer aller Facultäten: Prof. *Ehrenfeuchter* viermal um 8 Uhr.

Dogmatik II. Theil: Prof. *Ritschl* fünfmal um 11 Uhr.

Theologische Ethik: Prof. *Schöberlein* sechsmal um 12 Uhr.

Praktische Theologie II. Theil (Liturgik, Homiletik, Theorie der Seelsorge und Kirchenverfassung): Prof. *Ehrenfeuchter* fünfmal von 3—4 Uhr.

Katechetik und Homiletik: Professor *Schöberlein* Mont. und Dienst. um 5 Uhr.

Liturgik: *Derselbe* Donnerst. u. Freit. um 5 Uhr.

Kirchenrecht: s. unter Rechtswissenschaft.

Die Uebungen des Königl. Homiletischen Seminars leiten abwechslungsweise Prof. *Ehrenfeuchter* und Prof. *Wiesinger* Sonnabends 9—12 Uhr öffentlich.

Katechetische Uebungen: Prof. *Wiesinger* Mittwochs 5—6 Uhr; Prof. *Wagenmann* Sonnabends 3—4 Uhr öffentlich.

Die liturgischen Uebungen der Mitglieder des praktisch-theologischen Seminars leitet Professor *Schöberlein* Sonnabends 9—11 Uhr und Mittwochs 6—7 Uhr öffentlich.

Eine theologische Societät leitet Prof. *Duncker*: eine dogmatische Societät Prof. *Schöberlein* Dienst. um 6 Uhr; eine exegetische Prof. *Wiesinger*; eine historisch-theologische Prof. *Wagenmann* Freit. 6 Uhr.

Die exegetischen, kirchenhistorischen und systematischen Conversatorien im theologischen Stift werden in gewöhnlicher Weise Montag Abends 6 Uhr von den Repetenten geleitet werden.

Repetent Lic. *Dorner* wird über Leben und Lehre Schleiermachers zweimal wöchentlich, Dienst. u. Donnerst., um 12 Uhr, unentgeltlich vortragen. — Repetent

Lemme wird zweimal wöchentlich um 4 Uhr das Buch der Richter, dreimal um 5 Uhr die Offenbarung Johannis cursorisch und unentgeltlich erklären. *Derselbe* erbietet sich zu einem dogmatischen Repetitorium.

Rechtswissenschaft.

Institutionen des römischen Rechts: Prof. *Francke* von 11—12 Uhr; Institutionen und Geschichte des römischen Rechts: Prof. *v. Jhering* täglich von 9—11 Uhr.

Pandekten mit Ausnahme der Lehren vom Eigenthum und den Jura in re, welche Prof. *Ribbentrop* vortragen wird: Prof. *Hartmann* täglich von 10—11 und von 11—12 Uhr.

Die Lehre vom Eigenthum und den übrigen dinglichen Rechten, als Theil der Pandekten: Prof. *Ribbentrop* sechsmal wöch. von 12—1 Uhr.

Erbrecht: Prof. *Francke* von 8—9 Uhr.

Ein Pandecten-Examinatorium verbunden mit exegetischen Uebungen hält Prof. *Ribbentrop* viermal wöchentlich von 5—6 Uhr.

Deutsche Rechtsgeschichte: Prof. *Dove* täglich von 8—9 Uhr.

Deutsches Privatrecht mit Lehn- und Handelsrecht: Prof. *Wolff* täglich von 7—9 Uhr; Deutsches Privatrecht einschliesslich des Lehnrechts: Prof. *Frensdorff* fünfmal wöch. von 8—10 Uhr.

Handelsrecht: Prof. *Thöl* fünfmal wöch. von 7—8 Uhr.

Preussisches Privatrecht: Prof. *Ziebarth* vierstündig um 5 Uhr.

Gemeines deutsches Criminalrecht: Prof. *Zachariae* sechsstündig um 11 Uhr.

Gemeines deutsches Staatsrecht: Professor *Zachariae* sechsstündig um 12 Uhr.

Kirchenrecht mit Einschluss des Eherechts: Dr. *Biering* täglich von 10—11 Uhr.

Theorie des Civilprocesses: Prof. *Hartmann* täglich von 12—1 Uhr und in zwei andern passenden Stunden.

Geschichte des Strafprozesses: Prof. *Ziebarth* Sonnabends um 11 Uhr öffentlich.

Deutscher Strafprocess: Prof. *Ziebarth* vierstündig um 11 Uhr.

Civilprocess-Practicum: Prof. *Briegleb* vierstündig.

Criminalistische Uebungen: Prof. *Ziebarth* Mittwoch von 4–6 Uhr oder zu anderer passender Stunde, privatissime, aber unentgeltlich.

Medicin.

Zoologie, Botanik, Chemie s. unter Naturwissenschaften.

Systematische Anatomie II. Theil (Gefäss- und Nervenlehre): Prof. *Henle*, täglich von 12—1 Uhr.

Allgemeine Anatomie: Prof. *Henle*, Montag, Mittwoch, Freitag von 11—12 Uhr.

Mikroskopische Curse im pathologischen Institut hält Prof. *Krause* wie bisher in der normalen Gewebelehre um 11 Uhr, in der pathologischen um 12 Uhr oder um 2 Uhr.

Allgemeine und besondere Physiologie mit Erläuterungen durch Experimente und mikroskopische Demonstrationen: Prof. *Herbst* sechsmal wöchentlich um 10 Uhr.

Experimentalphysiologie I. Theil (Physiologie der Ernährung): Prof. *Meissner* täglich von 10—11 Uhr.

Physiologie der Zeugung nebst allgemeiner und specieller Entwicklungsgeschichte: Prof. *Meissner*, Freitag von 5–7 Uhr.

Physiologische Optik s. S. 141.

Arbeiten im physiologischen Institut leitet Prof. *Meissner* täglich in passenden Stunden.

Allgemeine Pathologie: Prof. *Krause*, Montag und Donnerstag von 4—5 Uhr.

Pathologisch-anatomische Demonstrationen hält Prof. *Krause* Dienstag, Mittwoch und Freitag von 4—5 Uhr.

Physikalische Diagnostik verbunden mit praktischen Uebungen an Gesunden und Kranken trägt Dr. *Wiese* viermal wöchentlich in später näher zu bezeichnenden Stunden vor.

Pharmakologie oder Lehre von den Wirkungen und der Anwendungsweise der Arzneimittel so wie Anleitung zum Receptschreiben: Prof. *Marx* Montag, Dienstag, Donnerstag und Freitag von 3—4 Uhr.

Arzneimittellehre und Receptirkunde verbunden mit pharmakognostischen Demonstrationen und Versuchen an Thieren trägt Prof. *Husemann* fünfmal wöchentlich um 3 Uhr oder zu gelegenerer Zeit vor.

Arzneimittellehre und Receptirkunst in Verbindung mit pharmakognostischen Demonstrationen und pharmakodynamischen Experimenten lehrt Prof. *Marmé* fünfmal wöchentlich von 5—6 Uhr.

Pharmakognosie lehrt Prof. *Wiggers* fünfmal wöchentlich von 2—3 Uhr nach seinem Handbuche der Pharmakognosie, 5. Aufl. Göttingen 1864.

Pharmacie lehrt Prof. *Wiggers* sechsmal wöchentlich von 6—7 Uhr Morgens; Dasselbe lehrt Dr. *Stromeyer* privatissime.

Pharmaceutische Chemie und organische Chemie für Mediciner: Vgl. Naturwissenschaften S. 142.

Ein pharmakologisches Repetitorium hält Professor *Marmé* in passenden Stunden privatissime und gratis.

Ausgewählte Capitel der Toxikologie für Mediciner und Pharmaceuten trägt Prof. *Husemann* Freitag von 4—5 Uhr öffentlich vor.

Pharmokologische und toxikologische Untersuchungen leitet Prof. *Marmé* im physiologischen Institut zu passenden Stunden.

Praktische Uebungen in Bezug auf Toxikologie und Pharmakologie leitet Prof. *Husemann* privatissime und gratis in später zu bestimmenden Stunden.

Elektrotherapeutische Curse hält Prof. *Marmé* im Ernst-August-Hospital Dienstag und Donnerstag von 2—3 Uhr.

Specielle Pathologie und Therapie: Prof. *Hasse* Dienstag, Mittwoch, Donnerstag und Freitag von 7—8 Uhr.

Die medicinische Klinik und Poliklinik leitet Prof. *Hasse* täglich von $10^1/_2$—12 Uhr.

Chirurgie I. Theil: Prof. *Baum* fünfmal wöchentlich von 4—5 Uhr, Sonnabend von 3—4 Uhr.

Specielle Chirurgie trägt Prof. *Lohmeyer* täglich von 7—8 Uhr vor.

Ueber Knochenbrüche und Verrenkungen trägt Prof.

Baum Mittwoch und Sonnabend von 2—3 Uhr publice vor.

Ueber Wundkrankheiten, verbunden mit mikroskopischen Demonstrationen, liest Dr. *Rosenbach* publice.

Verbandlehre mit praktischen Uebungen trägt Dr. *Rosenbach* zweimal wöchentlich vor.

Augenheilkunde lehrt Prof. *Leber* vier Mal wöchentlich von 3—4 Uhr.

Die chirurgische Klinik und Poliklinik im Ernst-August-Hospitale hält Prof. *Baum* täglich um 9 Uhr.

Chirurgische Klinik hält Prof. *Lohmeyer* von 9—10 Uhr.

Die Klinik der Augenkrankheiten hält Prof. *Leber* Montag, Dienstag, Donnerstag u. Freitag von 12—1 Uhr.

Uebungen in chirurgischen Operationen an der Leiche leitet Prof. *Baum* im Anatomiegebäude so oft Leichen vorhanden von 5 Uhr Nachm. an.

Augenspiegelcursus hält Prof. *Leber* Mittwoch und Sonnabend von 12—1 Uhr.

Gynaekologie trägt Prof. *Schwartz* Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag um 3 Uhr vor.

Ueber die Krankheiten der Wöchnerinnen trägt Dr. *Hartwig* Dienstag und Freitag von 4—5 Uhr vor.

Geburtshülflichen Operationscursus am Phantom hält Dr. *Hartwig* Mittwoch und Sonnabend um 8 Uhr.

Gynaekologische Klinik leitet Prof. *Schwartz* Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag um 8 Uhr.

Ein geburtshülfliches Repetitorium hält Dr. *Hartwig* in näher zu verabredenden Stunden.

Pathologie und Therapie der Geisteskrankheiten lehrt Prof. *Meyer* Mittwoch und Sonnabend von 3—4 Uhr.

Psychiatrische Klinik hält Prof. *Meyer* Montag und Donnerstag von 4—6 Uhr.

Sanitätspolizei lehrt Prof. *Lohmeyer* fünfmal wöchentlich von 11—12 Uhr.

Gerichtliche pathologische Anatomie lehrt Professor *Krause* öffentlich Dienstag von 5—6 Uhr.

Die Lehre von den Krankheiten der Hausthiere in Verbindung mit klinischen Demonstrationen im Thierhospitale trägt Dr. *Luelfing* wöchentlich sechsmal von 7—8 Uhr vor.

Philosophie.

Geschichte der alten Philosophie Prof. *Baumann*, Mont. Dienst. Donnerst. Freit. 5 Uhr.

Logik verbunden mit Erklärung von Trendelenburgs elementa logices aristoteleae: Prof. *Baumann*, Montag, Dienst. Donnerst. Freit. 8 Uhr.

Logik: Prof. *Peip*, Dienst. Mittw. Donnerst. Freit. 7 Uhr.

Inductive Logik, mit besonderer Anwendung auf die Probleme der Naturwissenschaft: Dr. *Stumpf*, Montag, Dienst. Donnerst. 9 Uhr.

Metaphysik: Prof. *Lotze* 4 St. 10 Uhr.

Psychologie: Prof. *Bohtz*, Mont. Dienst. u. Freit. 4 Uhr.

Religionsphilosophie: Prof. *Lotze*, 4 St., 4 Uhr.

Ueber die Hauptsysteme der philosophischen Ethik: Prof. *Peip*, Donnerstag 6—8 Uhr Abends (privatissime, aber unentgeltlich).

Grundlinien der Rhetorik: Prof. *Krüger* (privatissimè).

Prof. *Baumann* wird in einer philosophischen Societät, Dienst. 6 Uhr, Kants Kritik der praktischen Vernunft behandeln, und in einer andern, Freit. 6 Uhr, das zweite Buch von Aristoteles Physik.

Prof. *Peip* wird in seinen philosophischen Societäten Nachm. 5—6 Uhr am Dienstag Kants »Prolegomena zu einer jeden künftigen Metaphysik«, am Freitag Desselben »Grundlegung zur Metaphysik der Sitten« behandeln.

Dr. *Peipers* wird in seiner philosophisch-philologischen Societät Abschnitte aus Ritters und Prellers historia philosophiae graecae et romanae Mittw. um 6 Uhr behandeln.

Dr. *Stumpf* wird in seiner philosophischen Societät ausgewählte Kapitel der aristotelischen Metaphysik erklären, Freitag 6 Uhr.

Geschichte der Erziehung: Prof. *Krüger*, 2 St., 4 Uhr.

Die Uebungen des K. pädagogischen Seminars leitet Prof. *Sauppe*, Donnerst. und Freit. 11 Uhr.

Mathematik und Astronomie.

Praktische Geometrie mit Uebungen im Felde: Prof. *Ulrich* 4 mal wöch., von 5—7 Uhr.

Theorie der Zahlengleichungen: Prof. *Stern*, 4 St., 8 Uhr.

Differential- und Integralrechnung: Prof. *Stern*, 5 St. 7 Uhr.

Theorie der elliptischen Functionen: Prof. *Enneper*, Mont. bis Freit. 10 Uhr.

Partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung und deren Anwendung auf die Lehre vom Schall, von der Wärme und von den galvanischen Strömen: Prof. *Schering*, Mont. Dienst. Donnerst. Freit., 9 Uhr.

Variationsrechnung und deren Anwendung auf analytische Geometrie, auf analytische Mechanik und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung: Prof. *Schering*, Mont. Dienst. Donnerst. Freit. 12 Uhr.

Theorie der Determinanten: Prof. *Enneper*, Mittw. u. Freit. 11 Uhr.

Wahrscheinlichkeitsrechnung: Prof. *Schering*, für die Mitglieder des math. physikalischen Seminars.

Theorie der Kräfte, welche nach dem Newtonschen Gesetz wirken: Dr. *Minnigerode*, 4 St.

Hydrostatik: Prof. *Ulrich*, 4 St., 10 Uhr.

Sphärische Astronomie: Prof. *Klinkerfues*, Mont. Dienst. Donnerst. und Freit. um 12 Uhr.

Zur Leitung einer mathematischen Societät in geeigneten Stunden erbietet sich Prof. *Schering*.

In dem mathematisch-physikalischen Seminar trägt Prof. *Stern* über die Anziehung eines Ellipsoids vor und giebt Professor *Klinkerfues* einmal wöch. Anleitung zu astronomischen Beobachtungen. — Vgl. Naturwissenschaften S. 141.

Naturwissenschaften.

Zoologie in allgemeiner übersichtlicher Behandlung: Prof. *Claus*, täglich (mit Ausnahme des Sonnabends), 8 Uhr.

Vergleichende Anatomie des Urogenitalapparats der Vertebraten: *Derselbe* öffentlich Sonnabend um 8 Uhr.
Vergleichende Entwicklungsgeschichte der Wirbelthiere und wirbellosen Thiere: *Derselbe*, in 4 zu verabredenden Stunden.
Zoologische Uebungen: *Derselbe* privatissime.

Allgemeine und specielle Botanik: Prof. *Bartling*, 6 St. 7 Uhr. — Ueber die einheimischen Gewächse mit besonderer Berücksichtigung der nutzbaren und schädlichen Arten: *Derselbe*, 5 St. 8 Uhr. — Botanische Excursionen veranstaltet *Derselbe* in bisheriger Weise, Demonstrationen im botanischen Garten hält er in passenden Stunden.
Allgemeine und specielle Botanik: Prof. *Grisebach*, 6 St., 7 Uhr, in Verbindung mit Excursionen. — Ueber Arzneipflanzen: *Derselbe*, Mont. Dienst. Donnerst. und Freit., 8 Uhr. — Praktische Uebungen in der systematischen Botanik: *Derselbe*, Mittw. 10 Uhr.

Mineralogie: Prof. *Sartorius von Waltershausen*, 5 St., 11 Uhr. — Das mineralogische Practicum hält *Derselbe* wie bisher Donnerst. Nachmittag 2—4 Uhr und Sonnabend Vormittag 9—12 Uhr.
Geognosie: Prof. *von Seebach*, 5 St., 8 Uhr, verbunden mit Excursionen.
Praktische Uebungen leitet *Derselbe* privatissime, aber unentgeltlich, in gewohnter Weise.

Physik, ersten Theil, trägt Prof. *Weber* vor, Montag, Dienstag, Donnerstag und Freitag, 5—6 Uhr.
Optik, einschliesslich der Krystalloptik: Prof. *Listing*, 4 St. um 12 Uhr.
Ueber das Auge und das Mikroskop: Prof. *Listing*, privatissime in 2 bequemen Stunden.
Physikalisches Colloquium: Prof. *Listing*, Sonnabend 11—1 Uhr.
Praktische Uebungen im Physikalischen Laboratorium in Gemeinschaft mit Dr. *Neesen* leitet wie bisher Dr. *Riecke*.
In dem mathematisch-physikalischen Seminar leitet

physikalische Uebungen Prof. *Listing*, Mittwoch 11 Uhr. Vgl. Mathematik S. 139.

Mathematische Physik: vgl. Mathematik S. 139.

Chemie: Prof. *Wöhler*, 6 St. 9 Uhr.

Allgemeine organische Chemie: Prof. *Hübner*, Montag bis Freitag 12 Uhr. — Organische Chemie, für Mediciner: Prof. *von Uslar*, in später zu bestimmenden Stunden. — Organische Chemie, speciell für Mediciner: Dr. *Tollens*, 2 St. 6 Uhr Abends.

Organisch-technische Chemie: *Derselbe*, 2 St., 8 Uhr.

Einzelne Zweige der theoretischen Chemie: Dr. *Stromeyer*, privatissime.

Die Grundlehren der neueren Chemie: Prof. *Hübner*, Sonnabend 12 Uhr.

Pharmaceutische Chemie: Prof. *von Uslar*, 4 St., 4 Uhr.

Die Vorlesungen über Pharmacie und Pharmacognosie s. unter Medicin S. 137.

Die praktisch-chemischen Uebungen und Untersuchungen im akademischen Laboratorium leitet Prof. *Wöhler* in Gemeinschaft mit den Assistenten Prof. *von Uslar*, Prof. *Hübner*, Dr. *Tollens* und Dr. *Jannasch*.

Prof. *Boedeker* leitet die praktisch-chemischen Uebungen im physiologisch-chemischen Laboratorium, täglich (ausser Sonnabend) 8—12 und 3—5 Uhr.

Ueber die Leitung des chemischen Praktikums im agriculturchemischen Laboratorium wird später Anzeige erfolgen.

Historische Wissenschaften.

Einleitung in das Studium der allgemeinen Erdkunde: Prof. *Wappäus*, 10 Uhr.

Diplomatik, Fortsetzung des besondern Theils: Dr. *Steindorff*, einmal, 5—7 Uhr, unentgeltlich.

Allgemeine Geschichte des Mittelalters: Prof. *Pauli*, 4 St., 10 Uhr.

Geschichte des Zeitalters der Reformation: Dr. *Alfred Stern*, Mont. Dienst. Donnerst. Freit. 12 Uhr.

Deutsche Geschichte seit dem Jahre 1806: Prof. *Waitz*, 4 St., 4 Uhr.

Geschichte der Wiedergeburt Preussens (1807—1813): Dr. *Alfred Stern*, 1 St., unentgeltlich.

Geschichte Grossbritanniens seit 1688: Prof. *Pauli*, 4 St., 5 Uhr.

Geschichte der Normannen, insbesonders der unteritalischen: Dr. *Steindorff*, 2 St., 12 Uhr.

Historische Uebungen leitet Prof. *Waitz*, Freitag 6 Uhr, öffentlich. Historische Uebungen leitet Prof. *Pauli* Mittw. 6 Uhr, öffentlich. Historische Uebungen über Deutsche Geschichtsquellen des 16. Jahrhunderts leitet Dr. *Stern*, einmal, unentgeltlich.

Uebungen in der alten Geschichte leitet Professor *Wachsmuth*, 1 St., öffentlich.

Kirchengeschichte: s. unter Theologie S. 133 f.

Staatswissenschaft und Landwirthschaft.

Politik: Prof. *Waitz*, 4 St., 8 Uhr.

Nationalökonomie (Volkswirthschaftslehre): Prof. *Hanssen*, 5 St., 9 Uhr.

Ueber öffentliche Armenpflege: Prof. *Hanssen*, Sonnabend 9 Uhr, öffentlich.

Polizeiwissenschaft: Dr. *Dede*, Dienst. Donnerst. Freit. 12 Uhr, privatissime.

Der Thee, als Lebensmittel und Consumtionsartikel: Dr. *Dede*, Mittw. 12 Uhr, unentgeltlich.

Kameralistische Disputationen und Excursionen: Prof. *Hanssen*, in noch zu bestimmenden Stunden, privatissime, aber unentgeltlich.

Kameralistische Uebungen: Prof. *Soetbeer*, privatissime, aber unentgeltlich, in später zu bestimmenden Stunden.

Einleitung in das landwirthschaftliche Studium: Prof. *Drechsler*, 1 St.

Ackerbaulehre, allgemeiner und specieller Theil: *Derselbe*, Mont. Dienst. Donnerst. Freit. 12 Uhr.

Die Theorie der Organisation der Landgüter: Prof. *Griepenkerl*, Mont. Dienst. Donnerst. Freit. 8 Uhr.

Die landwirthschaftliche Thierproductionslehre (Lehre von den Racen, der Züchtung, Ernährung und Pflege des Pferdes, Rindes, Schafes und Schweines): *Derselbe*, Mont. Dienst. Donnerst. Freit. 10 Uhr.

Die Ackerbausysteme: *Derselbe*, in 2 passenden Stunden, öffentlich.

Im Anschluss an diese Vorlesungen werden Demonstrationen auf benachbarten Landgütern und in Fabriken, sowie praktische Uebungen gehalten werden.

Ueber Heuwerth und Futtermischung: Prof. *Henneberg*, Mittw. 11—1 Uhr, öffentlich.

Landwirthschaftliches Practicum (Uebungen im Anfertigen landwirthsch. Berechnungen; im Gebrauch des Mikroskops): Prof. *Drechsler*, in noch zu bestimmenden Stunden.

Excursionen auf benachbarte Güter: *Derselbe*, Mittwoch Nachmittag.

Krankheiten der Hausthiere: s. Medicin S. 138.

Chemisches Practicum: s. Naturwiss. S. 142.

Literärgeschichte.

Literaturgeschichte: Prof. *Hoeck*.

Geschichte der Philosophie: vgl. Philosophie S. 7.

Geschichte der Prosa der Griechen: Prof. *v. Leutsch*, 4 St., 4 Uhr.

Geschichte der deutschen Nationalliteratur von Lessings Zeit bis zur Gegenwart: Prof. *Bohtz*, Mont. Dienst. Donnerst. Freit. 11 Uhr.

Geschichte der deutschen Dichtung, Theil I: Assessor *Tittmann*, 5 St., 9 Uhr.

Uebersicht der Geschichte der deutschen Dichtung von Hans Sachs bis Opitz: Dr. *Wilken*, 2 St., unentgeltlich.

Vgl. Griech. und Lat. Sprache S. 145.

Alterthumskunde.

Griechische Alterthümer: Prof. *Wachsmuth*, 4 St., 12 Uhr.

Griechische und römische Kunstarchäologie: Prof. *Wieseler*, 4 oder 5 St., 8 Uhr.

Archäologische Kritik und Hermeneutik: Prof. *Wieseler*, Mittw. 8 Uhr und Sonnabends 10 Uhr.

Geschichte der alten Kunst nach Alexander dem Grossen: Dr. *Mats*.

Im K. archäologischen Seminar wird Prof. *Wieseler* öffentlich ausgewählte Kunstwerke erklären lassen, Sonnab. 12 Uhr.

Die Abhandlungen der Mitglieder wird *Derselbe* privatissime beurtheilen, wie bisher.

Zur Leitung einer archäologischen Societät erbietet sich Dr. *Matz*.

Orientalische Sprachen.

Die Vorlesungen über das A. und N. Testament s. unter Theologie S. 133. 135.

In der arabischen und äthiopischen Sprache ertheilt Unterricht Prof. *Bertheau* 2 Uhr, öffentlich.

Ausgewählte Stücke aus arabischen Schriftstellern erklärt Prof. *Wüstenfeld*, privatissime.

Seine Vorlesung über syrische Sprache setzt Prof. *de Lagarde* Dienst. und Freit. 9 Uhr fort.

Vergleichende Grammatik der vier indogermanischen Hauptsprachen: Sanskrit, Griechisch, Lateinisch und Deutsch: Prof. *Benfey*, 5 St., 4 Uhr.

Erklärung von Sanskritgedichten: Prof. *Benfey*, Mont. Dienst. Donnerst. 5 Uhr.

Griechische und lateinische Sprache.

Geschichte der Prosa der Griechen: s. Literärgeschichte S. 144.

Platons Theaetet: Dr. *Peipers*, Mont. Dienst. Donnerst. Freit. 8 Uhr.

Demosthenes Rede für den Kranz: Prof. *Sauppe*, Mont. Dienst. Donnerst. Freit. 9 Uhr.

Aristoteles Physik, u. Metaphysik: vgl. Philos. S. 139.

Lehre vom lateinischen Stil, mit praktischen Uebungen: Prof. *Sauppe*, Mont. Dienst. Donnnerst. Freit., 7 Uhr früh.

Erklärung der Historien des Tacitus: Prof. *von Leutsch*, 4 St., 10 Uhr.

Iuvenals Satiren: Dr. *Matz*.

Im K. philologischen Seminar leitet die schriftlichen Arbeiten und Disputationen Prof. *von Leutsch*, Mittw. 11 Uhr, lässt ausgewählte Reden des Lysias erklären Prof. *Sauppe*, Mont. und Dienst., 11 Uhr, lässt Statius'

Silven Prof. *Wachsmuth* erklären, Donnerst. u. Freit., 11 Uhr, alles öffentlich.

Im philologischen Proseminar leiten die schriftlichen Arbeiten und Disputationen die Proff. *von Leutsch*, *Sauppe* und *Wachsmuth*, Mittwoch 2 und 3 Uhr, Sonnabend 11 Uhr; lässt ausgewählte Reden des Lysias Prof. *Sauppe* Mittw. 2 Uhr, Statius Silven Prof. *Wachsmuth*, Sonnabend 11 Uhr, erklären, alles öffentlich.

Deutsche Sprache.

Historische Grammatik der deutschen Sprache: Prof. *Wilh. Müller*, 5 St. 3 Uhr.

Die Gedichte Walthers von der Vogelweide erklärt Prof. *Wilh. Müller*, Dienst. Mittw. Freit. 5 Uhr.

Die Grundzüge der altsächsischen Sprache lehrt und den Heliand erklärt *W. Müller*, Mont. und Donnerst. 10 Uhr.

Die Gudrun erläutert, mit literarischer und metrischer Einleitung, Dr. *Wilken*, Mittwoch und Sonnabend 10 Uhr.

Geschichte der deutschen Literatur: vgl. Literärgeschichte S. 11.

Die Uebungen der deutschen Gesellschaft leitet Prof. *Wilh. Müller*.

Altdeutsche Gesellschaft: Dr. *Wilken*, Freitag 6 Uhr.

Neuere Sprachen.

Prof. *Th. Müller* wird privatim Shakespeare's König Lear erklären, Mont. Dienst. u. Donnerst. 9 Uhr;

Uebungen in der französischen und englischen Sprache veranstaltet *Derselbe*, die ersteren Mont. Dienst. u. Mittwoch 12 Uhr, die letzteren Donnerstag Freitag u. Sonnab. 12 Uhr.

Oeffentlich wird er in der romanischen Societät die provenzalische Sprache lehren.

Schöne Künste. — Fertigkeiten.

Ausgewählte Kunstdenkmäler des Mittelalters erklärt Prof. *Unger* in einer noch zu bestimmenden Stunde.

Unterricht im Zeichnen, wie im Malen, ertheilen Zeichenmeister *Grape*, und, mit besonderer Rücksicht auf naturhistorische und anatomische Gegenstände, Zeichenlehrer *Peters*.

Geschichte der Musik von Palestrina bis Beethoven: Prof. *Krüger*, zwei Stunden, 12 Uhr.

Harmonie- und Kompositionslehre, verbunden mit praktischen Uebungen: Musikdirector *Hille*, in passenden Stunden.

Zur Theilnahme an den Uebungen der Singakademie und des Orchesterspielvereins ladet *Derselbe* ein.

Reitunterricht ertheilt in der K. Universitäts-Reitbahn der Univ.-Stallmeister *Schweppe*, Mont., Dienst., Donnerst., Freit., Sonnab., Morgens von 7—11 und Nachm. (ausser Sonnab.) von 4—5 Uhr.

Fechtkunst lehrt der Universitätsfechtmeister *Grünekłee*, Tanzkunst der Universitätstanzmeister *Höltzke*.

Oeffentliche Sammlungen.

Die *Universitätsbibliothek* ist geöffnet Montag, Dienstag, Donnerstag und Freitag von 2 bis 3, Mittwoch und Sonnabend von 2 bis 4 Uhr. Zur Ansicht auf der Bibliothek erhält man jedes Werk, das man in gesetzlicher Weise verlangt; über Bücher, die man geliehen zu bekommen wünscht, giebt man einen Schein, der von einem hiesigen Professor als Bürgen unterschrieben ist.

Das *zoologische* und *ethnographische Museum* ist Dienstag und Freitag von 3—5 Uhr geöffnet.

Die *geognostisch-paläontologische Sammlung* ist Mittw. von 3—5 Uhr geöffnet.

Die *Gemäldesammlung* ist Donnerstag von 11—1 Uhr geöffnet.

Der *botanische Garten* ist, die Sonn- und Festtage ausgenommen, täglich von 5—7 Uhr geöffnet.

Ueber den Besuch und die Benutzung des *Theatrum anatomicum*, des *physiologischen Instituts*, der *pathologischen Sammlung*, der *Sammlung von Maschinen und Modellen*, des *zoologischen* und *ethnographischen Museums*, des *botanischen Gartens*, der *Sternwarte*, des *physikalischen Cabinets*, der *mineralogischen* und der *geognostisch-paläontologischen Sammlung*, der *chemischen Laboratorien*, des *archäologischen Museums*, der *Gemäldesammlung*, der *Bibliothek des k. philologischen Seminars*, des *diplomatischen Apparats*, bestimmen besondere Reglements das Nähere.

Bei dem Logiscommissär, Pedell *Fischer* (Burgstr. 42), können die, welche Wohnungen suchen, sowohl über die Preise, als andere Umstände Auskunft erhalten, und auch im voraus Bestellungen machen.

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

26. Februar. № 6. 1873.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Die Schwerkraft in mehrfach ausgedehnten Gaussischen und Riemannschen Räumen.

Ernst Schering.

Für die Schwerkraft im dreifach ausgedehnten Gaussischen Raume habe ich in diesen Nachrichten vom 13. Juli 1870 das Fundamentalgesetz und einige Lehrsätze über ihre wesentlichsten Eigenschaften aufgestellt. Mit diesem Gegenstande hat auch Dirichlet, wie ich jetzt erfahren, in der letzten Zeit seines Aufenthalts in Berlin sich beschäftigt; er hat darüber mit seinen Freunden gesprochen ohne von den Resultaten seiner Untersuchungen Mittheilung zu machen.

Die Aufstellung der Gesetze für fingirte Kräfte in solchen Räumen, von welchen der uns umgebende nur ein specieller Fall ist, hat für uns einmal die Bedeutung, dass wir uns von der naturgemässen Form der Gesetze für die uns bekannten Kräfte ein besseres Urtheil verschaffen, denn aber auch die Bedeutung, dass die Untersuchung solcher allgemeinerer Gesetze uns Aussicht bietet, das Gebiet der reinen Ana-

lysis durch neue Hülfsmittel ähnlich zu erweitern, wie es durch die Untersuchung der bekannten Naturkräfte so vielfach geschehen ist. Diese Hoffnung hat sich schon bei einem Falle erfüllt durch Herrn Kroneckers Arbeiten »Ueber Systeme von Funktionen mehrer Variabeln«. Die Eigenschaft der Schwerkraft im mehrfach ausgedehnten ebenen Raume hat dort Veranlassung zur Einführung des in der Analysis so fruchtbaren Begriffes der »Charakteristik eines Systems von Functionen« gegeben. Zu den dort aufgestellten Lehrsätzen will ich hier noch den folgenden hinzufügen:

Lehrsatz I. Sind $\mathfrak{R}_n$ R_n und P_n Raumtheile die sich in beliebiger Weise decken, durchdringen, können, sind $x_1 . x_\nu .. x_n$ die n geradliniger rechtwinkligen Coordinaten von einem Punkte des Raumelements dR_n in einem $n$fach ausgedehnten ebenen Raume, $\xi_1 .. \xi_\nu .. \xi_n$ die Coordinaten von einem Punkte des Raumelements dP_n, $a_1 .. a_\nu .. a_n$ die Coordinaten eines Punktes des Raumelementes dR_n oder auch eines Punktes im Elemente $d\mathfrak{R}_{n-1}$, welches einer den Raumtheil $\mathfrak{R}_n$ vollständig begrenzenden $n-1$ fach ausgedehnten räumlichen Gestalt $\mathfrak{R}_{n-1}$ angehört, sind $m(.. x_\nu ..)$ und $\mu(.. \xi_\nu ..)$ Functionen der Coordinaten für Punkte innerhalb der Raumtheile R_n nnd P_n, bezeichnet r den positiven Werth von $\sqrt{\Sigma (x_\nu - a_\nu - \xi_\nu)^2}$, $d\mathfrak{N}$ die Normale zur räumlichen Gestalt $d\mathfrak{R}_{n-1}$ im Punkte $.. a_\nu ..$ nach

derjenigen Seite, wo sich der Raumtheil $\Re_n$ befindet hat die Π Function die bei Gauss gebräuchliche Bedeutung, ist

$$K(n)=2(4\pi)^{\frac{n-1}{2}}\cdot\frac{\Pi\frac{n-1}{2}}{\Pi(n-1)} \text{ für ein ungerades } n$$

$$K(n)=2\pi^{\frac{n}{2}}\cdot\frac{1}{\Pi\frac{n-2}{2}} \text{ für ein gerades } n$$

und setzt man

$$\iint m(x_1, x_2)\,\mu(\xi_1, \xi_2)\log\frac{1}{r}\,.\,dR_2\,dP_2=\Phi$$

für $n=2$, dagegen

$$\iint\frac{m(..x_\nu..)\,.\,\mu(..\xi_\nu..)}{(n-2)\,r^{n-2}}\,dR_n\,dP_n=\Phi$$

für $n>2$ so ist:

$$\int\frac{\partial\Phi}{\partial\Re}d\Re_{n-1}=K(n)\iint m(..x_\nu..)\,\mu(...\xi_\nu..)\,dR'_n\,dP'_n$$

worin das Integral in Bezug auf $d\Re_{n-1}$ über die ganze den Raumtheil $\Re_n$ begrenzende Raumgestalt $\Re_{n-1}$ auszudehnen ist.

Die Integrale in Bezug dR_n und dP_n er-

strecken sich über die ganzen Raumtheile R_n und P_n aber die Integrale in Bezug auf dR'_n und dP'_n nur über alle solche Elementenpaare dR'_n mit dem Punkte $x_1 .. x_\nu .. x_n$ und dP'_n mit dem Punkte $\xi_1 .. \xi_\nu .. \xi_n$, welche beziehungsweise in den Raumtheilen R_n und P_n liegen und durch $x_1 - \xi_1, .. x_\nu - \xi_\nu ... x_n - \xi_n$ die Coordinaten eines im Raumtheile $\Re_n$ liegendes Punktes ergeben. Sind die Massen m und μ nicht in Raumtheilen R_n und P_n stetig verbreitet, sondern in weniger vielfach ausgedehnten räumlichen Gestalten $R_{n-n'}$ und $P_{n-\nu'}$ oder in Punkten enthalten, so treten an die Stelle der Integrale, in Bezug auf dR_n dR'_n und dP_n dP'_n Integrale in Bezug auf $dR_{n-n'}$, $dR'_{n-n'}$ und $dP_{n-\nu'}$, $dP'_{n-\nu'}$ oder auch endliche Summen.

Für die mehrfach ausgedehnten nicht ebenen Räume hat Herr Lipschitz in seinen Abhandlungen, welche die homogene Formen von Differentialen zum Gegenstande haben, Untersuchungen auch über die Lehre von der Bewegung angestellt.

Mein in der vorigen Nummer dieser Nachrichten abgedruckte Aufsatz über die mehrfach ausgedehnten Gaussischen und Riemannschen Räume enthält die Hülfsmittel zum Beweise der folgenden Lehrsätze für die Schwerkraft in solchen Räumen.

Lehrsatz II. Bedeutet r die mit einer be-

liebigen Längeneinheit gemessene Entfernung zwischen den Massentheilchen m und μ, bezeichnet $\frac{\sqrt{-1}}{\varepsilon}$ für einen Gaussischen und $\frac{1}{\varepsilon}$ für einen Riemannschen Raum die von der Beschaffenheit des besonderen Raumes abhängige und mit der bei der Bestimmung der übrigen Längen zu Grunde gelegten Einheit gemessene Länge, welche als die dem Raume eigenthümliche absolute Längeneinheit betrachten werden kann, haben Π und $K(n)$ dieselbe Bedeutung wie oben und setzt man:

$$\sum_{\nu=0}^{\mu=\frac{n-3}{2}} 2^{n-2\nu-3} \frac{\Pi_{2\nu}}{\Pi(n-2)} \cdot \frac{\Pi^{\frac{n-3}{2}}}{\Pi_\nu} \cdot \frac{\Pi^{\frac{n-3}{3}}}{\Pi_\nu} \cdot \varepsilon^{n-2} \cos \varepsilon r \,.\, \sin \varepsilon r^{-2\nu-1}$$

$= w_n(r)$ für ein ungerades n, dagegen

$$2^{2-n} \frac{\Pi(n-2)}{\Pi^{\frac{n-2}{2}} \cdot \Pi^{\frac{n-2}{2}}} \varepsilon^{n-2} \log\left(\tfrac{1}{2} \varepsilon \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} \varepsilon r\right)$$

$$+ \sum_{\nu=0}^{\nu=\frac{n-4}{2}} 2^{2\nu-n+2} \cdot \frac{\Pi(n-2)}{\Pi(4\nu+1)} \cdot \frac{\Pi_\nu}{\Pi^{\frac{n-2}{2}}} \cdot \frac{\Pi_\nu}{\Pi^{\frac{n-2}{2}}} \varepsilon^{n-2} \cos \varepsilon r . \sin \varepsilon r^{-2\nu-2}$$

$= w_n(r)$ für ein gerades n

so ist

$$m \mu w_n(r),$$

die Potential-Function für die zwischen den positiv genommenen Massentheilchen m und μ in $n$fach ausgedehnten homogenen Räumen stattfindende Anziehung.

Lehrsatz III. Bedeutet V die Potential-Function der auf eine in einem Punkte befindliche Masseneinheit ausgeübten Wirkung, welche als von einer positiven oder negativen irgend wie im Raume vertheilten Masse ausgehend betrachtet werden soll, je nachdem die Wirkung eine Anziehung oder Abstossung ist, so wird also

$$V = \sum_m m \cdot w_n(r)$$

wenn r die Entfernung des Massentheilchen m von dem veränderlichen die Function V bestimmenden Punkte bezeichnet. Die in irgend einem von der $n-1$fach ausgedehnten räumlichen Gestalt R_{n-1} vollständig aber nur einfach begrenzten Raumtheile R_n befindliche Gesammtmasse wird durch

$$\frac{1}{K(n)} \int \frac{\partial V}{\partial N} dR_{n-1}$$

dargestellt, worin $K(n)$ die oben angegebene Bedeutung hat, dN die zu dem Elemente dR_{n-1} der $n-1$fach ausgedehnten räumlichen Gestalt R_{n-1} nach der Seite des von ihr begrenzten Raumtheiles R_n errichtete Normale bedeutet und das Integral über die ganze Grenze des Raumtheiles R_n ausgedehnt wird.

Lehrsatz III. Bestimmt man die Lage eines Punktes durch irgend welche rechtwinkelige krummlinige Coordinaten $\eta_1 .. \eta_\nu .. \eta_n$ bezeichnet mit $d\eta_1 .. d\eta_\nu .. d\eta_n$ und $\delta\eta_1 .. \delta\eta_\nu .. \delta\eta_n$ irgend welche zwei unendlich kleine Ortsänderungen dieses Punktes so wird das Product der Längen der von dem ersten Orte dieses Punktes nach jenen beiden benachbarten Orten gezogenen kürzesten Linien in einander und in den Cosinus des von diesen Linien eingeschlossenen Winkels multiplicirt die Form

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=n} \eta'_\nu \eta'_\nu \, d\eta_\nu \, \delta\eta_\nu$$

haben, worin $\eta'_1 .. \eta'_\nu .. \eta'_n$ positive Functionen allein von $\eta_1 .. \eta_\nu .. \eta_n$ sind.

Lehrsatz IV. Befindet sich die Masseneinheit, auf welche sich das Potential V bezieht, in dem nach dem vorigen Lehrsatze durch die Coordinaten $\eta_1 .. \eta_\nu .. \eta_n$ bestimmten Punkte und ist die einwirkende Masse an dieser Stelle im $n$fach ausgedehnten Raume stetig vertheilt, so ist daselbst die Dichtigkeit der Masse gleich

$$-\frac{1}{K(n)} \frac{1}{\eta'} \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \frac{\partial}{\partial\eta_\nu} \left(\frac{\eta'}{\eta'_\nu \eta'_\nu} \frac{\partial V}{\partial\eta_\nu} \right)$$

worin η' für das Product $\eta'_1 \cdot \eta'_2 .. \eta'_n$ gesetzt ist.

Lehrsatz VI. Ist die Masse in einer $n-1$ fach ausgedehnten räumlichen Gestalt R_{n-1} condensirt und ändert sie sich darin stetig so wird

$$\frac{1}{K(n)}\left(\frac{\partial V}{\partial N}\right)_1 + \frac{1}{K(n)}\left(\frac{\partial V}{\partial N}\right)_2$$

die Dichtigkeit an derjenigen Stelle der Gestalt R_{n-1} gegen welche hin von beiden Seiten die Normale dN_1 und dN_2 zu der räumlichen Gestalt dR_{n-1} gefällt sind.

Lehrsatz VII. Ist die Masse in einer $n-\nu$ fach ausgedehnten räumlichen Gestalt $R_{n-\nu}$ verdichtet und ändert sie sich darin stetig so wird für bis zur Null abnehmende n der Grenzwerth von

$$\frac{2\pi}{K(n)} \cdot \frac{V}{\lg \frac{1}{N}} \quad \text{für} \quad n-\nu = n-2$$

von

$$\frac{K(\nu)}{K(n)} (\nu-2)\, N^{\nu-2}\, V \quad \text{für} \quad n-\nu < n-2$$

die Dichtigkeit an derjenigen Stelle der Gestalt $R_{n-\nu}$ gegen welche hin von einem unendlich nahen ausserhalb der Gestalt liegenden und die Potentialfunction V bestimmenden Punkte die Normale N zu $dR_{n-\nu}$ gezogen ist.

Lehrsatz VIII. Bezeichnet R_n einen be-

stimmten Raumtheil, dR_n dessen Raumelement, welches den Punkt $\eta_1 . \eta_\nu .. \eta_n$ enthält, ferner R_{n-1} die $n-1$fache Raumgestalt, welche den Raumtheil dR_n gegrenzt, dR_{n-1} ein Element davon, dN eine nach dem begrenzten Raumtheile R_n zu dR_{n-1} errichtete Normale so ist

$$\int \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \frac{1}{\eta'_\nu \eta'_\nu} \frac{\partial U}{\partial \eta_\nu} \frac{\partial V}{\partial \eta_\nu} . dR_n$$

$$= -\int U \frac{\partial V}{\partial N} dR_{n-1} - \int U \frac{1}{\eta'} \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \frac{\partial}{\partial \eta_\nu} \left(\frac{\eta'}{\eta'_\nu \eta'_\nu} \frac{\partial V}{\partial \eta_\nu} \right) . dR_n$$

$$= -\int V \frac{\partial U}{\partial N} dR_{n-1} - \int V \frac{1}{\eta'} \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \frac{\partial}{\partial \eta_\nu} \left(\frac{\eta'}{\eta'_\nu \eta'_\nu} \frac{\partial U}{\partial \eta_\nu} \right) . dR_n$$

wenn U und V solche Functionen der Coordinaten sind, welche sich in dem Raume R_n stetig ändern und welche die auf dR_n und dR_{n-1} sich beziehenden Integrale endliche Werthe annehmen lassen.

Gehen von einem Punkte n kürzeste Linien aus, von denen jede zu allen übrigen $n-1$ normal ist und welche Coordinatenaxen heissen sollen, wird von jenem Punkte 0 nach einem Punkte x eine kürzeste Linie gezogen, wird der von dem Punkte 0 bis zu dem Halbirungspunkte der kürzesten Linie gehende Abschnitt auf die Coordinatenaxen projicirt und die Längen

dieser Projectionen mit $\frac{1}{2}x_1 \cdot \frac{1}{2}x_\nu \cdot \cdot \frac{1}{2}x_n$, bezeichnet so sollen $x_1 \cdot \cdot x_\nu \cdot \cdot x_n$ die rechtwinkeligen symmetrischen Coordinaten des Punktes x heissen.

Lehrsatz IX. Sind $\mathfrak{R}_n$, R_n und P_n Raumtheile, die sich in beliebiger Weise decken, durchdringen, können, sind $\alpha_1 \cdot \cdot \alpha_\nu \cdot \cdot \alpha_n$ und $x_1 \cdot \cdot x_\nu \cdot \cdot x_n$ und $\xi_1 \cdot \cdot \xi_\nu \cdot \cdot \xi_n$ die rechtwinkeligen symmetrischen Coordinaten von drei Punkten, welche je in einem der drei den Raumtheilen $\mathfrak{R}_n$, R_n und P_n sich befinden, sind $m(\cdot\cdot x_\nu \cdot\cdot)$ und $\mu(\cdot\cdot \xi_\nu \cdot\cdot)$ stetige Functionen innerhalb der Raumtheile R_n und P_n, ist $d\mathfrak{R}$ die Normale zur räumlichen Gestalt $d\mathfrak{R}_{n-1}$ im Punkte $\alpha_1 \cdot \cdot \alpha_\nu \cdot \cdot \alpha_n$ nach derjenigen Seite, wo sich der von ihr begrenzte Raumtheil $\mathfrak{R}_n$ befindet und setzt man:

$$\frac{\Sigma(\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varepsilon x_\nu - \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varepsilon\alpha_\nu - \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varepsilon\xi_\nu)^2}{\{1+\Sigma(\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varepsilon\alpha_\nu)^2\}\{1+\Sigma(\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varepsilon x_\nu - \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varepsilon\xi_\nu)^2\}} = (\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon r)^2$$

worin die Summationen Σ sich über die Zahlen $\nu = 1, 2, 3 \cdot \cdot n$ erstreckt, setzt man endlich

$$\iint m(\cdot\cdot x_\nu \cdot\cdot)\,\mu(\cdot\cdot\cdot \xi_\nu \cdot\cdot)\,w_n(r)\,dR_n\,dP_n = W_n(\cdot\cdot \alpha_\nu \cdot\cdot)$$

so besteht die Fundamentalgleichung:

$$\int \frac{\partial}{\partial \mathfrak{N}} W_n(..\alpha_n..)\, d\mathfrak{N}_{n-1}$$

$$= K(n) \iint m(..x_\nu..)\, \mu(..\xi_\nu..)\, dR'_n\, dP'_n$$

worin das Integral in Bezug auf das Element $d\mathfrak{N}_{n-1}$ mit dem durch die rechtwinkeligen symmetrischen Coordinaten $\alpha_1 .. \alpha_\nu .. \alpha_n$ bestimmten Punkte sich über die ganze den Raumtheil $\mathfrak{N}_n$ einfach begrenzende Raumgestalt $\mathfrak{N}_{n-1}$ erstreckt, die Integrale in Bezug auf dR_n und dP_n über die ganzen Raumtheile R_n und P_n aber die Integrale in Bezug auf dR'_n und dP'_n nur über alle solche Elementenpaare dR'_n mit dem Punkte $x_1 .. x_\nu .. x_n$ und dP'_n mit dem Punkte $\xi_1 .. \xi_\nu .. \xi_n$ welche beziehungsweise in den Raumtheilen R_n und P_n liegen und durch

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\varepsilon x_\nu - \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\varepsilon \xi_\nu = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\varepsilon \alpha_\nu$$

für $\nu = 1, 2 .. n$ die rechtwinkeligen symmetrischen Coordinaten $\alpha_1 .. \alpha_\nu .. \alpha_n$ irgend eines im Raumtheile $\mathfrak{N}_n$ liegenden Punktes ergeben. An die Stelle der auf dR_n, dR'_n und dP_n, dP'_n bezüglichen Integrale können nach Beschaffenheit der m und μ auch Integrale, welche über weniger vielfach ausgedehnte räumliche Gestalten sich erstrecken, oder auch endliche Summen treten.

Göttingen 1873 Februar 1.

STANFORD LIBRARIES

Ueber die Vertheilung der quadratischen Formen mit complexen Coefficienten und Veränderlichen in Geschlechter.

Von

Dr. B. Minnigerode.

Vorgelegt von Prof. Schering.

Dirichlet hat im Eingange seiner Abhandlung über die quadratischen Formen in der Theorie der complexen Zahlen für den zweiten Theil seiner Untersuchungen unter Anderem Betrachtungen über die Vertheilung der quadratischen Formen in Geschlechter in Aussicht gestellt. Dieser zweite Theil ist nicht erschienen; die Vertheilung der quadratischen Formen in Geschlechter soll im Folgenden untersucht werden.

Wir betrachten quadratische Formen von der Determinante D, von der wir nur voraussetzen, dass sie kein Quadrat ist. Ist (a, b, c) eine solche Form, so heisst sie ursprünglich, wenn die Zahlen a, b, c keinen gemeinschaftlichen Theiler haben. Es können dann die Zahlen a, $2b$, c entweder den grössten gemeinschaftlichen Theiler 1 oder $1+i$ oder 2 haben und die Form heisst diesen drei Fällen gemäss von der 1ten, 2ten oder 3ten Art. Wir beschränken die Untersuchung im Folgenden auf ursprüngliche Formen der 1ten Art, indem die andern Fälle eine ganz ähnliche Behandlung zulassen.

Die Eintheilung der quadratischen Formen in Geschlechter beruht nun auf Folgendem.

Es seien n und n' irgend zwei durch eine quadratische Form darstellbare Zahlen, so kann nach einem sehr bekannten Satz das Produkt

nn' durch die Hauptform $x^2 - Dy^2$ dargestellt werden.

Bezeichnet l irgend eine ungerade in D aufgehende Primzahl, n und n' zwei durch l nicht theilbare, durch die Form (a, b, c) darstellbare Zahlen, so folgt aus der Gleichung

$$1) \qquad nn' = x^2 - Dy^2,$$

dass nn' quadratischer Rest von l ist, also mit Benutzung des von Dirichlet gebrauchten Zeichens

$$\left[\frac{nn'}{l}\right] = 1.$$

Hieraus folgt, dass $\left[\frac{n}{l}\right]$ für alle Zahlen n denselben Werth hat, die durch dieselbe Form darstellbar und nicht durch l theilbar sind.

Ist D durch die vierte Potenz von $1+i$ theilbar, und bezeichnen n und n' zwei ungerade durch die Form (a, b, c) darstellbare Zahlen, so liefert die Gleichung 1) die Congruenz

$$nn' \equiv x^2 \pmod 4.$$

x ist hier ungerade, also $x^2 \equiv +1 \pmod 4$, also nn' von der Form $\pm 1 + 4h + 4h^1 i$. Folglich ist

$$(-1)^{\frac{N(nn^1)-1}{4}} = 1.$$

Aus dieser Gleichung folgt, dass, wenn $n = \lambda + \nu i$ gesetzt wird,

1a) $(-1)^{\frac{\lambda^2+\nu^2-1}{4}}$

für alle durch die Form (a, b, c) darstellbaren ungeraden Zahlen n denselben Werth hat.

Wird die eben gebrauchte Bezeichnung beibehalten und vorausgesetzt, dass D durch die 5te Potenz von $1+i$ theilbar ist, so folgt aus 1)

$$nn^1 \equiv x^2 \pmod{4+4i}.$$

Da x ungerade ist, so wird, wenn $x^2 = A + Bi$ gesetzt wird, $A + B \equiv \pm 1 \pmod 8$, also auch, wenn $nn^1 = L + Ni$ ist, $L + N \equiv \pm 1 \pmod{4+4i}$. Hieraus aber folgt, wenn berücksichtigt wird, dass $L+N$ nicht complex ist,

$$L + N \equiv \pm 1 \pmod 8$$

oder:

$$(-1)^{\frac{(L+N)^2-1}{8}} = 1.$$

Hieraus schliesst man, dass

1b) $(-1)^{\frac{(\lambda+\nu)^2-1}{8}}$

für alle ungeraden Zahlen $\lambda + \nu i$, welche durch eine bestimmte Form dargestellt werden können, deren Determinante durch $4+4i$ theilbar ist, denselben Werth hat.

Betrachten wir irgend eine (ursprüngliche) Form (der 1ten Art) (a, b, c), so kann man den unbestimmten Veränderlichen in derselben immer solche Werthe beilegen, dass die dargestellte Zahl n die Form $2k+1+2ih$ erhält. Die De-

terminante D ist nun quadratischer Rest jeder durch die Form dargestellten Zahl. Also besteht die Gleichung

$$2) \qquad \left[\frac{D}{n}\right] = 1.$$

Zur weiteren Entwicklung dieser Gleichung unterscheiden wir einige Fälle bezüglich der Determinante D. Vereinigen wir alle doppelten Factoren von D in ein einziges Quadrat, so können wir schreiben

$$D = XPR^2,$$

wo X einen der vier Werthe

$$X=1,\ X=i,\ X=1+i,\ X=i(1+i)$$

besitzt, P oder $-P$ ein Produkt von lauter verschiedenen ungeraden primären*) Primzahlen darstellt. Der Fall $P=\pm 1$ ist nicht ausgeschlossen, kann aber nur vorkommen, wenn X von 1 verschieden ist, gemäss unserer Voraussetzung, dass D kein Quadrat ist. Die Zahlen X, P, R sind, sobald D gegeben ist, vollständig bestimmt, abgesehen davon, dass man statt P und R^2 gleichzeitig $-P$ und $(Ri)^2$ setzen kann.

Wir formen nun die Gleichung 2) mit Hülfe des Reciprocitätsgesetzes und der Ergänzungssätze um (Dirichlet Recherches etc., Crelle J. Bd. 24. §. 8. Gl. f). Nach diesen ist:

---

*) Eine ungerade Zahl $\lambda+\nu i$ heisst primär, wenn $\lambda\equiv 1$ (mod. 4) und $\nu\equiv 0$ (mod. 2) ist.

$$\left[\frac{i}{A+Bi}\right]=(-1)^{\frac{P-1}{4}},\ \left[\frac{1+i}{A+Bi}\right]=(-1)^{\frac{(A+B)^2-1}{8}},$$

$$\left[\frac{\alpha+\beta i}{A+Bi}\right]=\left[\frac{A+Bi}{\alpha+\beta i}\right];$$

in diesen Gleichungen sind $A+Bi$ und $\alpha+\beta i$ zwei ungerade Zahlen ohne gemeinschaftlichen Theiler, für die B und β gerade sind; $P=A^2+B^2$. Zunächst folgt daraus

$$\left[\frac{D}{n}\right]=\left[\frac{XPR^2}{n}\right]=\left[\frac{X}{n}\right]\left[\frac{P}{n}\right]=\left[\frac{X}{n}\right]\left[\frac{n}{P}\right].$$

Für die vier unterschiedenen Fälle ist nun beziehungsweise wenn $n=\lambda+\nu i$ gesetzt und beachtet wird, dass ν gerade ist:

$$\left[\frac{X}{n}\right]=1,\left[\frac{X}{n}\right]=(-1)^{\frac{\lambda^2+\nu^2-1}{4}},\left[\frac{X}{n}\right]=(-1)^{\frac{(\lambda+\nu)^2-1}{8}},$$

$$\left[\frac{X}{n}\right]=(-1)^{\frac{\lambda^2+\nu^2-1}{4}+\frac{(\lambda+\nu)^2-1}{8}}.$$

Man kann die vier sich ergebenden Fälle in eine einzige Formel vereinigen, wenn man zwei Zahlen δ und ε einführt, die entsprechend den vier Fällen die Werthe besitzen:

$$\delta=1,\ \varepsilon=1;\ \delta=-1,\ \varepsilon=1;\ \delta=1,\ \varepsilon=-1;$$

$$\delta=-1,\ \varepsilon=-1.$$

Es ist nämlich alsdann

$$\left[\frac{X}{n}\right] = \delta^{\frac{\lambda^2+\nu^2-1}{4}} \varepsilon^{\frac{(\lambda+\nu)^2-1}{8}}.$$

Die Gleichung 2) liefert hiernach

$$\delta^{\frac{\lambda^2+\nu^2-1}{4}} \varepsilon^{\frac{(\lambda+\nu)^2-1}{8}} \cdot \left[\frac{n}{P}\right] = 1,$$

oder wenn P gleich dem Produkt der Primzahlen $p, p^1, \ldots$ ist:

$$2a) \quad \delta^{\frac{\lambda^2+\nu^2-1}{4}} \varepsilon^{\frac{(\lambda+\nu)^2-1}{8}} \left[\frac{n}{p}\right] \left[\frac{n}{p^1}\right] \ldots = 1.$$

Ist nun die zu Grunde gelegte Form, durch welche die Zahl n dargestellt wird, die Hauptform, so ist nach dem oben Bewiesenen

$$\left[\frac{n}{p}\right] = 1, \quad \left[\frac{n}{p_1}\right] = 1, \ldots,$$

also

$$3) \quad \delta^{\frac{\lambda^2+\nu^2-1}{4}} \varepsilon^{\frac{(\lambda+\nu)^2-1}{8}} = 1.$$

Sind n^1 und n^{11} zwei durch eine quadratische Form der Determinante D darstellbare ungerade Zahlen, deren in i multiplicirter Theil gerade ist, so liefert die Gleichung 3), wenn man bemerkt, dass $n^1 n^{11}$ durch die Hauptform darstellbar ist, das Ergebniss, dass für alle durch eine bestimmte Form der Determinante D darstellbaren ungeraden Zahlen $n = \lambda + \nu i$, für die ν gerade ist,

$$\delta^{\frac{\lambda^2+\nu^2-1}{4}}\ \varepsilon^{\frac{(\lambda+\nu)^2-1}{8}}$$

denselben Werth hat. Für den ersten der 4 unterschiedenen Fälle ist dies kein Satz, da hier $\delta = \varepsilon = 1$ ist; für die 3 anderen Fälle aber sieht man, dass beziehungsweise

3a)

$$(-1)^{\frac{\lambda^2+\nu^2-1}{4}}, (-1)^{\frac{(\lambda+\nu)^2-1}{8}}, (-1)^{\frac{\lambda^2+\nu^2-1}{4}+\frac{(\lambda+\nu)^2-1}{8}}$$

denselben Werth hat.

Aus dem Gesagten ergiebt sich Folgendes. Es bezeichne $n = \lambda + \nu i$ eine ungerade Zahl, bei der ν gerade und die durch eine quadratische Form der Determinante D darstellbar ist. Sind $p, p^1, \ldots$ die ungeraden in D aufgehenden Primzahlen, so hat für alle Zahlen n der angegebenen Beschaffenheit

4) $$\ldots \left[\frac{n}{p}\right], \left[\frac{n}{p^1}\right], \ldots .$$

den nämlichen Werth. In besonderen Fällen haben auch eine oder zwei der Zahlen

5)

$$(-1)^{\frac{\lambda^2+\nu^2-1}{4}}, (-1)^{\frac{(\lambda+\nu)^2-1}{8}}, (-1)^{\frac{\lambda^2+\nu^2-1}{4}+\frac{(\lambda+\nu)^2-1}{8}}$$

für alle jene Zahlen n denselben Werth.

Die Zahlen 4) und 5) haben für jede Form bestimmte Werthe und heissen die Charaktere C der Form. Das System dieser Werthe ± 1 für eine bestimmte Form heisst ihr Totalcharakter. Hierauf beruht die Eintheilung der For-

men in Geschlechter. Man rechnet nämlich zu demselben Geschlecht oder zu zwei verschiedenen Geschlechtern zwei Formen, je nachdem ihre Totalcharaktere identisch sind oder nicht. Es leuchtet unmittelbar ein, dass alle äquivalenten Formen in dasselbe Geschlecht gehören, so dass ein Geschlecht als der Inbegriff von bestimmten Formenclassen anzusehen ist.

Bezeichnet man die Anzahl der Charaktere 4) und 5) durch λ und bemerkt, dass jeder Charakter den Werth $+1$ oder -1 annehmen kann, so erkannt man, dass höchstens 2^{λ} verschiedene Geschlechter vorhanden sein können.

Mit Hülfe des Reciprocitätsgesetzes lässt sich nun nachweisen, dass von diesen a priori als möglich angebbaren Geschlechtern nur höchstens die Hälfte wirklich vorhanden sein kann. Aus diesem Gesetz ergab sich nämlich die Gleichung 2a), die in allen Fällen eine Gleichung zwischen den Charakteren angibt. Diese Gleichung ist nicht illusorisch, sondern giebt eine wirkliche Beziehung, weil, wie schon oben bemerkt, nicht gleichzeitig $\delta = 1$, $s = 1$, $P = \pm 1$ sein kann. Giebt man nun den sämmtlichen Charakteren C die Werthe $+1$ und -1, so erhält für die Hälfte der 2^{λ} Combinationen das Produkt der in der Gleichung 2a) vorkommenden Charaktere den Werth $+1$, für die andere den Werth -1. Da nun dieses Produkt immer den Werth $+1$ haben muss, so ergiebt sich ohne Weiteres die Richtigkeit unserer Behauptung.

Für alle Determinanten sind die durch eine Form darstellbaren primären ungeraden Zahlen für jeden ungeraden Theiler der Determinante entweder gleichzeitig quadratische Reste oder Nichtreste. Diejenigen Determinanten, für wel-

che ausserdem einer oder zwei der Zahlen 5) einen bestimmten Werth haben, ergeben sich durch Combination der Beziehungen 1a), 1b), 3a). Man kann dann leicht folgende Uebersicht aufstellen.

Erster Fall. $D = PR^2$.

$P \equiv 1 \pmod 2$	$R^2 \equiv 0 \pmod 8$	$D \equiv 0 \pmod 8$	ε, δ.
	$R^2 \equiv 4$	$D \equiv 4$	ε.
	$R^2 \equiv 4i$	$D \equiv 4i$	ε.
	$R^2 \equiv 4 + 4i$	$D \equiv 4 + 4i$	ε, δ.
$P \equiv 1 \pmod 4$	$R^2 \equiv \pm 1 \pmod 4$	$D \equiv \pm 1 \pmod 4$	
	$R^2 \equiv 2i$	$D \equiv 2i$	
$P \equiv 1 + 2i \pmod 4$	$R^2 \equiv \pm 1 \pmod 4$	$D \equiv \pm 1 \pmod 4$	
	$R^2 \equiv 2i$	$D \equiv 2i$	

Zweiter Fall. $D = iPR^2$.

$P \equiv 1 \pmod 2$	$R^2 \equiv 0 \pmod 8$	$D \equiv 0 \pmod 8$	ε, δ.
	$R^2 \equiv 4$	$D \equiv 4i$	ε.
	$R^2 \equiv 4i$	$D \equiv 4$	ε.
	$R^2 \equiv 4 + 4i$	$D \equiv 4 + 4i$	ε, δ.
$P \equiv 1 \pmod 4$	$R^2 \equiv \pm 1 \pmod 4$	$D \equiv \pm 1 \pmod 4$	ε.
	$R^2 \equiv 2i$	$D \equiv 2$	ε.
$P \equiv 1 + 2i \pmod 4$	$R^2 \equiv \pm 1 \pmod 4$	$D \equiv 2 \pm i \pmod 4$	ε.
	$R^2 \equiv 2i$	$D \equiv 2$	ε.

Dritter Fall. $D = (1 + i) PR^2$.

$P \equiv 1 \pmod 2$	$R^2 \equiv 0 \pmod 8$	$D \equiv 0 \pmod 8$	ε, δ.
	$R^2 \equiv 4$	$D \equiv 4 + 4i$	ε, δ.
	$R^2 \equiv 4i$	$D \equiv 4 + 4i$	ε, δ.
	$R^2 \equiv 4 + 4i$	$D \equiv 0$	ε, δ.
$P \equiv 1 \pmod 4$	$R^2 \equiv +1 \pmod 4$	$D \equiv \pm(1+i) \pmod 4$	δ.
	$R^2 \equiv 2i$	$D \equiv 2 - 2i \pmod 8$	δ.

$P \equiv 1+2i \pmod 4$ $R^2 \equiv \pm 1 \pmod 4$ $D \equiv \overline{\mp}(1+i) \pmod 4\ \delta.$

$R^2 \equiv 2i$ $D \equiv -(2-2i) \pmod 8\ \delta.$

Vierter Fall. $D = i(1+i)PR^2$

$P \equiv 1 \pmod 2$ $R^2 \equiv 0 \pmod 8$ $D \equiv 0 \pmod 8$ $\varepsilon, \delta.$

$R^2 \equiv 4$ $D \equiv 4+4i$ $\varepsilon, \delta.$

$R^2 \equiv 4i$ $D \equiv 4+4i$ $\varepsilon, \delta.$

$R^2 \equiv 4+4i$ $D \equiv 0$ $\varepsilon, \delta.$

$P \equiv 1 \pmod 4$ $R^2 \equiv \pm 1 \pmod 4$ $D \equiv \overline{\mp}(1-i) \pmod 4\ \varepsilon\delta.$

$R^2 \equiv 2i$ $D \equiv 2+2i \pmod 8$ $\varepsilon\delta.$

$P \equiv 1+2i \pmod 4$ $R^2 \equiv \pm 1 \pmod 4$ $D \equiv \overline{\pm}(1-i) \pmod 4\ \varepsilon\delta.$

$R^2 \equiv 2i$ $D \equiv -(2+2i) \pmod 8\ \varepsilon\delta.$

Man erhält diese Uebersicht, wenn man beachtet, dass den Congruenzen

$$R \equiv 0,\ R \equiv 1,\ R \equiv i,\ R \equiv 1+i \pmod 2$$

die folgenden entsprechen

$$R^2 \equiv 0,\ R^2 \equiv 1,\ R^2 \equiv -1,\ R^2 \equiv 2i \pmod 4$$

und dass, wenn

$$R^2 \equiv 0 \pmod 4$$

ist, R^2 nach dem Modul 8 einer der Zahlen 0, 4, $4i$, $4+4i$ congruent ist. In den Fällen, wo der Charakter $(-1)^{\frac{\lambda^2+\nu^2-1}{4}}$ vorhanden ist, ist

rechts ε, wo der Charakter $(-1)^{\frac{(\lambda+\nu)^2-1}{8}}$ vorhanden ist, ist rechts δ, wo der Charakter $(-1)^{\frac{\lambda^2+\nu^2-1}{4}+\frac{(\lambda+\nu)^2-1}{8}}$ vorhanden ist, ist rechts $\varepsilon\delta$ verzeichnet.

Aus dieser Zusammenstellung ergiebt sich folgende Uebersicht für die bei verschiedenen Determinanten vorkommenden Charaktere.

1) $\left[\frac{n}{p}\right]$, $\quad D \equiv \pm 1, 2i, \pm 1 + 2i \pmod 4$

2) $\left[\frac{n}{p}\right], (-1)^{\frac{\lambda^2+\nu^2-1}{4}}$ $\quad D \equiv \pm i, 2, 2 \pm i \pmod 4$

$\quad D \equiv 4, 4i \pmod 8$

3) $\left[\frac{n}{p}\right], (-1)^{\frac{(\lambda+\nu)^2-1}{8}}$ $\quad D \equiv \pm(1+i) \pmod 4$

$\quad D \equiv \pm(2-2i) \pmod 8$

4) $\left[\frac{n}{p}\right], (-1)^{\frac{\lambda^2+\nu^2-1}{4}+\frac{(\lambda+\nu)^2-1}{8}}$

$D \equiv \pm(1-i) \pmod 4$ $\quad D \equiv \pm(2+2i) \pmod 8$

5) $\left[\frac{n}{p}\right]$, $(-1)^{\frac{\lambda^2+\nu^2-1}{4}}$, $(-1)^{\frac{(\lambda+\nu)^2-1}{8}}$

$\quad D \equiv 0, 4+4i \pmod 8$.

Bezeichnet $\varkappa$ die Anzahl der verschiedenen ungeraden Primzahlen, die in D aufgehen, so

ergiebt sich im 1ten Fall $\lambda = \varkappa$, im 2ten, 3ten und 4ten $\lambda = \varkappa + 1$, im 5ten $\lambda = \varkappa + 2$.

Durch das Bisherige ist gezeigt, dass in den angegebenen Fällen die durch eine bestimmte Form dargestellten Zahlen bestimmte Charaktere besitzen. An sich denkbar wäre es, dass auch für andere als die in D vorhandenen ungeraden Primzahlen, sowie für andere als in den angegebenen Fällen Charaktere 5) vorhanden wären. Eine genauere Betrachtung zeigt, dass dies nicht der Fall ist. Da aber eine Darstellung dieser Untersuchung nicht ohne Weitläufigkeit möglich und das Ergebniss ein negatives ist, so soll hier nicht darauf eingegangen werden.

Wir gehen hier nun zu dem Nachweis über, dass jedes der a priori als möglich erkannten $2^{\lambda-1}$ Geschlechter wirklich vorhanden ist und alle gleichviel Formenclassen unter sich enthalten. Es soll das geschehen im Anschluss an die Untersuchungen von Dirichlet (Recherches etc.).

Im §. 17 seiner Abhandlung hat Dirichlet folgende Formel aufgestellt:

$$\Sigma 2^{\mu+1} F(m) =$$

$$\Sigma F(ax^2+2bxy+cy^2) + \Sigma F(a^1x^2+2b^1xy+c^1y^2) \text{etc.}$$

Die Bedeutung der vorkommenden Zeichen ist folgende. Die Summation auf der linken Seite ist zu erstrecken über alle diejenigen ganzen Zahlen m, die relativ prim zu $(1+i)D$ sind, und deren sämmtliche Primfactoren f die Gleichung

6) $$\left[\frac{D}{f}\right] = 1$$

erfüllen, während μ für jede Zahl m die Anzahl der in ihr enthaltenen verschiedenen primären Primfactoren bezeichnet. Die Zahl der Summen auf der rechten Seite ist gleich der Anzahl nicht äquivalenter ursprünglicher Formen der 1ten Art der Determinante D und jede Summe gehört zu einer bestimmten Classe. In jeder Summe bezieht sich das Zeichen Σ auf alle Werthpaare x und y, die der dreifachen Bedingung genügen, 1) keinen gemeinschaftlichen Theiler zu haben, 2) der Form in die sie eingesetzt werden, einen Werth zu geben, der relativ prim gegen $(1+i)D$ ist und 3) einer Bedingung zu genügen, die für die 1te Summe folgende ist:

$$6a)\quad N(ax+(b-\sqrt{D})y)<N(ax+(b+\sqrt{D})y)\leqq\sigma^2 N(ax+(b-\sqrt{D})y),$$

wo $\sigma=N(T+U\sqrt{D})$ und T, U die Fundamentallösung der Gleichung $T^2-DU^2=1$ ist, während für die übrigen Summen diese Bedingung sich ganz entsprechend gestaltet. Die Function F ist beliebig bis auf die Beschränkung, dass die in der Gleichung vorkommenden Reihen convergent und deren Summen unabhängig von der Anordnung der Glieder sind.

Da vier associirte Zahlen immer gleichzeitig in der auf m bezüglichen Summe vorkommen oder nicht vorkommen, so können wir den der Zahl m auferlegten Bedingungen noch die zufügen, dass m primär ist, d. h. dass, wenn $m=\alpha+\beta i$ ist, $\alpha\equiv 1 \pmod 4$, $\beta\equiv 0 \pmod 2$ sei, wenn wir nur die Summe vervierfachen. Es ergiebt sich so:

$$7)\quad 8\Sigma 2^{\mu}F(m)=\Sigma F(ax^2+2bxy+cy^2)+\text{etc.}$$

Diese Gleichung soll nun umgeformt werden unter der Voraussetzung, dass die Function F der Gleichung

$$8) \qquad F(mm^1) = F(m)\,F(m^1)$$

genügt. Sind $f_1, f_2, \ldots$ von einander verschiedene primäre Primzahlen, so kann man immer nur auf Eine Weise $m = f_1^{h_1} f_2^{h_2} \ldots$ setzen. Die Zahlen $f_1, f_2, \ldots$ genügen alle der Gleichung 6) und man erhält ganz ebenso wie bei Dirichlet §. 17 die Gleichung

$$9) \qquad \Sigma 2^{\mu} F(m) = \Pi \frac{1+F(f)}{1-F(f)}$$

in der links die Bezeichnung dieselbe ist, wie in Gleichung 7), während rechts das Produktenzeichen sich auf alle ungeraden primären Primzahlen bezieht, die nicht in D aufgehen und der Gl. 6) genügen; wie unmittelbar aus der Bemerkung folgt, dass mit Hülfe von Gl. 8) sich

$$\frac{1+F(f)}{1-F(f)} = 1 + 2F(f) + 2F(f^2) + 2F(f^3)$$

ergiebt. Bezeichnet man allgemein mit q alle ungeraden primären Primzahlen, die nicht in D aufgehen, mit n alle ungeraden zu D relativ primen Zahlen, so ergiebt sich

$$10) \qquad \Pi \frac{1}{1-F(q)} = \Sigma F(n),$$

wo das Π und Σ Zeichen sich auf alle eben be-

stimmten Zahlen beziehen. Mit Beibehaltung derselben Bezeichnung erhält man auch

$$11) \qquad \Pi \frac{1}{1-\left[\frac{D}{q}\right]F(q)} = \Sigma\left[\frac{D}{n}\right]F(n),$$

wenn die bekannten Eigenschaften von $\left[\frac{D}{q}\right]$ benutzt werden. Ebenso wie Gl. 10) erhält man auch folgende:

$$12) \qquad \Pi \frac{1}{1-F(q^2)} = \Sigma F(n^2).$$

Durch Multiplication je der beiden Seiten der Gl. 10) und 11) und Division mit 12) erhält man rechts

$$\frac{\Sigma F(n) \cdot \Sigma\left[\frac{D}{n}\right]F(n)}{\Sigma F(n^2)}$$

und links als allgemeinen Factor

$$\frac{1-F(q^2)}{(1-F(q))\left(1-\left[\frac{D}{q}\right]F(q)\right)} = \frac{1+F(q)}{1-\left[\frac{D}{q}\right]F(q)},$$

der den Werth 1 erhält für alle die Zahlen q, welche die Bedingung $\left[\frac{D}{q}\right] = -1$ erfüllen und den Werth

$$\frac{1+F(q)}{1-F(q)}$$

für alle diejenigen, für welche $\left[\frac{D}{q}\right]=1$ ist; das ist aber die den Zahlen f auferlegte Bedingung 6) und man findet so nach Gl. 9):

$$\Sigma 2^{\mu} F(m)=\frac{\Sigma F(n) \cdot \Sigma\left[\frac{D}{n}\right] F(n)}{\Sigma F(n^2)}.$$

Hiernach kann man Gl. 7) durch folgende ersetzen

$$8\Sigma F(n) \cdot \Sigma\left[\frac{D}{n}\right] F(n)=\Sigma F(n^2) \cdot \Sigma F(ax^2+2bxy+cy^2)$$
$$+ \text{ etc.} \qquad 13)$$

Führt man das Produkt der beiden Summen zur rechten Seite dieser Gleichung aus, so erhält man als allgemeines Glied

$$F(n^2) F(ax^2+2bxy+cy^2)$$

oder wenn $nx=x^1$, $ny=y^1$ gesetzt wird

$$F(ax^1x^1+2bx^1y^1+cy^1y^1).$$

Es ist nun zu summiren über ein gewisses System zusammengehöriger Werthe von x^1, y^1 das durch folgende Bedingungen charakterisirt ist[1] 1) Für jede zulässige Combination von x^1, y^1 muss $ax^1x^1+2bx^1y^1+cy^1y^1$ relativ prim gegen $(1+i)D$ sein. 2) Jedes Werthpaar x^1, y^1 genügt der Bedingung

$$N(ax^1(b-\sqrt{D})y^1) < N(ax^1+(b+\sqrt{D})y^1)$$
$$\leqq \sigma^2 N(ax^1+(b-\sqrt{D})\ y^1).$$

Auch umgekehrt ist leicht zu zeigen, dass jede Combination der Zahlen x^1, y^1 die diesen beiden Bedingungen genügt, zulässig ist; dies beruht darauf, dass die zu jedem System x^1, y^1 gehörigen Zahlen n, x, y stets angebbar und vollständig bestimmt sind. Schreibt man statt x^1, y^1 einfach x, y, so kann nun die Gleichung 13) folgendermassen geschrieben werden

$$14)\quad 8\Sigma F(n) \cdot \Sigma\left[\frac{D}{n}\right] F(n) = \Sigma F(ax^2 + 2bxy + cy^2) + \text{etc.}$$

Die Summation auf der rechten Seite erstreckt sich im 1ten Glied auf alle Zahlen x, y für welche $ax^2 + 2bxy + cy^2$ relativ prim gegen $(1+i)D$ ist und die den Bedingungen 6a) genügen. Für die folgenden nur angedeuteten Glieder gilt Entsprechendes.

Die Function F soll nun in passender Weise specialisirt werden. Die einzelnen Charaktere einer Form bezeichnen wir allgemein durch C, die in der Gl. 2a) vorkommenden, deren Produkt den Werth 1 hat, durch C^1. Ferner setzen wir

$$F(n) = \frac{\Phi(n)}{(N(n))^s}$$

wo $\Phi(n)$ irgend eines der Glieder des entwickelten Produktes

$$\Pi(1+C)$$

verstellt, das Π Zeichen über sämmtliche Charaktere C ausgedehnt, während s eine positive, die

Einheit übersteigende Grösse bedeutet. Der Gleichung 8) wird durch diese Voraussetzung genügt; berücksichtigt man ferner, dass $\Phi(n) = \pm 1$ ist, so erkennt man auch, dass die benutzten Reihen und Produkte unabhängig von der Anordnung der Glieder convergiren, was für die Gültigkeit der Gleichung 8) nothwendig ist.

Die Formenclassen der Determinante D zerfallen nun für jede Wahl der Function Φ in 2 Gruppen. Für alle zu $(1+i)D$ primen Zahlen n welche durch Formen der einen Gruppe dargestellt werden, hat $\Phi(n)$ den Werth $+1$, für die der andern den Werth -1. Die Anzahl der beiden Gruppen angehörigen Formenclassen sei h und h^1; Formen derselben mögen allgemein beziehungsweise durch (a, b, c) und (a^1, b^1, c^1) dargestellt werden. Dann wird die Gleichung 14) zu

$$8\Sigma\frac{\Phi(n)}{(N(n))_s}\cdot\Sigma\left[\frac{D}{n}\right]\frac{\Phi(n)}{(N(n))^s} =$$

15)
$$\Sigma\frac{1}{(N(ax^2+2bxy+cy^2))^s}+\text{etc.}$$
$$-\Sigma\frac{1}{(N(a^1x^2+2b^1xy+c^1y^2))^s}-\text{etc.}$$

Auf der rechten Seite dieser Gleichung ist die Anzahl der Summen mit positivem Vorzeichen $= h$, der mit negativem $= h^1$.

Multipliciren wir nun mit $s-1$ und lassen s sich unbegrenzt dem Werth 1 nähern, so nähert sich jede der auf der rechten Seite der Gl. 15)

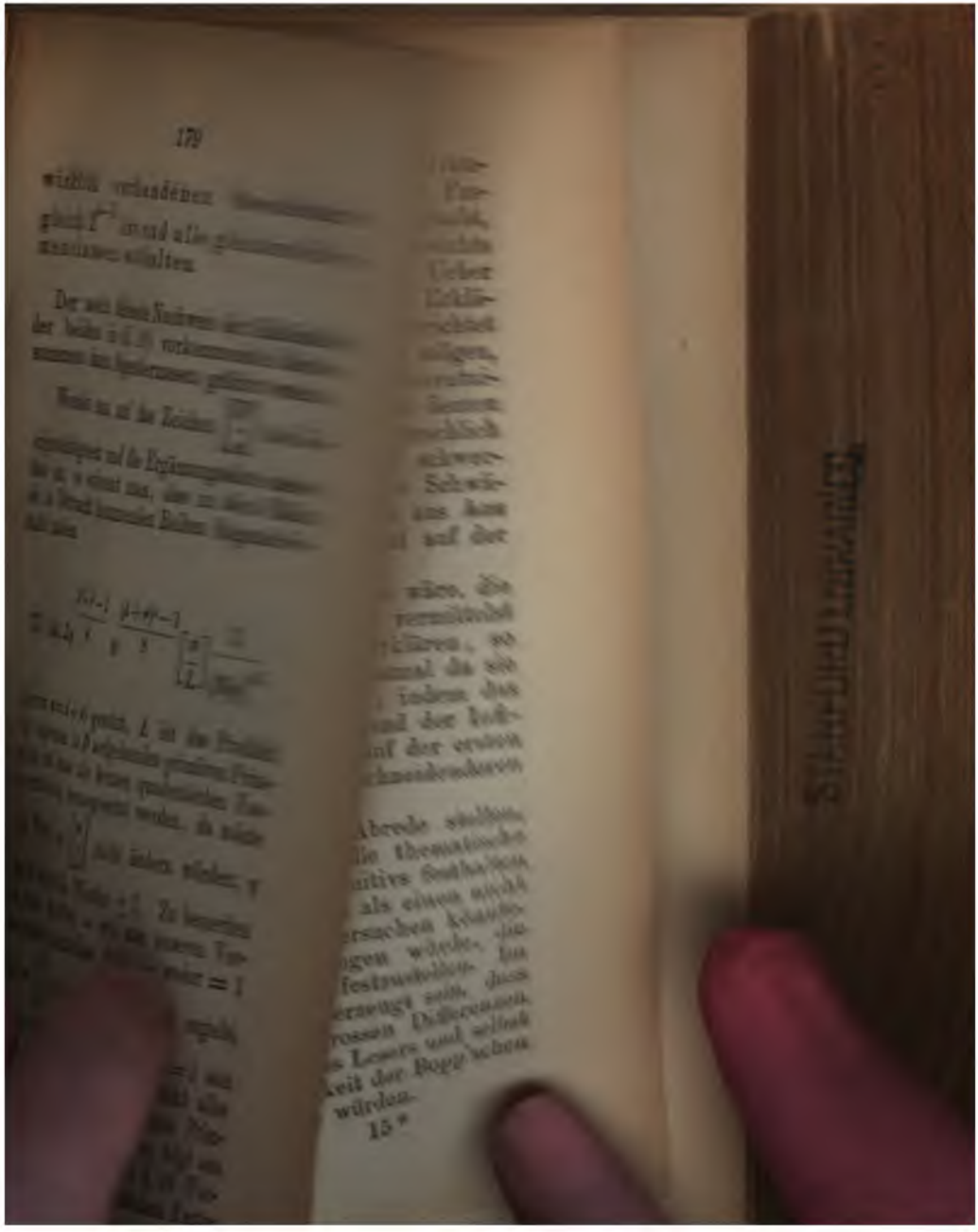
vorkommenden Summen einem bestimmten von Null verschiedenen für alle gleichen Grenzwerth, den Dirichlet näher bestimmt hat und der mit W bezeichnet werden soll. Wir erhalten so

$$16)\quad 8(s-1)\Sigma\frac{\Phi(n)}{(N(n))^s}\cdot\Sigma\left[\frac{D}{n}\right]\frac{\Phi(n)}{(N(n))^s}=(h-h^1)\,l$$

In den beiden Fällen, wo $\Phi(n)$ gleich d Anfangsglied in der Entwicklung von $\Pi(1+$ oder gleich ΠC^1 ist, ist $h^1=0$ und die G chung 16) ist gerade diejenige, welche Dir zur Bestimmung der Classenzahl der quad schen Formen benutzt hat. In den andern len besitzen die beiden Summen zur linken von Gl. 16) endliche Werthe, wie sogleich gewiesen werden soll. Ihr Produkt mit multiplicirt nähert sich also, wenn s sie nem Grenzwerth 1 nähert, unendlich dem Null und es ergiebt sich

$$h = h^1.$$

Dies findet also in 2^k-2 Fällen s in jedem derselben zerfällt das Form in zwei Gruppen, die beide gleichviel classen enthalten. Die in einem be Geschlecht enthaltenen Classen gehö jedesmal zur selben Gruppe. Dies



die Reihe 17) die Classenzahl der quadratischen Formen der Determinante

$$XLM^2$$

darstellt; X hat hier einen der vier Werthe

$$1,\ i,\ 1+i,\ i(1+i),$$

entsprechend den folgenden 4 Fällen

$$\eta=1,\ \theta=1;\ \eta=-1,\ \theta=1;\ \eta=1,\ \theta=-1;$$

$$\eta=-1,\ \theta=-1.$$

Aus der Endlichkeit der Classenzahl ergiebt sich aber sofort die Richtigkeit unserer Behauptung (vgl. Dirichlet, Untersuchungen über die Theorie der complexen Zahlen. Abhandl. der Acad. d. Wissensch. zu Berlin v. J. 1841. §. 6).

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

12. März. № 7. 1873.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Oeffentliche Sitzung am 1. März.

Enneper, über die Enveloppe einer Kugelfläche.
Klinkerfues, über einen glänzenden Sternschnuppenfall aus dem Jahre 524 n. Chr.
Benfey, Mittheilung des Herrn Dr. Richard Pischel in London über eine südindische Recension des Çâkuntalam.
Stern, Mittheilung des Herrn Dr. Nöther über algebraische Funktionen.
Benfey, Indogermanisches Ptcp. Pf. Pass. auf *tua* oder *tva*.
— Dionysos: Etymologie des Namens.

Indogermanisches Particip Perfecti Passivi auf *tua* oder *tva*.

Von

Th. Benfey.

Bopp hat bekanntlich das Sanskritische Absolutivum oder Gerundium auf *tvâ* für den Instrumentalis Singularis desselben Suffixes *tu* erklärt, aus welchem nach ihm der Infinitiv auf *tu-m* entstanden ist. So deutlich in der Gram-

matica critica linguae Sanscritae 1832, 630, S. 246, wo es heisst: *tvâ* proprie Instrumentalis est suffixi feminini *tu*, cujus Accusativus *tum*, cum Romanorum Accusativo supini conveniens, Infinitivum exprimit.

Gegen diese unmittelbare Verbindung dieser beiden Bildungen, ihre Aufstellung als Casus eines und desselben Nominalthemas, hat Aug. Wilh. v. Schlegel (Indische Bibliothek I. p. 125 ff.) unter andern die in ihnen fast durchgreifend verschiedene Gestalt des radikalen Elements geltend gemacht. Während im Absolutivum ein gunirbarer Vokal des radikalen Elements fast nie gunirt wird, findet im Infinitiv die Gunirung ausnahmslos Statt (vgl. z. B. *ji-tvâ* mit *jé-tum*); während im Absolutiv schwächbare radikale Elemente in den meisten Fällen geschwächt werden, tritt im Infinitiv nie Schwächung ein (vgl. z. B. von *prach*, *prish-tvâ* mit *prásh-tum*, von *han*, *ha-tvâ* mit *hán-tum*); so dass im Allgemeinen im Absolutiv und Infinitiv die radikalen Elemente nur dann identisch sind, wenn sie weder dem Guna noch der Schwächung unterliegen (wie z. B., von *pac*, *pak-tvâ*, *pák-tum*), oder wenn auch im Absolutivum der radikale Theil gunirt wird (wie z. B., von *çî*, *çay-i-tvâ*, *çáy-i-tum*). Aber bezüglich des letzteren Falls treten für das Absolutivum so viele Verbote oder Doppelformen (mit oder ohne Gunirung) ein, dass man, wenn man das Verhältniss des Absolutiv zum Infinitiv im einzelnen verfolgt, findet, dass beide in den radikalen Theilen nur in den seltensten Fällen übereinstimmen.

Man könnte nun zwar den Versuch machen, diese Differenz aus phonetischen Verhältnissen zu erklären und dieses ist auch von Bopp noch

in der letzten Ausgabe seiner 'kritischen Grammatik der Sanskrita-Sprache in kürzerer Fassung' 1863 § 562 S. 370 geschehen. Er glaubt, sie beruhe auf der Verschiedenheit des Gewichts der Endungen: *tvâ* sei schwerer als *tum*. Ueber diese, von Bopp so oft geltend gemachte Erklärungsweise hat die Kritik wohl schon gerichtet und wenn manche auch noch zweifeln mögen, ob Gunirung sich aus ursprünglicher Accentuirung des zu Grunde liegenden Vokals deuten lasse (wie z. B. von *i* 'gehen' grundsprachlich *áimi* sskr. *émi* gr. εἶμι), so wird doch schwerlich irgend Jemand Bedenken tragen Schwächungen, wie *ha-tvâ*, *ha-tá*, *ha-thás* aus *han* + *tvâ* oder *tá* oder *thás*, dem Accent auf der folgenden Silbe zuzuschreiben.

Allein, wenn man auch im Stande wäre, die Differenzen in dem radicalen Theile vermittelst der Differenz der Accentuation zu erklären, so bildet doch gerade diese selbst — zumal da sie eine vollständig durchgreifende ist, indem das Absolutiv stets oxytonirt ist, während der Infinitiv eben so stetig den Accent auf der ersten Silbe hat — einen noch viel einschneidenderen Gegensatz.

Ich will nun keinesweges in Abrede stellen, dass, wenn man mit Gewalt die thematische Identität des Absolutivs und Infinitivs festhalten will, man auch diesen Gegensatz als einen nicht ursprünglichen wegzuerklären versuchen könnte. Doch zweifle ich, ob es gelingen würde, die Bopp'sche Auffassung dadurch festzustellen. Im Gegentheil möchte ich fast überzeugt sein, dass mit jedem Versuche, diese grossen Differenzen wegzudeuten, die Bedenken des Lesers und selbst die eigenen gegen die Richtigkeit der Bopp'schen Auffassung immer zunehmen würden.

Ich glaube daher, dass man — wenigstens zunächst — gut thut beide Bildungen aus einander zu halten und dafür könnte man auch die Differenz der Bedeutung gelten machen, was ebenfalls schon von A. W. v. Schlegel und Lassen geschehen ist (vgl. jedoch Bopp Vgl. Gramm. § 849. 2te Ausg. Bd. III. S. 250 ff. n.).

Die Bedeutung des Absolutivs ist in der überwiegend grössten Mehrzahl auf eine, einer andern vorhergegangene, Handlung beschränkt; selten drückt es eine ihr gleichzeitige aus, die sich stets als eine eben vorhergegangene fassen lässt und wo die Inder, in ihrer rein logischen Auffassung der Sprache, die der besonderen psychischen Anschauung des Darstellers fast gar keinen Raum gewährt, gar eine später vollzogene dadurch bezeichnet finden, ist wesentlich ebenfalls eine eben vorhergegangene oder eng mit der anderen verbundene gemeint (z. B. *netre nimîlya hasati* 'er lacht so, dass ihm die Augen dabei zugehen'; übrigens sind Beispiele dieser Art so selten, dass ich nur die beiden in der Grammatik angeführten kenne).

Der Gebrauch in der weit überwiegenden Majorität der Fälle führt demgemäss auf die Vermuthung, dass der Casus, durch welchen das Absolutiv ausgedrückt ist — denn dass es, so gut wie alle nominalen Formen, ursprünglich ein Casus sei, bezweifelt Niemand, der die Geschichte der indogermanischen Sprachen kennt — zu einem Nominalthema gehören werde, welches vergangene Zeit bezeichnete.

In dieser Vermuthung wird man einigermassen bestärkt durch die Accentgleichheit mit den Participien des Perfect Passivi. Sowohl das Affix *ta*, durch welches derartige Participia gebildet werden, als *na*, *va* und nach Pân. (8. 2. 53)

auch *ma*, welche ebenfalls zu diesem Zweck dienen, sind, mit ganz wenigen Ausnahmen, gerade wie die Absolutive auf *tvâ*, oxytonirt.

Selbst die Gestalt des radikalen Theiles stimmt im Absolutivum und in den Ptcp. Perf. Pass. auf *ta* in der weit überwiegenden Majorität vollständig überein; sogar in vielen der Fälle, wo das Absolutivum ausnahmsweise den Verbalvokal verstärkt, z. B., von *mid*, *med-i-tvā* gerade wie Ptcp. Perf. Pass. *med-i-tá*, so dass es höchst wahrscheinlich wird, dass in den Bildungen, wo der radicale Theil des Absolutivs mit den Infinitiven, was hier der Fall ist (Inf. *méd-i-tum*), stimmt, die Uebereinstimmung eine zufällige ist und vielmehr auf dem Zusammenhange mit einem Ptcp. Pf. Pass. beruht.

Ein solches Ptcp. Pf. Pass. tritt uns aber mit voller Entschiedenheit im Lateinischen *mor-tuo* von *morior* entgegen; zwei andre sehr wahrscheinlich in *mû-tuo* wohl für *moi-tuo*, von einem Verbum, welches dem sskr. *me* = grdspr. *mai* 'tauschen, wechseln' entspricht, und *fa-tuo* (Vb. dunkel); noch zwei andre bilden die Basis von *sta-tua*, *sta-tuere*, und *fu-tuere*.

Im Sskr. würden ihnen solche auf *tva* entsprechen, z. B. dem lateinischen *mor-tuo*, für grdsprachlich *mar-tua*, oder *mar-tva*, sskr., mit Schwächung von *ar* zu *ri* vor der accentuirten Silbe (vgl. Orient u. Occident III. S. 32 ff.), *mri-tvá*. Davon ist das Absolutiv *mri-tvā* der regelrechte alte, in den Veden noch vielfach repräsentirte, bloss durch Antritt von *á*, ohne *n*, gebildete Instr. Sing. msc. oder ntr.

Dass ein Ptcp. Pf. Pass. bis auf diesen Rest im Sskr. aussterben konnte, davon wird man sich leicht überzeugen, wenn man sieht, dass selbst das auf *na* fast ausgestorben ist, ebenso

das ebenfalls indogermanische auf *ra*; dass im Lat. und Griech. das auf *na* und *ra* sich nur als Adj. erhalten hat; im Griech. selbst das auf *ta* seinen ursprünglichen Werth einbüsste; dass überhaupt der ausserordentlich grosse Reichthum an Formen, welchen das Indogermanische vor der Trennung für verwandte Categorien besass, nach derselben, durch das allmälige Zusammenfallen der Bedeutungen derselben, immer mehr verschwand.

Formell könnte *tvâ* eben so gut der Inst. Sing. msc. als ntr. sein; da wir aber wissen, dass im Sskr. — und das Absolutiv ist eine bloss auf das Sskrit beschränkte Formation — das Neutrum des Ptcp. Pf. Pass. auch die Bed. eines Abstracts haben kann, so werden wir es als Instr. des Ntr. betrachten; es bedeutet also z. B. *mri-tvâ* den Instrum. von 'Gestorben sein'; und da der Instrumental ursprünglich zugleich ja vorwaltend ein Sociativus ist, so werden wir z. B. *mritvâ svargam agacchat* etymologisch übersetzen dürfen 'mit dem Vollzogenhaben der Handlung des Sterbens, vollzog er die Handlung des Gehens in das Paradies, d. h. 'nachdem er gestorben war, gelangte er in das Paradies'.

Schliesslich bemerke ich, dass die Spuren dieses Ptcps. keinesweges auf das Latein und Sanskrit beschränkt sind; eben so, dass das Affix mit andern verwandten zusammenhängt. Darauf, sowie auch auf die Frage, ob es in der Indogermanischen Grundsprache *tua* oder *tva* lautete, näher einzugehen, ist aber nur in einer den Gegenstand erschöpfenden Abhandlung möglich, und, da ich für lange Zeit von andern Aufgaben in Anspruch genommen bin, bin ich nicht im Stande, eine solche — wenigstens so bald — in Aussicht zu stellen.

Dionysos: Etymologie des Namens.

Von

Th. Benfey.

Aus dem am Schlusse des vorhergehenden Aufsatzes bemerkten Grunde wird es mir auch lange, vielleicht überhaupt unmöglich sein eine Abhandlung über den Dionysos auszuarbeiten, welche ich vorbereitet hatte. Ich beschränke mich daher für jetzt darauf, eine Etymologie des Namens mitzutheilen, von welcher ich in der Abhandlung versucht haben würde, zu zeigen, dass sie mit dem Wesen des Gottes zusammenpasst und dessen Verständnis erleichtert.

Vergleichen wir die lesbische Form des Namens *Ζόννυξος* mit *Διώνυσος*, so erkennen wir zunächst, dass letztrer nicht ein sondern zwei *ν* enthielt; dafür entscheidet auch die Nebenform *Διώνῡσος*, in welcher der lange Vokal *ω* die einst folgende Doppelconsonanz bestätigt.

Wir erkennen damit als ersten Theil des Namens *Διον*, welcher auch in *Διώνη* für *Διωνα* (vgl. Or. u. Occ. I, 279 ff.) zu Grunde liegt, und werden wohl unbedenklich in *Διον* und *Ζον* den Reflex von grdspchl. *divan* erblicken dürfen, welches, einmal mit Bewahrung des *a*, das andre Mal mit Umwandlung desselben in *e*, auch in *Ζάν Ζήν* reflectirt wird (vgl. 'Ueber die Entstehung des Indogerm. Vokativs in Bd. XVII der Abhandlungen S. 46).

Die Bedeutung von *divan* = *Διϝον, Ζον* und dem daraus hervorgegangenen *diu* ist 'Helle, Himmel, Gott des Himmels, Tag' (s. ebds.).

Der zweite Theil von *Ζόν-νυξος* enthält statt des *σ* in *Διόνυσος* ein *ξ*; diess ist bekanntlich nicht selten dialektischer Vertreter von ge-

wöhnlichem σσ (vgl. z. B. διξός für gew. δισσός); von ursprünglichem σσ wird aber mehrfach das eine σ eingebüsst (vgl. homer. μέσσος [für μέϑιο = sskr. *mádhya*, lat. *medio*], gew. μέσο). Dafür aber, dass auch hier ein σσ ursprünglicher gewesen und eines derselben erst später eingebüsst sei, spricht wiederum die Länge des vorhergehenden *v*.

Ferner ist es bekannt, dass im Griechischen σσ für κτι eintritt, z. B. in ἄνασσα für ἀνακτ-ια von ἄνακτ. Dadurch werden wir dahin geführt in dem zweiten Theil des Namens: νυξο, νῡσο für νυσσο, als Grundform νυκτιο zu erkennen, also eine Ableitung von νυκτ 'Nacht' und dass diess auch wirklich richtig sei, wird wenigstens höchst wahrscheinlich durch die Bed. des ersten Theils Διϝον 'Tag' u. s. w.

Das Suffix ιο bildet bekanntlich Patronymika, z. B. Τελαμών-ιο 'Sohn des Telamon', gerade wie das im Sskr. entsprechende *ya*, für ursprüngliches *ia*, z. B. *Kaurav-ya* für *Kaurav-ia*, 'Spross des *Kuru*'.

Danach ist die Grundform von Διόνυσο Διϝονυκτιο und bedeutet 'Sohn des Tages und der Nacht', oder 'Sohn der Helle und der Nacht' oder 'Sohn des Himmels und der Nacht' oder endlich 'Sohn des Gottes des Himmels (des Zeus) und der Nacht'. Die Basis, Διϝον-νυκτ, ist ein Copulativ-Compositum, wie νυχϑήμερο.

Welche Bedeutung vorzuziehen sei, kann nur durch Behandlung des Wesens des Gottes bestimmt werden, wozu es mir, wie gesagt, jetzt und für lange an Zeit gebricht. Ich muss es daher den Mythologen überlassen, ob sie von dieser Etymologie Gebrauch machen können.

In einem Excurs zu der beabsichtigten Abhandlung sollte auch das Suffix ιο besprochen

werden. Hier bemerke ich nur, dass, nach meinen Untersuchungen, seine Bed. 'angehörig, eigen' ist und dass es keinesweges mit dem Pronomen relativum *ya* zusammenhängt. Diese Untersuchung hoffe ich später veröffentlichen zu können.

Ueber eine südindische Recension des Çâkuntala*m*.

Von

Dr. Richard Pischel in London.

Stenzler hatte gleich beim Erscheinen der Ausgabe des Çâkuntala*m* von Böhtlingk gegen die allgemeine Annahme, dass dieselbe einen ursprünglicheren Text enthalte, Einspruch erhoben und sich mit grosser Entschiedenheit für die bengalische Recension erklärt. Auch Rückert war bei eingehenderer Beschäftigung mit den Texten wenigstens zweifelhaft geworden. In meiner Dissertation »de Kâlidâsae Çâkuntali recensionibus« Breslau 1870 bin ich Stenzler gefolgt und habe nachzuweisen gesucht, dass die Dev. Rec. einen grossen Theil ihrer Lesarten Glossen verdankt, die ursprünglich vom Rande in den Text geraten, später diesen selbst verdrängt haben. Diese von Stenzler aufgestellte und von mir vertheidigte Ansicht bin ich nunmehr im Stande auch handschriftlich nachzuweisen und gestützt auf ein sehr umfassendes, sich täglich vermehrendes Material, kann ich jetzt fast Zeile für Zeile den Nachweis führen, dass die bengal. Rec. dem Original weit näher steht als jede andere. Neben den bis jetzt bekannten drei Recensionen des Çâk. erhebt näm-

lich noch eine vierte den Anspruch von Kâlidâsa herzurühren. Man kann sie, da sie sich hauptsächlich, keineswegs aber ausschliesslich in südindischen Handschriften vorfindet, mit dem Namen der südindischen bezeichnen, obwohl dieser Name ebenso falsch ist, wie der der bengal. und Dev. Rec. Die ersten umfassenderen Nachrichten über diese Rec. verdanke ich Herrn Professor Eggeling, der mir sein darüber gesammeltes Material bereitwilligst zur Verfügung stellte, wofür ich ihm meinen herzlichsten Dank sage. Von dieser Recension nun befinden sich hier in London 4 Handschriften und ein neuer Commentar des Abhirâma. Zwei der Handschriften sind in Telugu, eine in Grantha und eine in Malayâlam geschrieben. Ueber die letztere, sowie über den in schlechtem Grantha geschriebenen Commentar des Abhirâma beruht meine Kenntnis bis jetzt nur auf den Mittheilungen von Herrn Professor Eggeling; die drei ersten habe ich bereits selbst vollständig verglichen und ich ziehe nur sie hier bei Angabe des Textes heran. Die Buchstaben für die Handschriften wähle ich mit Rücksicht auf die von Böhtlingk gebrauchten; im übrigen behalte ich die in meiner Dissertation angewendeten Buchstaben bei und verweise der Kürze wegen beständig auf jene. F = Teluguhandschrift des East-India-Office mit der Aufschrift Nâtakas XI. Papierhandschrift. Auf Burnell's Veranlassung 1864 gemachte sorgfältige Abschrift einer guten Handschrift. Hat viele aus der Aussprache der Draviden herstammende Eigenthümlichkeiten im Prakrit. 144 pp.

L = Granthahandschrift der Royal Asiatic Society. 86 Palmblätter. Zierliche und gute Granthaschrift. Sehr correkt. P = Teluguhand-

schrift des East-India-Office Mackenzie Collection Nr. 108. 68 Palmblätter. Oft sehr schwer zu lesen. Aelteste Handschrift dieser Recension. An den Rändern oft sehr stark beschädigt.

Dazu kommt;

H. = Handschrift der Kopenhagener Bibliothek, deren Lesarten von Burkhard in seiner Ausgabe der Çakuntalâ bekannt gemacht worden sind. Da der Herausgeber jedoch nur eine sehr ungenaue Abschrift in lateinischen Lettern benutzt hat, ist diese Quelle nur vorsichtig zu gebrauchen. Ferner habe ich von bengal. Handschriften die älteste und in vieler Hinsicht auch beste Handschrift von allen Handschriften des Çâk. S nunmehr selbst vollständig verglichen. Ebenso:

N = Bengâlîhandschrift der Bodleyana in Oxford. Wilson 40. R. = Bengalihandschrift des East-India-Office Nr. 1491. Ich habe ebenso vollständig Ç = Çankara Bodley. Wilson 40 copirt und bemerke hier, dass die bei Böhtlingk Çak. p. VIII gemachten Angaben nicht richtig sind. Die Handschrift ist in sehr leserlichem guten Bengâli geschrieben und der 7. Akt wird vollständig erklärt. Aber von p. 126, 8 Chézy bis beinahe zum Ende des Dramas gehört der Commentar wörtlich dem Candraçekhara zu. Dass es nicht Çaṅkara sein konnte, hätte man schon daraus ersehen können, dass er fast auf jeder Seite citirt wird. Der Schluss des ganzen ist wieder dem Çaṅkara gehörig. Cd. = Candraçekhara East-India-Office Nr. 77 u. 1398. Ferner habe ich sämmtliche von Böhtl. benutzte Handschriften mit Ausnahme des in Oxford befindlichen W. und die Handschrift des Kâśavema genau untersucht und sind sie mir immer zur Hand. Auch die zweite Berliner Handschrift

Chambers 272 habe ich durchgesehen. Ich bezeichne sie mit E. Es ist mir die Bewältigung eines so gewaltigen Materiales bei anderen Arbeiten und in verhältnismässig sehr kurzer Zeit nur durch die ungemeine mich tief verpflichtende Liberalität der Bibliothekare des East-India-Office Herrn Dr. Rost, der Bodleiana Rev. H. O. Coxe, der Asiatic Society Herrn Prof. Eggeling möglich gewesen. Dies sind die Quellen, auf denen die folgende Abhandlung beruht. — Die südindische Rec. stimmt in allen Haupteigentümlichkeiten (3. 5. 6. Akt) mit der Dev. Rec. überein, ist aber besonders im ersten Akte noch kürzer als diese. Die Handschriften sind aber ebensowenig wie die Dev. Handschriften irgendwie consequent; die eine lässt Verse aus, welche die andere hat und in der einen findet sich mehrfach der Inhalt eines Satzes in wenige Worte zusammengezogen, während die andere ihn in wörtlicher Uebereinstimmung mit den Bengâlîhandschriften giebt. So lassen z. B. L. P von 1. Hand, die Malayâlam-Handschrift und Kâṭavema, über den unten mehr, p. 6, 20 —23 (dist. 10) ed. Böhtl. aus; F. P von 2. Hand, H dagegen haben es. p. 7, 7 liest H nach Burkhards Angaben: itarau bâhum udyamya sarvadâ cakravartinam âpnuhi iti vyâharataḥ. F liest itarau api bâhum udyamya cakra° âpnuhîti vyâharataḥ. Diese setzen also noch etwas zu dem Texte der Bengâlîrecension hinzu. P ist schon kürzer; er liest: itarau ca bâhum ud° cakra° âp°; L lässt die ganze Zeile aus. Ueberhaupt bilden die 3 Teluguhandschriften wieder eine Gruppe für sich gegenüber der Granthahandschrift, die den kürzesten Text giebt und mit der, wie es scheint, die Malayâlamhandschrift übereinstimmt. p. 7, 8 liest die

bengal. Rec. râjâ / sapranâmam / pratigrhîtam brâhmanavacah; NÇD haben grhîtam statt prati°. Von den südindischen liest P pratigrhîtam brâhmanavacanam, F. H. grhîtam brâhmanavacanam, sie haben also ganz dieselben Varianten wie die bengalischen. Von den Dev. Handschriften lesen CTWME râjâ / sapranâmam / pratigrhîtam; G hat grhîtam; L hat nur noch râjâ sapranâmam pratigrhnâti und Kâtavema lässt schliesslich die ganze Zeile aus.

p. 60, 4 ed. Böhtl. lesen die bengal. Handschriften ohne v. l. kim nu khalu gîtam evamvidham âkarnya etc. So hat wörtlich auch P. Glossirt man diese Lesart, so entsteht gîtam evamvidhârtham und so lesen L und H. Diese Glosse konnte nun in verschiedener Weise abgekürzt werden. Die Dev. Handschriften haben noch gîtârtham âkarnya; F blos tam evârtham. Schliesslich bleibt also blos die Glosse übrig. Solche Fälle sind keineswegs vereinzelt, sondern sehr zahlreich, und eben dadurch setzt mich die südindische Rec. in den Stand zu zeigen, dass das Çâk. keine Erweiterung, sondern eine planmässige Verkürzung erfahren hat. Wenn man von den Phrasen von Monier Williams absieht, von denen ich die auf den Stil Kâlidâsa's bezügliche bereits in meiner Dissertation als auf die Dev. Rec. anwendbar nachgewiesen habe, so hat noch niemand einen anderen triftigen Grund für die grössere Ursprünglichkeit der Dev. Rec. anzuführen gewusst, als ihre grössere Kürze. Es ist dagegen Thatsache, dass es noch keinem der Herausgeber möglich gewesen ist, einen lesbaren Text herzustellen, ohne zu der bengal. Rec. seine Zuflucht zu nehmen. Vor dem Irrthum aber halte ich mich für verpflichtet zu warnen, als ob die bei Böhtlingk und ganz be-

sondern bei Williams gegebenen Varianten ein Bild der Dev. Handschriften geben. Nicht die Hälfte der Fehler und Eigentümlichkeiten dieser Handschriften sind angegeben und welcher Art die neue Collation des Herrn Williams gewesen ist, davon werde ich bald genügende Beispiele geben. Geht man auf dem bisher betretenen Wege weiter und dies müssen die Vertheidiger der Dev. Rec., so folgt, dass die südindisehe Rec., weil sie noch kürzer ist, auch noch älter sein muss; denn sie giebt ja sonst ein ganz treues Bild dieser »schöneren« Recension. In der That sprechen auch sehr gewichtige Beweise dafür, dass die südindische Rec. älter ist als die Dev. Rec. Bei einem flüchtigen Ueberblick freilich scheint gar keine grosse Verschiedenheit zwischen der südindischen und der Dev. Rec. zu sein. Nur im 6. Akte (dist. 129 ed. Böhtl.) enthält die südindische ein ihr völlig eigentümliches Distichon und in allen Handschriften fehlen nur p. 10, 1—6; p. 12, 1—5; p. 18, 19—21; an anderen Stellen schwanken die Handschriften. Ueberaus häufig aber sind die Fälle, wo eine oder zwei Zeilen ganz fehlen oder in wenige Worte zusammengezogen sind. Prüft man aber den Text im einzelnen, so ergiebt sich allerdings eine sehr bedeutende Abweichung. Ganz neue Lesarten finden sich in dieser Recension vor; aber auch sie sind verschwindend wenig im Vergleich mit der grossen Zahl der Lesarten, in denen die südindische mit der bengalischen Rec. übereinstimmt, oft in so überraschender Weise, dass ganze Sätze die bisher nur in bengal. Handschriften vorlagen, sich auch hier mit ganz denselben Worten finden. Einige Beispiele habe ich schon angeführt; andere zahlreiche gebe ich im Laufe der

Abhandlung. Gegenüber dieser Zerfahrenheit der Dev. und südindischen Handschriften bilden die bengal. Handschriften eine einheitliche festgeschlossene Gruppe nur mit Schwankungen, wie sie sich bei allen Werken finden und hier ganz besonders natürlich sind. Denn dass auch die bengal. Rec. interpolirt ist, hat noch niemand geleugnet, und was ich diss. p. 9. 10 keineswegs jemals in Abrede gestellt habe, dass die Dev. Rec. zuweilen einen besseren Text hat, leugne ich auch jetzt nicht völlig. Gewöhnlich hat aber eine der bengal. Handschriften dann ganz dieselbe Lesart, so dass uns dies auf eine Zeit hinweist, die der unserer Handschriften weit vorausgeht. Höchst bemerkenswerth ist, dass die älteste Handschrift der bengal. Rec. S nur An*a*sûyâ liest, an zwei Stellen aus An*u*sûyâ corrigirt; die älteste Handschrift der südindischen dagegen, Ṗ an zwei Stellen des ersten Aktes p. 9, 21 und p. 10, 21 ed. Böhtl. ganz unzweifelhaft An*u*sûyâ liest. S hat nie dushmanta*ḥ*, einmal du*ḥ*smanta*ḥ*, sonst immer wie N du*ḥ*shvanta*ḥ*; die südindischen schwanken zwischen dushshanta*ḥ* und dushyanta*ḥ*. Burkhard giebt duççanta*ḥ* und duçyanta*ḥ* aus H an. Ferner hat Ṗ am Anfange des dritten Aktes gegenüber den übrigen südindischen Handschriften p. 44, 1—4. ed. Chézy. Schon Böhtlingk hatte vermuthet, dass eine dritte Recension des Çàk. in M vorliege, und ich habe diese Vermuthung durch eine berliner Handschrift D bestätigt (diss. p. 12 ff.). Die Angaben über letztere halte ich in jeder Hinsicht aufrecht; sie gehört nicht der bengal. Rec. durchgängig an. Dieser in M und D vorliegenden Recension nun steht die südindische sehr nahe, wenn man die Textesgestalt im einzelnen berücksichtigt; als Gan-

zes aufgefasst, ist sie am nächsten verwandt mit C, den ich bereits diss. 21 als Hauptrepräsentanten (G ist unvollständig) der Dev. Rec. bezeichnet habe. Identificiren kann man aber die südindische Rec. mit keiner der bekannten Rec., da sie, wie bemerkt, noch kürzer ist und manche ihr eigenthümliche Lesarten enthält. Was ist also die südindische Recension, und wie kann man aus diesem Labyrinth von Lesarten und Recensionen den rettenden Faden finden? Nur dadurch, dass man nachweist, dass die südindische Recension älter ist als die Dev. Recension. Dann klärt sich plötzlich alles auf und die Schwierigkeiten in der Recensionenfrage verschwinden eine nach der anderen.

1) Die südindische Recension bietet einen von Interpolationen freieren, viel correcteren Text dar als die Dev. Recension. Um nicht wieder misverstanden zu werden, bemerke ich hier, dass der Ausdruck »alle Handschriften« nur der Kürze wegen gebraucht wird und sich selbstverständlich nur auf alle mir bekannten Handschriften beziehen kann (diss. p. 12 nondum sat multi codices noti). p. 9, 23 ed. Böhtl. fügen alle Dev. Hdsch. hinzu ma*m* ki*m* uvâlambhesi: Die südindischen und bengalischen Hdsch. kennen diese Glosse ebensowénig ats Kâ*t*avema. diss. p. 39.

p. 14, 21 fügen die Dev. Hdsch. godamî-tîre hinzu. Die südindischen Hdsch., K*ât.* und die bengal. kennen es nicht. diss. p. 40.

p. 17, 5. 6. Die Dev. Hdsch. fügen hinzu iti râjapurusha*m* mâ*m* avagacchatha. F. H. L. K*ât.* die bengal. haben es nicht.

Nur P hat râjâpurusham avagaccha (sic) diss. p. 41.

p. 20, 5. Die Dev. Hdsch. fügen hinzu

adavîdo adavim. Sämmtliche südind., Kâtav. und bengal. lassen es fort. diss. p. 43.

p. 22, 12. Die Dev. Hdsch. fügen me vor suhṛdvâkyam hinzu, was das Sprichwort völlig verdirbt. Die südind. und bengal. lassen es fort.

p. 22, 19. 20. Die Dev. Hdsch. fügen hinzu: tena hi sugahîdo aam jano (E. bamhano). Die südind. und bengal. lassen es aus. diss. p. 46.

p. 34, 21 liegt wieder ein Sprichwort vor. Sprichwörter aber werden in der Dev. Rec. immer verstümmelt und unkenntlich gemacht. So p. 22, 11 durch Zufügung von âsi, so p. 22, 12 durch Zufügung von me, so hier durch siniddhajana, das sämmtliche südindische, Kâtav. und bengal. fortlassen, so auch p. 67, 23 durch Zufügung von iti yad ucyate (diss. p. 61). L hat vorher gar noch: idam tad apy abhicâri vacah, was aus p. 81, 8 stammt, wo dies und yad ucyate ganz am Platze sind, da sie sich gegenseitig ergänzen. Es gehört diese Verstümmlung zu den vielen Schönheiten der schöneren Recension.

p. 35, 13. Dev. samçayacchedi vacanam. Südind. bengal. Kâtav. vimarçachedi. diss. p. 50. Kâtav. erklärt vimarça° mit samçayâpanodi.

p. 57, 14. 15. In der Dev. Rec. kann diese Stelle nicht handschriftlich hergestellt werden. Die südind. u. Kât. lesen, um kleinere v. l. zu übergehen: bhûo vi tavaccaranapîdidam tâdassa sariram adimettam mama kide ukkamthidam bhavissadi (*om.* P.)

Die diss. p. 58 aufgestellte von Weber mit Recht verworfene Vermuthung nehme ich hiermit zurück.

p. 69, 9. Die Dev. Hdsch. attasacchanda°. Die südind. bengal. Kât. lassen atta fort. Böhtlingks Vermuthung, die Burkhard gar in den

Text aufnimmt, dass atta = attha sei, fällt hiermit, zumal auch p. 99, 6 die südind. mit den bengal. Handschriften übereinstimmen. diss. p. 61.

p. 70, 10. Die Dev. Rec. fügt parideviṇim hinzu; die südind. bengal. Kâṭ. haben es nicht. diss. p. 62.

Ich kann hier unmöglich auf solche Lesarten eingehen, in denen die südind. Rec. die Dev. Rec. übertrifft, ohne dass eine handgreifliche Interpolation vorliegt. Ich habe gerade diese Beispiele ausgewählt, um zugleich den Zusammenhang der südind. Rec. mit Kâṭavema einerseits und der bengal. Rec. andrerseits darzulegen und zu zeigen, dass die von Stenzler und mir als Glossen bezeichneten Lesarten der Dev. Rec. nun auch handschriftlich als solche erwiesen sind. In zahlreichen anderen Fällen hat diese Rec., wie auch noch einige Handschriften der Dev. Rec., die ursprüngliche Gestalt der Glossen erhalten. So findet sich die von mir diss. p. 65 als Glosse betrachtete Lesart p. 91, 13. 17, mamâpy ante puruvaṃçaçrîr akâla ivoptabîjâ bhûr evaṃvṛttâ in der That in P gar nicht. P liest: mamâpy ante puruvaṃçaçriyo s py evamavasthâ. In F fehlt p. 88, 10 — 92, 6. und H geht nicht so weit. In L aber steht die Glosse in folgender Gestalt: ⁰ çriyo s py evamavasthâḥ / akâla ivoptabîjabhûḥ / esha eva me vṛttântaḥ. Deutlicher kann man die Glosse nicht wünschen. p. 51, 3 lesen L. P. H. E. T M C kaṇṭhastambhita⁰ (diss. p. 55 ff.), so dass auch diese Glosse als erwiesen anzusehen ist. Verbindet man damit das diss. p. 35 beigebrachte Beispiel, das durch die südindische Rec. nicht geändert wird, so gehört, da zwei Verse der Dev. und südindischen Rec. als aus Glossen der bengal. Rec. entstanden nachgewie-

sen sind, ein bisher in der Wissenschaft unerhörter Glaube dazu, um die Dev. Rec. für älter zu halten, als die bengal. Die eigenthümliche Beschaffenheit der südindischen Handschriften erklärt ganz natürlich das Entstehen solcher Lesarten, und auch dies trägt dazu bei, der südindischen Rec. die Priorität vor der Dev. Rec. zuzuerkennen. In allen südindischen Handschriften des Çâk. befindet sich nämlich eine meist sehr correkte und gute Sanskritübersetzung der Prakritstellen unmittelbar hinter dem Prakrittexte selbst, derart, dass bei längeren Stellen, die Prakritrede von der Sanskritübersetzung unterbrochen wird und Prakrit und Sanskrit beständig wechseln. Ebenso aber stehen auch Varianten und erklärende Glossen mitten im Texte, oft nicht einmal durch zwei Striche angedeutet, und man wird bei Lesung des Textes plötzlich von einem iti ca pâṭhaḥ oder ity arthaḥ überrascht, welche Worte aber gewöhnlich fehlen. So steht p. 17, 12 hinter der Sanskritübersetzung der Prakritworte in P mitten im Texte ohne jede Andeutung kâryasyeti çeshaḥ, p. 20, 5 in P mitten in der Sanskritübersetzung im Texte zu âhiṇḍyate die Glosse paryaṭyata iti arthaḥ; p. 23, 20 in F hinter der Sanskritübersetzung: jîrṇarxasya naramâṁsalolupasyeti ca pâṭhaḥ; p. 89, 5 steht in L mitten im Texte purobhâgidoshaikadarçitasya karma paurobhâgyaṁ. Man hat also um die Lesarten der Dev. Rec. zu erklären, gar nicht einmal bis zum Rande zu gehen; der laufende Text lieferte dem Verfertiger der Dev. Rec. reichlichen Stoff, der ursprünglich gar nicht zu diesem Zwecke bestimmt war. Zugleich zeigt diese Gestalt der südind. Handschriften, dass einer der Lieblingsgedanken der Vertheidiger der Dev. Rec., näm-

lich die Dummheit und Unwissenheit der Abschreiber wiederum nur ein Glaube war, der vor der Macht der Thatsachen nicht mehr Recht hat, wie jeder andere Glaube.

2) Die südindische Recension hat, wie die bengalische, zwei Commentatoren gefunden: Abhirâma und Kâṭavema; die Dev. Rec. hat keinen einzigen Commentator. Bereits diss. p. 24 ff. hatte ich bezweifelt, dass Kâṭavema die Dev. Rec. erkläre; die südindische Rec. zeigt, dass dieser Zweifel berechtigt war. Alle Abweichungen Kâṭavema's von Böhtl. Text finden sich in der südindischen Rec., auch dist. 129. So erklärt sich, dass ich aus ihm 64 Lesarten hatte, in denen er mit der bengal. Rec. übereinstimmt, eine Zahl, die ich jetzt noch bedeutend vermehren kann. So erklärt sich ferner, dass sein Prakrittext oft von der Sanskritübersetzung verschieden ist; auch dies ist in der südindischen Rec. der Fall. So erklären sich ferner die unzähligen Schreibfehler der Handschrift, deren Titelblatt ausser in Devanâgarî auch in Telugu geschrieben ist: sie haben ihren Grund in den südindischen Schriftzeichen und die Handschrift ist aus einer südindischen Handschrift umgeschrieben. Ihre ganze innere Einrichtung ist dieselbe, wie die der südindischen, worüber unter Nr. 5 mehr. Wenn auch Kâṭavema somit vieles nicht zu erklären vorfand, so bleibt der Vorwurf der Trägheit oder wenigstens grosser Ungenauigkeit doch auf ihm lasten, zumal er in seinem Commentar zur Mâlavikâ nicht viel besser zu Werke geht. Dieser Commentar gehört dem East-India-Office an und ist in sehr schlechtem Grantha geschrieben, aber, sobald es gelungen ist, die Schriftzeichen zu enträthseln, meist sehr correkt. Auch hier folgt

Kâṭavema der südindischen Recension. Er erwähnt im Anfange seinen Commentar zum Çâkuntalam. Uebrigens steht der Name des Scholiasten nicht über allen Zweifel erhaben da. Allerdings scheint aus den mir nicht ganz verständlichen Versen im Anfange des Commentares zum Çâkuntalam: kavînâm âçrayo mamtrî kâṭabhûpatanûdbhavaḥ / so s yam vemavibhuḥ kumâragirinâ (sic) râjñâ niyuktaḥ kṛtî / u. s. w. sich die Namensform Kâṭavema zu ergeben. Ich verstehe vemavibhuḥ nicht und der plötzliche Uebergang vom epischen Çloka zu Çârdûlavikrîditam erregt Bedenken. Dagegen heisst der Scholiast in der ganz vorzüglich correcten Handschrift in Grantha, die seinen Commentar zur Mâlavikâ enthält, alle fünf Male ohne die geringste Variante: Kâṭayavemabhûpa. In der über alle Massen verdorbenen Handschrift des Commentares zum Çàk. (E. J. O. 2697) gestaltet sich die Sache folgendermassen. Am Ende des ersten Aktes steht: kâṭavîyavemabhûpâla, des zweiten: kâṭavemabhûpâla, des dritten: kâṭaveyavemabhûpâla, des vierten: kâṭaveyavemabhûpâla, wie eben; des fünften; kâṭayavemabhûpâla, also wie die Granthahandschrift, des 6. und 7.: kâṭavemabhûpâla. Bei der bekannten Spielerei mit Eigennamen in Versen kann der Vers nicht als entscheidend angesehen werden. Der Scholiast heisst drei Mal Kâṭavema, sechs Mal Kâṭayavema, und die Namensform in den übrigen drei Stellen weist ebenfalls nur auf Kâṭayavema, gewiss nicht auf Kâṭavema. Aus den tamulischen und sonstigen Wörterbüchern der dravidischen Sprachen kann ich weder für Kâṭavema noch für Kâṭayavema eine Erklärung finden. Nach den Regeln der Kritik scheint mir daher vorläufig nur die Namensform: Kâ-

*ṭa*yavema oder richtiger: Kâ*ṭa*yavema Bhûpâla diplomatisch verbürgt zu sein.

3) Keine der von den Rhetorikern citirten Stellen nöthigt uns die Dev. Rec. anzuerkennen. Die Citate bei Dhanika zum Daçarûpa sind sämmtlich auch in der südindischen ohne Varianten; die im Kâvyaprakâça und Sâhityadarpa*n*a gehören der bengalischen Recension an. Einige Citate im Sâhitya[0] sind nur verdorben nicht verschieden. Dagegen kennen die Rhetoriker Da*n*din Kâvyâdarça I, 40—101. Viçvanâtha Sâhityadarpa*n*a § 625 ff. Pratâparudrîya p. 55 ff. meiner Telugu-Ausgabe. Madras 1868. Vâmana bei Aufrecht Catalog 207 *a*, besonders der ältere und genauere Da*n*din vorzüglich nur zwei dramatische Stilgattungen: die Gau*ḍ*î und die Vaidarbhî oder Dâxi*n*âtyâ rîti*ḥ* d. h. also die bengalische und die südindische. Die anderen — Bhojadeva bei Aufrecht Catalog 208*a* kennt schon sechs — treten gegen diese beiden entschieden zurück; Da*n*din bezeichnet sie I, 101 als bhedâs dieser beiden pratikavi sthitâs. Ich muss mich hier darauf beschränken, dieses Faktum hinzustellen; eine eingehende Behandlung, wie sie diese ganze Frage erheischt, kann ich hier nicht geben. Uebrigens waren mir die Citate bei den Rhetorikern nicht unbekannt, als ich meine Dissertation schrieb; sie lagen mir bereits damals vollständig gesammelt vor, waren aber ebenso wie jetzt für meinen Zweck völlig nutzlos.

4) Ein ganz ähnliches Verhältnis wie zwischen den Handschriften des Çâk. findet, wenn auch in geringerem Grade zwischen denen der Mâlavikâ Statt. Ich habe bereits 2 Devanâgarî-Handschriften Tullbergs A u. B., die Bengâlîhandschrift D und eine Teluguhandschrift des

East-India-Office, die mit F des Çâk. zusammengebunden ist, verglichen, auch einen Theil des Commentares des Kâtayavema copirt, so dass ich mir wohl, wenn mir auch C noch nicht zu Gesicht gekommen ist und mir andere Handschriften nicht vorliegen, ein Urtheil über die Handschriften erlauben darf. Haag kommt in seiner sorgsamen Abhandlung: Zur Texteskritik und Erklärung von Kâlidâsa's Mâlavikâgnimitram. I. Theil. Frauenfeld 1872 p. 5 zu dem Resultate, dass von den von Shankar Pandit benutzten Handschriften G dem Archetypus am nächsten steht. G ist aber eine Teluguhandschrift. Ich trete Haag hierin unbedingt bei; kann aber nicht dasselbe in Bezug auf C sagen, vorausgesetzt, dass die Angaben Tullbergs hier nicht ebenso ungenau sind wie in Bezug auf A B D. Es scheint mir als ob C F und die Teluguhandschrift des E.-J.-O. eine Art gemischte Recension der Mâlavikâ bilden. Den schlechtesten und jüngsten Text geben ohne allen Zweifel A und B, von denen A nur Abschrift von B ist, und ihnen reihen sich die übrigen Handschriften Shankar Pandits an. Das Faktum ergiebt sich mit Sicherheit auch hier, dass die Teluguhandschriften einen besseren und älteren Text enthalten, als die meisten Dev. Handschriften, von denen A und B aber ebenso, wie alle Dev. Handschriften Shankar Pandits und des Çâk. auf ursprünglich südindische Quellen zurückgehen (Nr. 5). Ganz anders würde sich freilich der Text noch gestalten, wenn wir noch andere bengalische Handschriften der Mâlavikâ hätten. D (E. J. O. 833) ist leider sehr verdorben und offenbar einer der schlechtesten seiner Gattung. Trotzdem ist sein Werth von Haag (l. l. p. 3) und mir (diss. p. 35) nicht

überschätzt worden, da er manche ganz vorzügliche Lesarten enthält. Die bisher, so viel ich weiss, unbeachtete Lesart des Sâhityad. p. 28 ed. Roer: chando narttayitur yathaiva manasaḥ sṛshṭam tathâsyâ vapuḥ, die alle anderen weit übertrifft, gehört D an. Mit grösserer Gewissheit als bei der Mâlavikâ kann ich bereits jetzt vom Veṇisaṃhâra sagen, dass hier die bengal. Rec. den besten und ältesten Text enthält. Das Verhältniss der Recensionen ist hier viel klarer als bei dem Çâk., und es ist mir völlig unbegreiflich, wie Grill bei einem so umfassenden Material wie das seinige ist, keinen besseren Text hat geben können. Unverantwortlich ist die Vernachlässigung des Scholiasten und der hiesigen südindischen Handschrift, um so mehr zu bedauern, als sich auch in den hiesigen Dev. Hdsch. des Veṇisaṃhâra gar nicht zu verkennende Spuren südindischen Einflusses finden, die Grill im Apparatus criticus zwar nicht angiebt, die aber nichtsdestoweniger darin sind. Das schlagendste Beispiel zu dem Verhältniss zwischen bengalischen und südindischen Handschriften liefert Vararuci. Nach den übereinstimmenden Angaben von Lassen, Delius und Cowell ist das beste MS. A aus einer bengalischen Handschrift abgeschrieben. W dagegen die schönste und am meisten interpolirte, oft allen anderen Handschriften gegenüberstehende Handschrift, die ich selbst eingesehen habe, hat alle Kennzeichen südindischer Handschriften in sich. Es kann keinem Zweifel unterliegen, dass sie aus einer südindischen Quelle stammt. Man sehe Nr. 5 und Cowell Vararuci p. 97. anm. 3.

Eine weitere Analogie liefern die Handschriften des Saptaçatakam des Hâla. Gewiss mit Recht nimmt Weber (Zeitschrift DMG. 26, p.

737) an, dass die im Sâhityad. § 565 erwähnte Muktâvalî sich auf den Commentar des Sâdhâranadeva bezieht, da auch Harinâtha zu Kâvyâdarça I, 13 zu kosho erklärend hinzufügt yathâ Saptaçaty âdi. Aufrecht Catalog p. 203b. Anm. 1. 2. Ebenso unbedingt richtig schliesst Weber aus den Worten Viçvanâtha's, dass die Vrajyârecension die jüngere sein muss. Wie Viçvanâtha diese als atimanoramaḥ bezeichnet, so wird auch der Vaidarbhîstil von den Rhetorikern bevorzugt; ein entartetes Geschlecht verlangt leichte und bequeme Lectüre. Die Vrajyârecension aber liegt in einer Dev. Handschrift vor. Dass auch eine Teluguhandschrift eine Anordnung nach dem Inhalt zeigt, ist nicht zu verwundern, da ja alles darauf hinweist, dass das ganze Werk in Südindien entstanden ist. Da nähere Angaben über diese Recension noch nicht vorliegen, kann sie vorläufig hier nicht in Betracht kommen. Gegenüber der Vrajyârecension bildet aber die entschieden ältere die Recension, die uns in der Teluguhandschrift des E. J. O. 2796 vorliegt, mit der die Handschrift, aus der Weber zuerst den Hâla bekannt gemacht hat und ebenso wesentlich Gaṅgâdhara übereinstimmt (Weber l. l. p. 736). Dass aber die Vermuthung Webers, dass die südindischen Handschriften aus Devanâgarîhandschriften umgeschrieben seien (l. l. p. 743) unhaltbar ist, und dass vielmehr das umgekehrte anzunehmen ist, glaube ich mit Sicherheit nachweisen zu können, und damit komme ich zu dem entscheidendsten und wichtigsten Beweise für die grössere Ursprünglichkeit der südindischen Rec. vor der Dev. Rec.

5) Die orthographischen Eigentümlichkeiten der Handschriften. Eine der

auffallendsten Erscheinungen in südindischen Handschriften ist der Gebrauch eines in der Zeile stehenden Punktes in den Prakritstellen, um dadurch anzudeuten, dass der folgende Buchstabe verdoppelt werden soll. Dies geschieht nun vor Aspiraten ebensowohl wie vor allen anderen Buchstaben, und daher hat Shankar Pa*n*dit in seiner Ausgabe der Mâlavikâ gemeint, von Vararuci III, 51 abweichen zu müssen. Ich habe bisher diese Eigenthümlichkeit nur in Prakritstellen gefunden; nach Mittheilungen eines der ausgezeichnetsten Kenner südindischer Handschriften und Sprachen Herrn Dr. Rost, dem ich für viele mündliche Belehrung zu danken habe, findet sie sich in anderen südindischen Handschriften auch im Sanskrit, sogar so, dass selbst dh und ch vollständig doppelt ausgeschrieben sind. Benfey hat diese Schreibweise bei dh und *d*h auch in Vedahandschriften gefunden (Sâmav. Einl. XXXIV. Ausführl. Gr. § 14. Bem.) und auch Prakritgelehrte wie Lassen (Inst. Pracr. p. 232) und Höfer (Zeitschrift für die Wissenschaft der Sprache Bd. II, p. 465) haben bereits in Dev. Handschriften wiederholt diese Schreibweise bemerkt, aber ebenso wie Bollensen zur Urv. p. 176 darin nur Schreibfehler gesehen. Der erste, der mehr darin sah, ist Weber, der in der hochwichtigen Einleitung zum Hâla p. 26 bemerkt, dass diese und andere Eigenthümlichkeiten der Handschriften wohl mehr oder weniger auf lautlicher Grundlage beruhen möchten. Das ist nun ganz unzweifelhaft der Fall. Die Dravi*d*ischen Sprachen haben ursprünglich gar keine Aspiraten gehabt; sie sind sämmtlich erst durch das Sanskrit in diese Sprachen gekommen, ja das Tamil hat sich so völlig frei von ihnen erhalten, dass es nicht einmal ein h

hat. Aspiraten sind also für Dravi*d*en eigentlich ganz unaussprechbar, ebenso wie viele andere Consonantenverbindungen des Sanskrit. Caldwell: A Comparative Grammar of the Dravi*d*ian or South India Family of Languages. London 1856 p. 138 fasst das hierher gehörige am besten und übersichtlichsten zusammen. Danach können im Tamil ausser den Nasalen der respektiven Classen und den Halbvokalen nur folgende Gruppen zusammentreten: kk, cc, *tt*, tt, pp, *ll*, RR, *t*k, *t*p, Rk, Rc und Rp. Tamilian laws of sound allow only the above mentioned consonants to stand together in the middle of words without the intervention of a vowel. Cfr. auch Graul: Tamil Grammar p. 8 ff. Caldwell fährt sodann fort: All other consonants must be assimilated, that is the first must be made the same as the second or else a vowel must be inserted between them to render each capable of being pronounced by Tamilian organs. Das ist der Schlüssel zu dem Räthsel der Aspiratenverdopplung in den südindischen Handschriften. Die Tamulen übertrugen, um die ihnen fremden Aspiraten wenigstens einigermassen aussprechbar zu machen, ihre Lautgesetze auf das Prakrit; Sanskrit war längst eine todte Sprache zu der Zeit, aus der unsere Handschriften stammen, aber Prakrit wurde noch gesprochen und verstanden. Es folgt daraus, dass alle Dev. Handschriften, in denen sich eine derartige Aspiratenverdopplung vorfindet, mögen sie einer Literaturgattung angehören, welcher sie wollen, aus Südindien stammen oder aus südindischen Handschriften abgeschrieben sind. Dafür noch folgende Beweise. Shankar Pa*nd*it Mâlav. critical notice p. IX bemerkt, dass sogar in den von ihm benutzten

Devanâgarî-Handschriften im Prakrit the presence of the first component of every conjunct letter is merely indicated by a dot placed before it, und ganz dasselbe ist in der Dev. Handschrift des Kâtayavema der Fall, so dass nicht bloss sämmtliche Aspiraten, sondern alle anderen Consonanten ganz wie in den südindischen Handschriften statt verdoppelt geschrieben zu werden einen ○ vor sich haben, so dass Wörter wie abbhatthanâ hier a○bha○thanâ geschrieben sind. Dadurch verschwinden viele Schreibfehler der Handschrift. Shankar Pandit notirt ferner aus seinen Devanâgarîhandschriften die Schreibweise a○a für das aus ârya entstandene ajja. Auch dies ist die ausschliessliche mir anfangs ganz unerklärliche Schreibweise der südindischen Palmblätterhandschriften. Ganz dieselbe findet sich in der Dev. Hdsch. des Kâtayavema, so dass man für ajjauttassa hier liest: a○au○ta○sa, wie in den südindischen. Der Grund ist der, dass dem Tamil der Laut ja ganz fehlt; nur im Vulgärtamil wird ca zuweilen gleich ja gesprochen. Man wird also wohl nicht zweifeln, dass die Dev. Hdschr. Shankar Pandits und die des Kâtayavema aus südindischen abgeschrieben sind. Dieselbe Eigenthümlichkeit wie die Handschrift des Kâtayavema aber zeigt auch die Hâlahandschrift des Kullanâtha. So nämlich sind v. l. wie v. 3 mamjhaârammi, wie v. 5 vimbhamam, wie v. 7 lamdahavilaâ u. s. w. zu erklären; sie waren in der Teluguhandschrift ma○jhaâra○mi etc. geschrieben. Daher hat diese Handschrift fast durchgängig die Schreibung khkh, thth, jhjh etc. für kkh, tth, jjh, daher findet man so oft in den v. l. ein m eingeschoben, wo es gar keine Erklärung hat. Auch dies aber ist in den süd-

indischen Handschriften sehr oft der Fall und hat seinen Grund in der Eigenthümlichkeit der dravidischen Sprachen die Caldwell p. 126 ff. als euphonic nunnation behandelt. Der von Weber p. 29 erwähnte Einschub eines v und y zur Vermeidung des Hiatus ist das allen dravidischen Sprachen eigenthümliche Mittel. Caldwell p. 130 ff. Es liegen hier also gar nicht Eigenthümlichkeiten des Prakrit, sondern dravidische Einflüsse vor, die einfach ausgeschieden werden müssen. Dieselbe Aspiratenverdopplung, die in den dravidischen Lautgesetzen ihren Ursprung hat, findet sich nun mehr oder weniger in sämmtlichen Dev. Hdsch. des Çâkuntalam, obwohl Böhtlingk und Williams sie nie anmerken. Böhtlingk ist ja ganz ausser Schuld, aber Williams hat ja sämmtliche Handschriften „sorgfältig" collationirt. C und G verdoppeln thth und khkh und schreiben ch und jh fast ausschliesslich einfach; W verdoppelt; T verdoppelt th, kh, jh, schreibt ch und zuweilen th einfach; M verdoppelt th, kh, jh, gh, bh. Je näher also eine Handschrift der südindischen Rec. steht, desto häufiger ist die Aspiratenverdopplung, je weiter schon entfernt, desto seltener. Dieselbe Schreibweise findet sich in allen Dev. Handschriften aller Dramen, die ich bis jetzt Gelegenheit hatte zu prüfen. Sie ist fast ausschliesslich in A und B der Mâlavikâ; hier wird kh, th, bh, jh, dh verdoppelt geschrieben; sie findet sich bei th und kh sehr häufig in den Handschriften des Venisamhâra, bei th, kh, dh in A der Mrcchakatikâ, bei th in B desselben Dramas. Es ist selbst bei th unmöglich Schreibfehler anzunehmen; die Buchstaben sind so klar und deutlich, dass auch nicht der geringste Zweifel daran aufkommen kann. Alle

diese Handschriften verrathen daher südindischen Einfluss. Es erklärt sich daraus auch die constante Schreibweise anderer am häufigsten gebrauchten und daher auch am leichtesten veränderten Wörter. Auf dasselbe Assimilationsgesetz des Tamil gehen die Schreibweisen der Dev. Hdsch. des Çâk. und der Mâl. attabhava*m* und tattabhava*m* zurück, über die ich diss. p. 34 f. gehandelt habe. Der Tamule konnte nur atta oder aththa schreiben; letzteres scheint aber ebenso wie phph und dhdh für den Tamulen ganz besonders unaussprechbar gewesen zu sein, da ich mich nicht erinnern kann, in irgend einer Handschrift diese Buchstaben doppelt ausgeschrieben gefunden zu haben. (cf. Weber Hâla p. 26). So setzten sie denn dafür tt. In ganz vereinzelten Fällen erscheint diese Schreibweise auch in den bengalischen Handschriften (diss. p. 35). Es ist dabei keineswegs südindischer Einfluss anzunehmen, da auch in den modernen arischen Sprachen Indiens tra meist in tta übergeht (cfr. Beames: Comparative grammar of the modern Aryan languages I, p. 337. Eine Aspiratenverdopplung kennen aber die bengal. Handschriften des Çâk. mit einer höchst interessanten, gleich zu besprechenden Ausnahme nicht. Ich würde die Schreibung atta und tatta in den Dev. Hdsch. ebenfalls auf Rechnung der Schreiber setzen, wenn sie sich nicht auch durchgängig in den südindischen Hdsch. fände. Denn ausser den in Südindien erhaltenen Veränderungen strotzt die Dev. Rec. auch noch von ganz anderen modernen Fehlern. So schreiben z. B. p. 102, 2 C T si*m*gha statt si*m*ha wie die südind. bengal. M und Kâ*t*. lesen, d. h. sie passen das Wort der heutigen modernen Aussprache an (Beames p. 262). Die Bengalen sprachen

auch s*im*gha; die bengal. Handschriften aber kennen diese Form nicht. Hier waren eben sorgsame treue Hände thätig, keine Interpolatoren, keine Dummköpfe, keine Fälscher. Alle diese haben fleissig in der Dev. Rec. gearbeitet. Wenn also der neuste Herausgeber der Çakuntalâ — er musste mit allen südindischen, mit E T M C und Kâ*t.* çâkuntala*m* schreiben — wieder ganz unbekümmert s*im*gha als Prakritform lehrt, so zeigt dies von neuem die Leichtfertigkeit, mit der diese für Anfänger bestimmte Ausgabe gearbeitet ist. Endlich, um nur noch dies eine Beispiel anzuführen, erklärt sich aus den Lautgesetzen der Dravi*d*ischen Sprachen die Schreibung saundalâ und dussanda, die für das Dramenprakrit grundfalsch ist. Es muss mit der bengal. Rec. sauntalâ und dussanta gelesen werden. Im Tamil wird t, wenn es in der Mitte eines Wortes mit seinem Nasal verbunden wird = d ausgesprochen. (Caldwell p. 103. 107). Fälle wie sa*m*dâpa gehören nicht hierher. Für den Dravi*d*en war es also vollständig gleich, ob er sauntalâ oder saundalâ schrieb; er sprach immer nur saundalâ; daher findet sich denn im Sanskrit in den südind. Handschriften, um diese Aussprache zu verhindern, häufig çakunttalâ geschrieben. Es ist ganz natürlich, dass die Dravi*d*en die Namen der Hauptpersonen des Dramas ihrer Aussprache anpassten; sie schreiben auch stets saunda*l*a mit cerebralem *l*, (worüber cfr. Graul Tamil Grammar p. 5. Caldwell p. 97 u. oft. Beames p. 244 ff.) und so schreiben auch T, M, Kâ*t.* zu wiederholten Malen. Die Schreibung von nd für nt findet sich auch in anderen Wörtern in C öfter als bei Böhtl. angegeben und von Monier Williams aufgenommen; z. B. auch p. 4, 10: oda*m*-

saandi, p. 27, 16 bhabbhava*m*dâ (sic) u. s. w. Ich muss mir hier versagen, auf einzelne Fälle einzugehen, wo sich Schreibweisen der Dev. Hdsch. ganz einfach aus den südindischen Schriftzeichen erklären. Ich hoffe das hier fehlende gelegentlich nachzuholen.

6) Nach Sâhityadarpa*n*a p. 173, 5 ed. Roer: yodhanâgarikâdînâm dâxi*n*âtyâ hi dîvyatâ*m* (lege: dîyatâ*m* Lassen Inst. Pracr. p. 35) soll der Polizeimeister im Drama die dâxi*n*âtyâ bhâshâ sprechen. Wie sonst bei den Rhetorikern die dâxi*n*âtyâ rîti*h* mit der vaidarbhî als identisch erklärt wird, so erklärt auch der Scholiast zu dieser Stelle bei Lassen Inst. Pracr. p. 36 dâxi*n*âtyâ mit vaidarbhî. Man hat nun bisher vergebens nach einem Merkmal der dâxi*n*âtyâ bhâshâ gesucht; was Lassen l. l. p. 414 ff. aus einigen verderbten Formen verderbter Dev. Hdsch. als solches folgern wollte, hat bereits Böhtl. z. Çâk. p. 240 mit Recht verworfen. Lassen kommt p. 435 zu dem Resultate, dass die dâxi*n*âtyâ bhâshâ dem Hauptdialekt sehr nahe stehe und sich nur in wenigen Punkten von ihm unterscheide. Dies bezeugt denn auch wirklich Mârka*nde*yakavîndra in dem Prâkritasarvasva, indem er gegen eine Eintheilung in 8 bhâshâs polemisirend, bemerkt, dass die dâxi*n*âtyâ nicht als besondere Gattung betrachtet werden könne laxa*n*âkara*n*ât, d. h. weil sie kein besonderes Kennzeichen habe. Aufrecht Catalog p. 181a. Das ist nun entschieden unrichtig, da gewiss niemand sie in diesem Falle abgesondert haben würde. Ihr Kennzeichen ist nun nichts anderes, als die uns nun wohlbekannte Aspiratenverdopplung und selbstverständlich die damit verbundene Aussprache. Die betreffenden Stellen in der Mâlavikâ und Mṛcchaka*ṭ*ikâ beweisen frei-

lich ebenso wenig wie die Dev. Hdsch. des Çâk.; da in ihnen die Aspiratenverdopplung eben durch das ganze Drama sich hindurchzieht, und D der Mâlavikâ ist zu verderbt und unzuverlässig; wohl aber beweisen dies die besten Handschriften der bengal. Recension, und Lassen hätte nicht schon damals Chézy's zwar sehr mangelhafte aber höchst gewissenhafte Ausgabe verachten sollen. Die bengal. Handschriften kennen, wie bemerkt, eine Verdopplung der Aspiraten nicht [1]); wohl aber haben sie sie in der Rede des Polizeimeisters. p. 113, 8 ed. Ch. edirt Chézy çighgham çighgham und S liest sighgham sighgham noch richtiger als y und p. 115, 10 (z. 9—11 spricht in S der Polizeimeister) schreibt S kâdambalîsaghghike. An den anderen Stellen, wo sich noch Aspiraten in den wenigen Zeilen finden, zeigen die Handschriften keine Verdopplung; aber man erwäge, dass dh (111, 7) und ch (112, 5. 115, 1) auch in den Dev. Hdsch. nie verdoppelt werden; p. 112, 3 liest S machodaragado und 115, 1 mit einem den bengal. Handschriften im Gegensatz zu den südind. eigenthümlichen Fehler: hiaattido, obwohl es bei den bengalischen Schriftzeichen oft ganz unmöglich ist *tt* und *tt*h zu unterscheiden. So bleibt in der besten Handschrift nur noch 115, 10 kh übrig, und dies steht am Anfange, wo die südindischen Handschriften sehr oft nur kh schreiben. D (Chambers 308), der hier wesentlich der Bengalischen Rec. folgt, schreibt p. 112, 3 machodarabhbhantaragado, p. 113, 8

1) Nur p. 85, 3 edirt Chézy va*dh*dhido si und so kann auch nur in R gelesen werden. S die bis jetzt älteste bekannte Handschrift, hat va*tt*ido si, N vaddhido si, die 3 Calcuttaer Ausgaben: va*dd*hido si. Aus Çaṅkara und Candraçekhara ergiebt sich die Prakritform nicht.

sighgham sighgham. Die Verdopplung des gh ist aber significanter als die irgend einer anderen Aspirata, da sie sich nur in den den südind. Handsch. am nächsten stehenden Dev. Handschriften findet. Auch dies zeigt, dass die Südindier ihre Aussprache auf das ganze Prakrit übertragen haben, dass wir aber deswegen nicht mit Shankar Pandit von Vararuci III, 51 abweichen brauchen. Es zeigt ferner von neuem, dass wohin man auch in der bengal. Rec. seine Blicke richtet, sie überall und immer das Gepräge der Echtheit und Ursprünglichkeit trägt.

Mehrjähriges Studium der Werke Kâlidâsa's und Collation oder genaue Prüfung fast sämmtlicher in Europa befindlicher bengalischer, südindischer und Devanâgarî-Handschriften des Çâkuntalam, sowie der in Indien erschienenen Ausgaben haben mir folgendes Resultat ergeben:

1) Dem Original am nächsten steht die bengalische Recension. Sie ist nur durch Interpolationen entstellt, die sich mit den gewöhnlichen Mitteln der Kritik entfernen lassen und in den besten Handschriften dieser Recension zum grossen Theil fehlen.

2) Eine planmässige Verkürzung und Verfälschung erfuhr das Original in Südindien. Sie liegt uns in der südindischen Recension vor.

3) Ein Vermittlungsversuch, beide Recensionen zu vereinigen, ist die gemischte Recension.

4) Die letzte, schlechteste, am meisten interpolirte Bearbeitung bildet die Devanâgarî-Recension. Ihre Heimat ist das westliche Indien, und sie tritt aus der Reihe der in Frage kommenden Recensionen völlig heraus.

5) Das Hauptmaterial zu 2. 3. 4 bilden ursprüngliche Glossen.

Es wird sich herausstellen, dass für die dra-

matische Literatur Indiens die in Devanâgarî geschriebenen Handschriften erst in letzter Reihe kommen und das Südindien der Ort war, wo die Verfälschung der Originale vor sich ging. War ja doch Südindien lange Zeit allein die Blüthe- und Pflegestätte der Literatur (Weber Ind. Literat. p. 247), und waren doch die südindischen Brahmanen stets gute Kenner des Sanskrit (Caldwell p. 2). Nach Graul: »Reise durch Ostindien« IV. Anmerkung 96 gehört das Çâkuntala*m*, wie zu erwarten, zu den in Südindien beliebtesten Stücken. Im Westen und Süden von Indien wird bis heutigen Tages mehr als irgendwo das Drama gepflegt (Wilson Hindu Theatre I, XVI. 3. Aufl.) und eine ganze Zahl Dramen sind nur in Südindien bekannt. Wilson Hindu Theatre I, p. LXX f. 3. Aufl. kennt nur drei, aber nach einer Mittheilung von Herrn Dr. Rost ist diese Zahl weit grösser. Man beachte auch Hâla v. 346, der eine allgemeine Bekanntschaft mit dem Drama im Süden voraussetzt. Die südindische und Dev. Recension sind aber sehr jung, viel jünger als wir jetzt beweisen können; die handschriftliche Ueberlieferung des Prakrit wird dies einst zur Gewissheit erheben. —

Schliesslich bemerke ich noch, dass die in Trübner's Catalogue of Sanskrit Works angezeigte Çakuntalâ in Telugu characters mit der südindischen Recensron, wie überhaupt mit dem Drama nichts zu thun hat. Es ist die in Telugusprache übersetzte Episode des Mahâbhârata.

London, den 2. Januar 1873.

Verzeichniss der bei der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangenen Druckschriften.

December 1872.

(Fortsetzung).

Friedrich Hessenberg mineralogische Notizen. No. 11. (10. Fortsetzung.) Frankfurt a. M. 1873. 4.

Schriften der Kön. physikal.-ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg. Jahrg. XII. 1871. Abth. 1. 2. Jahrg. XIII. Abth. 1. Königsberg 1871—72. 4.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, in Verein mit andern Mathematikern herausg. von Carl Ohrtmann, Felix Müller, Albert Wangerin. Bd. 2. Jahrg. 1869 u. 1870. Hft. 2. Berlin 1872. 8.

Mémoires de la Société des Sciences phys. et naturelles de Bordeaux. T. VIII. 4me cahier. Paris et Bordeaux. 1872. 8.

Notice sur la vie de Jean-Auguste Grunert. Extrait du Bulletin des Sc. mathem. et astronomiques. 8.

Monatsbericht der königl. preuss. Akad. der Wiss. zu Berlin. August 1872. Berlin 1872. 8.

Januar 1873.

Nature 166. 167. 168. 169.

Vidensk. Selsk. Skr., 5 Raekke, historisk og philosophisk Afd. 4de, Bd. VII.

— — — — naturvidenskabelig og mathematisk Afd., IX. Bd. 6. 7. Kjobenhavn 1871. 72. 4.

Oversigt over det Kong. Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger og dets Medlemmers Arbeider i Aaret 1871. Nr. 3 u. 1872 Nr. 1. Ebd. 1871. 72. 8.

Jahrbuch der K. K. Geologischen Reichsanstalt. Jahrg. 1872. Bd. XXII. Nr. 3. Juli. August. September. Wien 1872. gr. 8.

Verhandlungen der K. K. Geologischen Reichsanstalt. Nr. 11. 12. 13. 1872.

49. Jahresbericht der Schlesischen Gesellschaft für vaterländische Cultur. 1871. Breslau 1872. 8.

(Fortsetzung folgt).

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

26. März. № 8. 1873.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Bemerkungen über die Enveloppe einer Kugelfläche.

Von

A. Enneper.

Unter den Flächen, welche allgemein durch einen Kreis von veränderlichem Radius erzeugt werden können [1]), zeichnen sich die einhüllenden Flächen einer Kugelfläche von variabelem Radius, deren Mittelpunkt eine beliebige Raumcurve beschreibt, in Beziehung auf analytische Untersuchung ähnlich durch einfache Verhältnisse aus, wie die developpabeln Flächen unter den windschiefen Flächen. Es erscheint daher nicht ungerechtfertigt, einige allgemeine Formeln mitzutheilen, welche die genannten Flächen betreffen und sich bei der Lösung einiger Probleme mit Vortheil anwenden lassen. Zu der sehr gerin-

1) Einige Betrachtungen über diese Flächen sind in den Nachrichten d. K. Gesellsch. d. W. vom Jahre 1866 p. 243 enthalten, eine ausführlichere Abhandlung befindet sich in der Zeitschrift für Mathem. Band XIV unter dem Titel: Die cyklischen Flächen.

gen Anzahl von Beispielen, welche über einige Puncte aus der allgemeinen Theorie der Flächen existiren, wie z. B. die isometrischen Coordinaten, Deformation von Flächen, sollen einige neue Resultate mitgetheilt werden, die vielleicht nicht ohne Interesse sind.

I.

Was die im Folgenden angewandten Bezeichnungen betrifft, so sind dieselben übereinstimmend mit denjenigen einiger früheren Mittheilungen. Es bedeutet (ξ, η, ζ) ein Punct einer Raumcurve, α, β, γ sind die Winkel, welche die Tangente, λ, μ, ν die Winkel, welche der Krümmungshalbmesser, l, m, n die Winkel, welche die Normale zur Krümmungsebene im angegebenen Puncte der Curve respective mit den Axen der x, y und z bilden. Es ist ferner durch ϱ der Krümmungshalbmesser, durch r der Torsionsradius, endlich durch ds das Bogenelement bezeichnet. Sieht man den Punct (ξ, η, ζ) als Mittelpunkt einer Kugelfläche von dem variabeln Radius R an, wo R eine beliebige Function von s bedeutet, so ist die Enveloppe der Kugelfläche durch das System der beiden folgenden Gleichungen bestimmt:

$$(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2=R^2,$$

$$(x-\xi)\cos\alpha+(y-\eta)\cos\beta+(z-\zeta)\cos\gamma=-R\frac{dR}{ds}.$$

Setzt man:

$$1)\qquad \frac{dR}{ds}=\cos t,$$

bezeichnet durch w einen beliebigen Winkel,

so lassen sich die obigen Gleichungen durch folgende ersetzen:

$$(x-\xi)\cos\alpha+(y-\eta)\cos\beta+(z-\zeta)\cos\gamma=-R\cos t,$$

$$(x-\xi)\cos\lambda+(y-\eta)\cos\mu+(z-\zeta)\cos\nu=R\sin t\sin w,$$

$$(x-\xi)\cos l+(y-\eta)\cos m+(z-\zeta)\cos n=-R\sin t\cos w.$$

Es ist also:

$$3)\quad x=\xi-R\cos t\cos\alpha+R\sin t(\cos\lambda\sin w-\cos l\cos w)$$

und analog y und z. Sieht man nun w als Function von s und einer zweiten Variabeln v an, so folgt aus 3):

$$4)\qquad \frac{1}{R}\frac{dx}{ds}=$$

$$\left(\frac{dt}{ds}-\frac{\sin w}{\varrho}+\frac{\sin t}{R}\right)[\cos\alpha\sin t+(\cos\lambda\sin w-\cos l\cos w)\cos t]$$

$$+\left[\left(\frac{dw}{ds}-\frac{1}{r}\right)\sin t-\frac{\cos w\cos t}{\varrho}\right](\cos\lambda\cos w+\cos l\sin w),$$

$$5)\quad \frac{1}{R}\frac{dx}{dv}=\sin t\,\frac{dw}{dv}(\cos\lambda\cos w+\cos l\sin w).$$

Die beiden Hauptkrümmungshalbmesser im Puncte (x, y, z) sind respective R und:

$$R\,\frac{\frac{dt}{ds}-\frac{\sin w}{\varrho}+\frac{\sin t}{R}}{\frac{dt}{ds}-\frac{\sin w}{\varrho}}.$$

STANFORD LIBRARIES

Die Differentialgleichung der Krümmungslinien zerfällt in die beiden folgenden:

$$ds = 0$$

$$[(\frac{dw}{ds} - \frac{1}{r}) \sin t - \frac{\cos t \cos w}{\varrho}]\, ds + \sin t \frac{dw}{dv}\, dv = 0.$$

Die Krümmungslinien sind durch s constant und v constant bestimmt, wenn w durch die Gleichung bestimmt ist:

$$6) \qquad (\frac{dw}{ds} - \frac{1}{r}) \sin t - \frac{\cos t \cos w}{\varrho} = 0.$$

Die willkührliche Constante, welche die Integration dieser Differentialgleichung involvirt, ist gleich einer arbiträren Function von v zu setzen.

Ist die Curve, welche der Mittelpunkt der eingehüllten Kugelfläche beschreibt plan, so hat man $r = \infty$. Nimmt man:

$$\cos\alpha = \cos\varepsilon, \quad \cos\beta = \sin\varepsilon, \quad \cos\gamma = 0,$$

$$\cos\lambda = -\sin\varepsilon, \quad \cos\mu = \cos\varepsilon, \quad \cos\nu = 0,$$

$$\cos l = 0, \quad \cos m = 0, \quad \cos n = -1,$$

so treten an Stelle der Gleichungen 2) und 6) die folgenden:

$$7) \qquad \begin{aligned} x &= \xi - R\cos t \cos\varepsilon - R\sin t \sin\varepsilon \sin w, \\ y &= \eta - R\cos t \sin\varepsilon + R\sin t \cos\varepsilon \sin w, \\ z &= \qquad\qquad R\sin t \cos w. \end{aligned}$$

8) $$\frac{dw}{ds} = \frac{\cos w}{\varrho} \operatorname{cotang} i.$$

Da:

$$\frac{ds}{\varrho} = d\varepsilon,$$

so ist auch:

9) $$\frac{dw}{ds} = \cos w \operatorname{cotang} i.$$

Nimmt man s als Function von ε, oder einfacher ϱ als Function von ε an, so sind ξ und η bestimmt durch:

10) $$\xi = \int \cos\varepsilon\, ds = \int \varrho \cos\varepsilon\, d\varepsilon,$$

$$\eta = \int \sin\varepsilon\, ds = \int \varrho \sin\varepsilon\, d\varepsilon.$$

Nimmt man zur Vereinfachung:

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha, & \cos\beta, & \cos\gamma \\ \cos\lambda, & \cos\mu, & \cos\nu \\ \cos l, & \cos m, & \cos n \end{vmatrix} = \delta,$$

$$H = \left(\frac{dt}{ds} - \frac{\sin w}{\varrho} + \frac{\sin t}{R}\right) R^2 \sin t \frac{dw}{dv},$$

so finden die folgenden Gleichungen statt:

$$\begin{vmatrix} \frac{d^2x}{ds^2}, & \frac{d^2y}{ds^2}, & \frac{d^2z}{ds^2} \\ \frac{dx}{ds}, & \frac{dy}{ds}, & \frac{dz}{ds} \\ \frac{dx}{dv}, & \frac{dy}{dv}, & \frac{dz}{dv} \end{vmatrix} \frac{\delta}{H} =$$

$$R\left(\frac{dt}{ds}-\frac{\sin w}{\varrho}+\frac{\sin t}{R}\right)\left(\frac{dt}{ds}-\frac{\sin w}{R}\right)$$

$$+R\left[\sin t\left(\frac{dw}{ds}-\frac{1}{r}\right)-\frac{\cos t\cos w}{\varrho}\right]^2,$$

$$\begin{vmatrix} \frac{d^2x}{dv^2}, & \frac{d^2y}{dv^2}, & \frac{d^2z}{dv^2} \\ \frac{dx}{ds}, & \frac{dy}{ds}, & \frac{dz}{ds} \\ \frac{dx}{dv}, & \frac{dy}{dv}, & \frac{dz}{dv} \end{vmatrix} \frac{\delta}{H}=R\left(\sin t\frac{dw}{dv}\right)^2.$$

$$\begin{vmatrix} \frac{d^2x}{dv\,ds}, & \frac{d^2y}{dv\,ds}, & \frac{d^2z}{dv\,ds} \\ \frac{dx}{ds}, & \frac{dy}{ds}, & \frac{dz}{ds} \\ \frac{dx}{dv}, & \frac{dy}{dv}, & \frac{dz}{dv} \end{vmatrix} \frac{\delta}{H}=$$

$$R\sin t\frac{dw}{dv}\left[\sin t\left(\frac{dw}{ds}-\frac{1}{r}\right)-\frac{\cos t\cos w}{\varrho}\right].$$

Die Folgereihe der Puncte in welchen sich die successiven characteristischen Linien der Fläche schneiden, d. h. die Wendecurve, ist durch folgende Gleichung bestimmt:

$$\frac{dt}{ds}-\frac{\sin w}{\varrho}+\frac{\sin t}{R}=0.$$

In den Gleichungen 2) ist für einen Punct der Wendecurve der Winkel w durch die vorstehende Gleichung in Function von s bestimmt.

II.

Sind u und v die Argumente der Krümmungslinien, so heissen diese Quantitäten isometrische Coordinaten in Beziehung auf eine Fläche, wenn das Quadrat des Bogenelements einer beliebigen Curve auf der Fläche sich auf die Form:

$$\sigma(du^2 + dv^2)$$

bringen lässt. Es finden dann die Gleichungen statt:

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dv}\right)^2,$$

$$\frac{dx}{du}\frac{dx}{dv} + \frac{dy}{du}\frac{dy}{dv} + \frac{dz}{du}\frac{dz}{dv} = 0.$$

Sieht man in den Gleichungen von I. s als Function von u an, so giebt die Gleichung 6):

1) $$\frac{dw}{du} = \left(\frac{1}{r} + \frac{\operatorname{cotang} t}{\varrho}\cos w\right)\frac{ds}{du}.$$

Die Bedingung für isometrische Coordinaten wird hierdurch:

$$\left(\frac{dt}{ds} - \frac{\sin w}{\varrho} + \frac{\sin t}{R}\right)^2 \left(R\frac{ds}{du}\right)^2 = \left(R\sin t\,\frac{dw}{dv}\right)^2,$$

oder:

$$\pm\frac{dw}{dv}=\frac{1}{\sin t}\frac{dt}{du}+\frac{1}{R}\frac{ds}{du}-\frac{\sin w}{\sin t}\frac{1}{\varrho}\frac{ds}{du}.$$

Setzt man in der vorstehenden Gleichung und der Gleichung 1)

$$1)\qquad \frac{1}{\varrho}\frac{ds}{du}=\frac{ds}{du},$$

so ist:

$$\pm\frac{dw}{dv}=\frac{1}{\sin t}\frac{dt}{du}+\frac{1}{R}\frac{ds}{du}-\frac{\sin w}{\sin t}\frac{ds}{du},$$

$$2)\qquad \frac{dw}{du}=\frac{1}{r}\frac{ds}{du}+\operatorname{cotang} t\cos w\frac{ds}{du}.$$

Die erste der vorstehenden Gleichungen differentiire man nach u und substituire rechts für $\frac{dw}{du}$ seinen Werth aus der zweiten Gleichung. Die zweite Gleichung 2) differentiire man nach v und substituire rechts für $\frac{dw}{dv}$ seinen Werth aus der ersten Gleichung. Setzt man die so erhaltenen Werthe von $\frac{d^2w}{du\,dv}$ einander gleich, so erhält man eine Gleichung von der Form:

$$p+p_1\sin w+p_2\cos w=0,$$

wo p, p_1, p_2 Functionen von s oder u sind. Da nun w nicht von v abhängig sein kann, so muss die angeführte Gleichung identisch bestehen, d. h. es müssen p, p_1 und p_2 gleichzeitig ver-

schwinden. Die Ausführung der angedeuteten Rechnung giebt:

$$3)\begin{cases} \dfrac{d}{du}\left(\dfrac{1}{\sin t}\dfrac{dt}{du}+\dfrac{1}{R}\dfrac{ds}{du}\right)=\dfrac{\cos t}{\sin^2 t}\left(\dfrac{ds}{du}\right)^2 \\ \dfrac{d}{du}\left(\dfrac{1}{\sin t}\dfrac{ds}{du}\right)=\dfrac{\cos t'ds}{\sin t\,du}\cdot\left(\dfrac{1}{\sin t}\dfrac{dt}{du}+\dfrac{1}{R}\dfrac{ds}{du}\right). \end{cases}$$

$$\frac{1}{r}=0.$$

Die Bedingung, dass der Torsionsradius keinen endlichen Werth hat führt auf folgendes Theorem:

> Sind die Krümmungslinien der Enveloppe einer Kugelfläche isometrische Coordinaten, so beschreibt der Mittelpunct der eingehüllten Kugelfläche eine plane Curve.

Für den besondern Fall, dass R constant ist, also $\cos t = 0$, ist $\frac{ds}{du}$ constant, nimmt man $s = u$, so ist in Folge der zweiten Gleichung 3) $\frac{ds}{ds} = \frac{1}{\varrho}$ constant, welcher Annahme der Torus entspricht. Hieraus folgt:

> Die Fläche des Torus ist die einzige Fläche unter den Enveloppen einer Kugelfläche von constantem Radius, deren Krümmungslinien isometrische Coordinaten sind.

Es muss hierbei bemerkt werden, dass die Flä-

che des Kreiscylinders in dem Vorstehenden einbegriffen ist, indem der Kreiscylinder als Grenzfall eines Torus angesehen werden kann, wenn der Radius des Kreises, welchen der Mittelpunct der eingehüllten Kugelfläche beschreibt, unbegrenzt zunimmt. Für eine Rotationsfläche ist $\varrho = \infty$ also $d\varepsilon = 0$ d. h. ε ist constant. Die zweite Gleichung 3) ist in diesem Falle identisch erfüllt. Die erste Gleichung 3) giebt:

$$4) \qquad \frac{1}{\sin t}\frac{dt}{du} + \frac{1}{R}\frac{ds}{du} = a,$$

wo a eine Constante bedeutet. Sieht man t zunächst als Function von s an, so lässt sich die letzte Gleichung schreiben:

$$\left[\frac{1}{\sin t}\frac{dt}{ds} + \frac{1}{R}\right]\frac{ds}{du} = a,$$

oder:

$$\cos t = \frac{dR}{ds} - R', \quad \frac{d^2R}{ds^2} = R''$$

gesetzt:

$$5) \qquad \left(\frac{1}{R} - \frac{R''^2}{1 - R'^2}\right)\frac{ds}{du} = a.$$

Durch diese Gleichung ist die Relation zwischen u und s bestimmt. Wegen $d\varepsilon = 0$ und der Gleichung 4) giebt die erste Gleichung 2):

$$\pm\frac{dw}{dv} = a.$$

Nimmt man das obere Zeichen, so kann man, mit Weglassung einer unnöthigen Constanten,

einfach $w = av$ setzen. Wird die Axe der x zur Rotationsaxe genommen, so hat man in den Gleichungen 7) von I. zu setzen: $s = 0$, $\xi = s$, $\eta = 0$. Nimmt man ferner $w = av$ und wieder $\cos t = R$, also $\sin t = \sqrt{1 - R'^2}$, so erhält man für einen Punct einer Rotationsfläche auf isometrische Coordinaten bezogen die folgenden Gleichungen:

$$x = s - RR',$$

$$6) \qquad y = R \sin av \sqrt{1 - R'^2},$$

$$z = R \cos av \sqrt{1 - R'^2}.$$

Es ist selbstverständlich, dass die vorstehenden Gleichungen für eine Kugelfläche keine Anwendung finden können, da in diesem, leicht direct zu behandelnden Falle, R nicht als Function von s angesehen werden kann. Für ein constantes R geben die Gleichungen 6) die Fläche des Kreiscylinders. Im Folgenden sollen die Rotationsflächen ausgeschlossen sein. Aus den Gleichungen 3) leitet man die folgende ab, in welcher h eine Constante bedeutet:

$$7) \qquad \left(\frac{1}{\sin t}\frac{dt}{du} + \frac{1}{R}\frac{ds}{du}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sin t}\frac{ds}{du}\right)^2 + h.$$

Die zweite Gleichung 3) lässt sich schreiben:

$$8) \qquad \frac{\frac{d}{du}\left(\frac{1}{\sin t}\frac{ds}{du}\right)}{\frac{1}{\sin t}\frac{ds}{du}} = \frac{\cos t\, dt}{\sin t\, du} + \frac{\cos t\, ds}{R\, du}.$$

Setzt man rechts im letzten Terme $\cos t = \frac{dR}{ds}$, also:

$$\frac{\cos t}{R}\frac{ds}{du} = \frac{1}{R}\frac{dR}{ds}\frac{ds}{du} = \frac{1}{R}\frac{dR}{du},$$

so giebt die Gleichung 8) durch Integration:

9) $$\frac{1}{\sin t}\frac{ds}{du} = \frac{R\sin t}{g},$$

wo g eine Constante bedeutet. Führt man in die Gleichung 7) mittelst der Gleichung 9) s statt u als unabhängige Variabele ein, so folgt:

10) $$\left(R\frac{dt}{ds} + \sin t\frac{ds}{ds}\right)^2 \sin^2 t = (R\sin t)^2 + hg^2.$$

Nun ist:

$$R\cos t\frac{dt}{ds} + \sin t\cos t\frac{ds}{ds} = R\frac{d\sin t}{ds}$$

$$+ \sin t\frac{dR}{ds}\frac{ds}{ds} = \frac{d\,R\sin t}{ds}.$$

Multiplicirt man die Gleichung 10) auf beiden Seiten mit $\cos^2 t$, setzt zur Vereinfachung $fg^2 = c$, so folgt:

11) $$\frac{\left(\sin t\frac{d\,R\sin t}{ds}\right)^2}{(R\sin t)^2 + c} = \cos^2 t,$$

was die Bedingungsgleichung zwischen R und den Elementen der Curve ist, welche der Mit-

telpunct der eingehüllten Kugelfläche beschreibt. Die Gleichung 11) multiplicire man auf beiden Seiten mit R^2, ziehe die Quadratwurzel aus und setze rechts:

$$R\cos t = R\frac{dR}{ds} = \frac{R}{\varrho}\frac{dR}{ds}$$

dann ist:

$$12)\qquad \pm\frac{R\sin t\ \frac{d\,R\sin t}{ds}}{\sqrt{(R\sin t)^2+c}} = \frac{R}{\varrho}\frac{dR}{ds}.$$

Bedeutet f eine Constante, so folgt durch Integration:

$$13)\qquad \pm\sqrt{(R\sin t)^2+c} = f+\int\frac{R\,dR}{\varrho}.$$

Ist ϱ in Function von R gegeben, so lässt sich das Problem der isometrischen Coordinaten für die in Rede stehenden Flächen vollständig lösen. Mittelst der Gleichung 13) erhält man dann $\sin t$, also auch $\cos t$ in Function von R. Nun ist $\cos t = \frac{dR}{ds} = \varrho\frac{dR}{ds}$, folglich ist, s als Function von R angesehen mittelst der Gleichung bestimmt:

$$14)\qquad \frac{ds}{dR} = \frac{1}{\varrho\cos t}.$$

Die beiden Gleichungen 10) in I. werden dann

$$15)\qquad \xi = \int\frac{\cos s}{\cos t}\,dR;\quad \eta = \int\frac{\sin s}{\cos t}\,dR.$$

Es lässt sich umgekehrt nicht allgemein R explicite durch s oder ε für ein gegebenes ϱ mittelst der Gleichung 10) ausdrücken.

Als bemerkenswerthe Fälle sind die folgenden hervorzuheben. Der Mittelpunkt (ξ, η) der eingehüllten Kugelfläche beschreibe einen Kreis mit dem Radius a. In 13) ist dann $\varrho = a$. Man findet:

$$(R \sin t)^2 = (f + \frac{R^2}{2a})^2 - c.$$

Die Gleichung 14) wird:

$$\frac{ds}{dR} = \frac{\pm 1}{a} \frac{R}{\sqrt{R^2 + c - (f + \frac{R^2}{2a})^2}}.$$

Nimmt man zur Vereinfachung $c - 2af + a^2 = b^2$, bedeutet ε_0 eine Constante, so ist:

$$\frac{R^2}{2a} + f - a = \pm b \sin(s + \varepsilon_0).$$

Mittelst der vorstehenden Gleichungen und der Gleichung 9) lässt sich u durch s in Form elliptischer Integrale darstellen, welche sich nach den bekannten Gleichungen für die Integrale dritter Gattung nach der von Jacobi gegebenen Darstellung behandeln lassen.

Sei zweitens $s = u$. In der Gleichung 9) $\frac{ds}{du} = \frac{ds}{ds} = \frac{1}{\varrho}$ gesetzt giebt:

16) $$\frac{1}{\varrho} = \frac{R \sin^2 t}{g}.$$

Die Gleichung 12) wird hierdurch:

$$\pm \frac{1}{R \sin t} \frac{\frac{d R \sin t}{ds}}{\sqrt{(R \sin t)^2 + c}} = \frac{1}{g} \frac{dR}{ds}.$$

Bedeutet R_0 eine Constante, nimmt man $c = a^2$ und in der vorstehenden Gleichung das untere Zeichen, so folgt:

17) $$R \sin t = \frac{2a}{\frac{a}{g}(R - R_0) = \frac{a}{g}(R - R_0)}.$$

Aehnlich erhält man für $c = -a^2$:

18) $$R \sin t = \frac{a}{\sin \frac{a}{g}(R - R_0)}.$$

Die Gleichung 14) wird nach 16):

$$\frac{ds}{dR} = \frac{1}{g} \frac{R \sin^2 t}{\cos t} = \frac{1}{g} \frac{(R \sin t)^2}{\sqrt{R^2 - (R \sin t)^2}}.$$

In diese Gleichung ist für $R \sin t$ der Werth aus 17) oder 18) zu substituiren. Wenn $a = 0$, so fallen die beiden Werthe von $R \sin t$ aus 17) und 18) zusammen. Es ist dann:

$$R \sin t = \frac{g}{R - R_0},$$

folglich:

$$\frac{ds}{dR} = \frac{g}{R - R_0} \frac{1}{\sqrt{R^2(R-R_0)^2 - g^2}}.$$

In dem besondern Falle, dass $R_0 = 0$, folgt für $g = b^2$:

19) $$\left(\frac{b}{R}\right)^2 = \cos 2(\varepsilon - \varepsilon_0),$$

wo ε_0 eine Constante bedeutet. Setzt man in der Gleichung 16) $R \sin t = \frac{g}{R}$, so ist, da $g = b^2$:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{b}\left(\frac{b}{R}\right)^2$$

also nach 19):

$$\varrho = \frac{b}{(\cos 2(\varepsilon - \varepsilon_0))^{\frac{3}{2}}}.$$

Man kann unbeschadet der Allgemeinheit $\varepsilon_0 = 0$ nehmen. Mittelst des vorstehenden Werthes von ϱ geben die Gleichung 10) von I.:

$$\frac{\xi}{b} = \int \frac{\cos \varepsilon}{(\cos 2\varepsilon)^{\frac{3}{2}}} d\varepsilon = \frac{\sin \varepsilon}{\sqrt{\cos 2\varepsilon}},$$

$$\frac{\eta}{b} = \int \frac{\sin \varepsilon}{(\cos 2\varepsilon)^{\frac{3}{2}}} d\varepsilon = \frac{\cos \varepsilon}{\sqrt{\cos 2\varepsilon}}.$$

Hieraus folgt unmittelbar:

$$\eta^2 - \xi^2 = b^2.$$

Der Mittelpunct der eingehüllten Kugelfläche beschreibt also eine gleichseitige Hyperbel.

Sei drittens $s = u$. Die Gleichung 9) giebt dann:

$$20) \qquad g = R \sin^2 t.$$

Setzt man hieraus den Werth von R in die Gleichung 11), so wird dieselbe:

$$21) \qquad \frac{g\left(\frac{dt}{du}\right)^2}{g^2 + c \sin^2 t} = 1.$$

Es ist:

$$\frac{dR}{du} = \frac{dR}{ds}\frac{ds}{du} = \cos t \,.\, \varrho.$$

Setzt man hierin aus 20) für R seinen Werth, so folgt:

$$22) \qquad \varrho = -\frac{2g}{\sin^3 t}\frac{dt}{du},$$

wo $\frac{dt}{du}$ durch die Gleichung 21) bestimmt ist. Für $c = 0$ ist die Curve, welche der Mittelpunct der eingehüllten Kugelfläche beschreibt eine Hyperbel. Nimmt man $c = -g^2$, so erhält man aus 21) $\frac{dt}{du} = \cos t$, also, mit Weglassung einer Constanten, welche sich nur auf eine Drehung des Coordinatensystems bezieht:

$$\sin t = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}}, \quad \cos t = \frac{2}{e^u + e^{-u}}.$$

Nach 22) folgt dann:

$$\varrho = 2g\,(e^{u}+e^{-u})\,\frac{d}{du}\,\frac{1}{(e^{u}-e^{-u})^{2}}.$$

Setzt man diesen Werth von ϱ in die Gleichungen 10) von I., ferner $s = u$, so ergeben sich für ξ und η die folgenden Gleichungen:

$$\frac{\xi}{2g} = \frac{e^{u}+e^{-u}}{(e^{u}-e^{-u})^{2}}\cos u - \frac{1}{e^{u}-e^{-u}}\sin u,$$

$$\frac{\eta}{2g} = \frac{e^{u}+e^{-u}}{(e^{u}-e^{-u})^{2}}\sin u + \frac{1}{e^{u}-e^{-u}}\cos u.$$

Weitere Ausführungen der gefundenen Resultate mögen hier unterbleiben. Ein anderes Beispiel von isometrischen Coordinaten bei der Parallelfläche zu der nach Dupin benannten Cyclide findet sich in den Nachrichten d. K. Gesellschaft d. W. aus d. J. 1867 pag. 262 angemerkt.

III.

Seien wieder, wie im Vorhergehenden u und v die Argumente der Krümmungslinien. Sieht man die Coordinaten x, y, z eines Punctes einer Fläche als Functionen von u und v an, also auch die Winkel a, b, c, welche die Normale des Punctes (x, y, z) mit den Coordinatenaxen bildet, so enthält die Gleichung:

$$\left(\frac{d\cos a}{du}\right)^2+\left(\frac{d\cos b}{du}\right)^2+\left(\frac{d\cos c}{du}\right)^2=$$

$$\left(\frac{d\cos a}{dv}\right)^2+\left(\frac{d\cos b}{dv}\right)^2+\left(\frac{d\cos c}{dv}\right)^2\pm 1,$$

die Bedingung, dass die in Rede stehende Fläche, sich ohne Faltung und Zerreissung nur auf eine Art so biegen lässt, dass den Krümmungslinien der primitiven Fläche wieder Krümmungslinien der deformirten Fläche entsprechen. Man hat so zwei Flächen, die auf einander abwickelbar sind und deren Krümmungslinien sich gegenseitig entsprechen. Für die in I. betrachtete Enveloppe ist die Normale gleichzeitig Verbindungslinie eines Punctes der einhüllenden Fläche mit dem entsprechenden Mittelpunct der eingehüllten Kugelfläche. Man hat also:

$$\pm\cos a=\frac{x-\xi}{R},\ \pm\cos b=\frac{y-\eta}{R},\ \pm\cos c=\frac{z-\zeta}{R}.$$

Mit Rücksicht auf die Gleichungen 1) und 2) von I. und die Gleichung:

2) $$\frac{dw}{du}=\left(\frac{1}{r}+\frac{\operatorname{cotang} t}{\varrho}\cos w\right)\frac{ds}{du}$$

erhält man leicht:

$$\pm\frac{d\cos a}{du}=\left(\frac{dt}{du}-\frac{\sin w}{\varrho}\frac{ds}{du}\right)\times$$

$$(\cos\alpha\sin t+(\cos\lambda\sin w-\cos l\cos w)\cos t)$$

$$\pm \frac{d\cos a}{dv} = (\cos\lambda\cos w + \cos l \sin w)\sin t \frac{dw}{dv}.$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen und einiger ähnlichen Gleichungen nimmt die Gleichung 1) folgende Form an:

$$3) \qquad (\sin t \frac{dw}{dv})^2 - (\frac{dt}{du} - \frac{\sin w}{\varrho}\frac{ds}{du})^2 = \mp 1.$$

Genauer genommen müssen in der Gleichung 1), wenn x, y, z bestimmte Functionen von u und v sind, die drei Quadrate links mit einer beliebigen Function von u multiplicirt werden und ebenso die drei Quadrate rechts mit einer beliebigen Function von v. In dem vorliegenden Falle ist dieses von selbst erfüllt, da s eine beliebige Function von u ist und ferner die Constante, welche die Integration der Gleichung 2) involvirt eine arbiträre Function von v ist. Die Gleichung 2) nach v differentiirt giebt:

$$4) \qquad \frac{d^2w}{du\,dv} = -\frac{\operatorname{cotang} t}{\varrho}\sin w \frac{dw}{dv}\frac{ds}{du}.$$

Die Gleichung 3) dividire man durch $\sin t$, differentiire darauf in Beziehung auf u und substituire für $\frac{d^2w}{du\,dv}$ seinen Werth aus 4). Setzt man wieder zur Vereinfachung:

$$5) \qquad \frac{1}{\varrho}\frac{ds}{du} = \frac{ds}{du},$$

so folgt:

$$\operatorname{cotang} t \cdot \frac{ds}{du} \sin w \left(\frac{dw}{dv}\right)^2 +$$

$$\left(\frac{1}{\sin t}\frac{dt}{du} - \frac{\sin w}{\sin t}\frac{ds}{du}\right)\left[\frac{d}{du}\frac{1}{(\sin t}\frac{dt}{du}\right)$$

$$-\sin w \frac{d}{du}\left(\frac{1}{\sin t}\frac{ds}{du}\right) - \frac{\cos w}{\sin t}\frac{ds}{du}\frac{dw}{du}\Big] =$$

$$\mp\frac{a\cos t}{\sin^3 t}\frac{dt}{du}.$$

Setzt man links für $\frac{dw}{du}$ und $\left(\frac{dw}{dv}\right)^2$ ihre Werthe aus 2) und 3), so ergiebt sich eine Gleichung von der Form:

$$P + P_1 \sin w + P_2 \cos w = 0,$$

wo P, P_1 und P_2 nur von u abhängen. Da w nicht von v unabhängig sein kann, so folgt $P = 0$, $P_1 = 0$ und $P_2 = 0$. Die Ausführung der angedeuteten Rechnung führt zu folgenden Resultaten, wobei wieder ϱ durch die Gleichung 5) ersetzt ist:

6) $$\frac{d}{du}\left(\frac{1}{\sin t}\frac{dt}{du}\right) - \frac{\cos t}{\sin^2 t}\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = \mp\frac{\cos t}{\sin^2 t},$$

7) $$\frac{\cos t}{\sin t}\frac{dt}{du}\frac{1}{\sin t}\frac{ds}{du} = \frac{d}{du}\left(\frac{1}{\sin t}\frac{ds}{du}\right),$$

$$\frac{1}{r} = 0.$$

Die Curve, welche der Mittelpunct der eingehüllten Kugelfläche beschreibt ist also plan. Ist f eine Constante, so folgt aus 7):

$$8) \qquad \frac{1}{\sin t}\frac{ds}{du} = \frac{\sin t}{f}.$$

Die Gleichung 6) wird hierdurch:

$$\frac{d}{du}\left(\frac{1}{\sin t}\frac{dt}{du}\right) = \frac{\cos t \sin^2 t}{f^2} \pm \frac{\cos t}{\sin^2 t}.$$

Ist f_0 eine weitere Constante, so folgt:

$$\left(\frac{1}{\sin t}\frac{dt}{du}\right)^2 = \frac{\sin^2 t}{f^2} \pm \frac{1}{\sin^2 t} + \frac{2f_0}{f^2}.$$

oder:

$$9) \qquad \left(f\frac{dt}{du}\right)^2 = (\sin^2 t + f_0) - f_0^2 \pm f^2.$$

Die Relation zwischen t und u lässt sich immer durch elliptische Functionen darstellen. Es ergiebt sich dann aus der Gleichung 8), dass allgemein s ein elliptisches Integral dritter Gattung in Beziehung auf u ist. Man kann zu den vorstehenden Gleichungen auch noch auf andere Weise wie mittelst der Gleichung 1) gelangen. Ist nämlich:

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

der allgemeine Ausdruck für das Quadrat des Bogenelementes einer Curve auf einer Fläche, sind u und v die Argumente der Krümmungslinien, also $F=0$, so erhält man die Hauptkrümmungshalbmesser, welche gegebenen Werthen

von E und G entsprechen, einfach durch Bestimmung der Wurzeln einer quadratischen Gleichung, deren Coefficienten abhängig sind von E, G und den Differentialquotienten dieser Quantitäten nach u und v. Eine dieser Wurzeln genügt immer zwei bestimmten Differentialgleichungen, ist dieses auch mit der andern Wurzel der Fall, so lässt sich die Fläche derartig biegen, wie zu Anfang dieser Nummer bemerkt ist. Die vorzunehmenden Rechnungen zur Aufstellung der Bedingung, dass beide Wurzeln der quadratischen Gleichung zwei Differentialgleichungen genügen sind indessen sehr mühsam und führen auf einem ziemlichen Umwege zu den Gleichungen 8) und 9). Was die weitere Behandlung dieser Gleichungen betrifft, so würde eine Deduction der Resultate, welche sich aus ihnen herleiten lassen, hier zu weit führen. Es sollen ohne weitere Begründung hier die betreffenden Resultate angemerkt werden, wie sie sich, mit leichter Aenderung der Bezeichnung aus einem allgemeinen Probleme herleiten lassen, dessen Lösung sich in den »Mathemat. Annalen« (t. II, p. 610) befindet. Um nicht die Anzahl der Bezeichnungen zu sehr zu häufen, mögen in den nachfolgenden Gleichungen die Buchstaben l und n in anderer Bedeutung wie in I. gebraucht werden. Es sei k der Modul der elliptischen Functionen mit dem Argumente nu, ferner l der Modul der elliptischen Functionen mit dem Argumente nv. Die Complementärmoduli sind durch k' und l' bezeichnet. Zwischen den Quantitäten k, l und n findet folgende Relation statt:

$$1 = n^2(1 - k^2 - l^2).$$

Es bedeuten g und h beliebige Constanten.

Es ist ferner Ω eine beliebige Function von ε, wo ε durch die Gleichung:

$$\frac{d\varepsilon}{du} = \frac{ll'}{\varrho'^2 - k^2 \sin^2 am\, nu}$$

bestimmt ist. Zur Abkürzung ist weiter gesetzt:

$$l'^2 - k^2 \sin^2 am\, nu = p^2,$$

$$P = \int_1 \frac{\Delta am\, nu}{p} \left(\frac{d^2\Omega}{d\varepsilon^2} + \Omega\right) d\varepsilon,$$

$$P_1 = \int \frac{\sin am\, nu}{p} \left(\frac{d^2\Omega}{d\varepsilon^2} + \Omega\right) d\varepsilon,$$

$$D = -\frac{d\Omega}{d\varepsilon} + \frac{h + l'P}{p} l' \Delta am\, nu$$

$$+ \frac{g - ll'P_1}{l'p} k^2 l \sin am\, nu.$$

Die letzten Gleichungen geben noch:

$$\frac{dD}{d\varepsilon} = \Omega + \frac{nk^2 \cos am\, nu}{p} [$$

$$(h + l'P) l \sin am\, nu + (g - ll'P_1) \Delta am\, nu].$$

Mit Beziehung auf die vorstehenden Bezeichnungen hat man für einen Punct (x, y, z) der einhüllende Fläche folgende Gleichungen:

$$x \cos\varepsilon + y \sin\varepsilon = \Omega,$$

$$x \sin \varepsilon - y \cos \varepsilon = - \frac{d\Omega}{d\varepsilon}$$

$$\frac{p}{l'} \cdot \frac{(h + l' P) \Delta am\, nu - (g - ll' P_1)\, k \sin am\, nu}{\Delta am\, nu\, \Delta am\, nv + kl \sin am\, nu \sin am\, nv},$$

$$= \frac{l'}{k \cos am\, nv} =$$

$$\frac{(h + l' P)\, l \sin amnu + (g - ll' P_1) \Delta amnu}{\Delta am\, nu\, \Delta am\, nv + kl \sin am\, nu \sin am\, nv}.$$

Setzt man nun, mit Rücksicht auf den obigen Werth von D:

$$\xi = \frac{dD}{d\varepsilon} \cos \varepsilon + D \sin \varepsilon,$$

$$\eta = \frac{dD}{d\varepsilon} \sin \varepsilon - D \cos \varepsilon.$$

$$\frac{R}{n} = (h + l' P)\, kl \sin am\, nu$$

$$+ (g - ll' P_1)\, k \Delta am\, nu,$$

so findet man:

$$\frac{d\xi}{d\varepsilon} = \left(\frac{d^2 D}{d\varepsilon^2} + D\right) \cos \varepsilon,$$

$$\frac{d\eta}{d\varepsilon} = \left(\frac{d^2 D}{d\varepsilon^2} + D\right) \sin \varepsilon,$$

$$\frac{d^2 D}{d\varepsilon^2} + D = \frac{n^2 p^3}{ll'} \left[(h + l' P)\, l \Delta am\, nu\right.$$

$$-(g-ll'P_1)k^2\sin am\,nu]$$

$$\frac{dR}{ds}=n^2k\cos am\,nu\,[(h+l'P)l\,\Delta am\,nu$$

$$-(g-ll'P_1)k^2\sin am\,nu]\frac{p^2}{ll'}.$$

Die Gleichungen für x, y, z lassen sich ersetzen durch:

$$(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2=R^2,$$

$$(x-\xi)\frac{d\xi}{ds}+(y-\eta)\frac{d\eta}{ds}=-R\frac{dR}{ds}.$$

Dem Puncte (x, y, z) der primitiven Fläche möge der Punct (x_1, y_1, z_1) der deformirten Fläche entsprechen. Wird der Winkel θ durch die Gleichung bestimmt:

$$\frac{d\theta}{dv}=\frac{kk'}{k'^2-l^2\sin^2 am\,nv},$$

so hat man für x_1, y_1, z_1 die folgenden Gleichungen:

$$x_1\sin\theta+y_1\cos\theta=0,$$

$$(x_1\cos\theta-y_1\sin\theta)\frac{k'}{\sqrt{k'^2-l^2\sin^2 am\,nv}}=$$

$$\frac{l.(h+l'P)\sin am\,nu+(g-ll'P_1)\Delta am\,nu}{\Delta am\,nu\,\Delta am\,nv+kl\sin am\,nu\sin am\,nv},$$

$$z_1 \frac{k'}{l \cos am\, nu} =$$

$$\frac{(h + l' P) \Delta am\, nv - (g - ll' P_1) k \sin am\, nv}{\Delta am\, nu\, \Delta am\, nv + kl \sin am\, nu \sin am\, nv}$$

$$+ \frac{l'}{\cos am\, nu} \int \frac{\cos am\, nu}{p} \left(\frac{d^2\Omega}{d\varepsilon^2} + \Omega\right) d\varepsilon.$$

Es braucht kaum hervorgehoben zu werden, dass die deformirte Fläche nicht wieder die Enveloppe einer Kugelfläche ist, dieser Umstand findet nur statt wenn P und P_1 verschwinden, also:

$$\frac{d^2\Omega}{d\varepsilon^2} + \Omega = 0$$

ist. Sind x_0 und y_0 Constanten, so ist $\Omega = x_0 \cos\varepsilon + y_0 \sin\varepsilon$. Die Gleichungen für x, y zeigen, dass sich x_0, y_0 nur auf eine Verschiebung des Anfangspuncts der Coordinaten beziehen, statt der obigen Gleichung kann man also einfach $\Omega = 0$ setzen. In diesem Falle sei R_1 der Radius der Kugelfläche, (ξ_1, η_1) der Punct der planen Curve, welche ihr Mittelpunct beschreibt. Die einhüllende Fläche, welcher der Punct (x_1, y_1, z_1) angehört, ist dann durch folgende Gleichungen bestimmt:

$$(x_1 - \xi_1)^2 + (y_1 - \eta_1)^2 + z_1^2 = R_1^2,$$

$$(x_1 - \xi_1) \frac{d\xi_1}{d\theta} + (y_1 - \eta_1) \frac{d\eta_1}{d\theta} = - R_1 \frac{dR_1}{d\theta}.$$

Setzt man zur Vereinfachung:

$$p_1^2 = k'^2 - l^2 \sin^2 am\, nv,$$

$$D_1 = g\frac{k'\,\Delta am\, nv}{p_1} - h\frac{kl^2 \sin am\, nv}{k'}\frac{}{p_1}$$

also:

$$\frac{dD_1}{d\theta} = \frac{nl^2 \cos am\, nv}{p_1}\,[g\,k \sin am\, nv - h\,\Delta am\, nv],$$

so hat man:

$$R_1 = \quad ln\,[h\,\Delta am\, nv - g\,k \sin am\, nv].$$

$$\xi_1 = \quad D_1 \cos\theta - \frac{dD_1}{d\theta}\sin\theta,$$

$$\eta_1 = -D_1 \sin\theta - \frac{dD_1}{d\theta}\cos\theta.$$

Eine genauere Darlegung der ziemlich mühsamen und beschwerlichen analytischen Rechnungen zur Herstellung der vorstehenden Gleichungen kann an diesem Orte nicht füglich weiter ausgeführt werden.

IV.

Für eine beliebige Curve auf der Enveloppe sei (ξ_1, η_1, ζ_1) ein Punct derselben. Setzt man in den Gleichungen 3) und 4) von I. $x = \xi_1$, so ist:

1) $\xi_1 = \xi - R\cos t\cos\alpha + R\sin t(\cos\lambda\sin w - \cos l\cos w)$

2) $$\frac{1}{R}\frac{d\xi_1}{ds} =$$

$$\left(\frac{dt}{ds}-\frac{\sin w}{\varrho}+\frac{\sin t}{R}\right)[\cos\alpha\sin t+(\cos\lambda\sin w-\cos l\cos w)\cos t]$$

$$+[(\frac{dw}{ds}-\frac{1}{r})\sin t-\frac{\cos w\cos t}{\varrho}](\cos\lambda\cos w+\cos l\sin w).$$

Für jede besondere Curve kann w als Function von s angesehen werden. Die Gleichungen der Tangente zur Characteristik im Puncte (ξ_1, η_1, ζ_1) sind:

$$\frac{X-\xi_1}{(\zeta_1-\zeta)\cos\beta-(\eta_1-\eta)\cos\gamma}=\frac{Y-\eta_1}{(\xi_1-\xi)\cos\gamma-(\zeta_1-\zeta)\cos\alpha}=$$

$$\frac{Z-\zeta_1}{(\eta_1-\eta)\cos\alpha-(\xi_1-\xi)\cos\beta},$$

oder:

$$\frac{X-\xi_1}{\cos\lambda\cos w+\cos l\sin w}=\frac{Y-\eta_1}{\cos\mu\cos w+\cos m\sin w}$$

$$\frac{Z-\zeta_1}{\cos\nu\cos w+\cos n\sin w}.$$

Der Winkel, welchen die Tangente zur Curve mit der Tangente zur Characteristik im Puncte (ξ_1, η_1, ζ_1) einschliesst sei ψ. Man bezeichne den Krümmungshalbmesser der Curve in diesem Puncte durch ϱ_1 und durch r_1 den Torsionsradius. Ist ds_1 das Bogenelement, so finden folgende Gleichungen statt:

$$3)\quad \frac{\cos\psi}{R}\frac{ds_1}{ds}=\sin t\left(\frac{dw}{ds}-\frac{1}{r}\right)-\frac{\cos t\cos w}{\varrho},$$

STANFORD LIBRARIES

$$4) \qquad \frac{\sin\psi}{R}\frac{ds_1}{ds} = \frac{dt}{ds} + \frac{\sin t}{R} - \frac{\sin w}{\varrho}.$$

Bezeichnet man durch θ den Winkel, welchen die Normale zur Krümmungsebene der Curve im Puncte (ξ_1, η_1, ζ_1) mit der Normalen zur Fläche in demselben Puncte bildet, so ist:

$$5) \qquad \frac{\cos\theta}{\varrho_1}\frac{ds_1}{ds} = \frac{d\psi}{ds} - \frac{\sin t\cos w}{\varrho} - \cos t\left(\frac{dw}{ds} - \frac{1}{r}\right),$$

$$6) \qquad \frac{\sin\theta}{\varrho_1}\frac{ds_1}{ds} = \sin t\cos\psi\left(\frac{dw}{ds} - \frac{1}{r}\right) - \frac{\cos t\cos w\cos\psi}{\varrho}$$

$$+ \sin\psi\left(\frac{dt}{ds} - \frac{\sin w}{\varrho}\right).$$

$$\frac{1}{r_1}\frac{ds_1}{ds} = \frac{d\theta}{ds} + \left(\frac{dt}{ds} - \frac{\sin w}{\varrho}\right)\cos\psi$$

$$- \left[\left(\frac{dw}{ds} - \frac{1}{r}\right)\sin t - \frac{\cos t\cos w}{\varrho}\right]\sin\psi.$$

Wegen der Gleichungen 3) und 4) lässt sich die letzte der vorstehenden Gleichungen einfacher schreiben:

$$7) \qquad \frac{1}{r_1}\frac{ds_1}{ds} = \frac{d\theta}{ds} - \frac{\sin t\cos\psi}{R}.$$

Die Gleichungen 3) bis 7) enthalten die wesentlichsten Elemente, welche bei Betrachtungen von Curven auf Enveloppen von Kugelflächen vorkommen. Die Gleichung 6) lässt sich mittelst

der Gleichungen 3) und 4) auf folgende etwas einfachere Form bringen:

$$8) \qquad \frac{\sin\theta}{\varrho_1}\frac{ds_1}{ds} = \frac{1}{R}\frac{ds_1}{ds} - \frac{\sin t \sin\psi}{R}.$$

Es ist $\frac{\sin\theta}{\varrho_1}\frac{ds_1}{ds}$ der reciproke Krümmungshalbmesser des Normalschnitts der Fläche, welcher durch die Tangente der Curve im Puncte (ξ_1, η_1, ζ_1) geht. Existirt auf der Fläche eine Wendecurve, so ist dieselbe nach 4) durch $\psi = 0$ bestimmt. Die Gleichung 8) giebt dann unmittelbar das Theorem:

> Der Krümmungsradius der Wendecurve ist die Projection des Radius der eingehüllten Kugelfläche auf die Krümmungsebene der Wendecurve.

Ist $R = k$, also $\cos t = 0$, so folgt aus 1), $\sin t = 1$ gesetzt:

$$(\xi_1 - \xi)\cos\lambda + (\eta_1 - \eta)\cos\mu + (\zeta_1 - \zeta)\cos\nu = k\sin w.$$

In diesem Falle giebt die Gleichung 4) $\varrho = k\sin w$, also:

$$(\xi_1 - \xi)\cos\lambda + (\eta_1 - \eta)\cos\mu + (\zeta_1 - \zeta)\cos\nu = \varrho.$$

Hieraus folgt:

> Für die Enveloppe einer Kugelfläche von constantem Radius ist die Projection der Verbindungslinie eines Punctes der Wendecurve mit dem entsprechenden Puncte P der Directrix auf die Hauptnormale der Directrix in P gleich dem Krümmungshalbmesser der Directrix in P.

Unter Directrix ist die Curve verstanden, welche der Mittelpunct der eingehüllten Kugelfläche beschreibt.

Ueber die algebraischen Functionen.

Fünfte Note[1]).

Zwei neue Criterien des eindeutigen Entsprechens algebraischer Flächen.

Von

M. Noether.

In der ersten der unten citirten Noten habe ich ein, von Clebsch für einen specielleren Fall angegebenes, Criterium für das eindeutige Entsprechen zweier algebraischer Flächen, die Gleichheit ihres Flächengeschlechtes p, für den allgemeinen Fall erweitert, und dasselbe in Math. Annal., Bd. II, bewiesen. Während ich in jener Note nur für den dort als $p=0$ definirten Fall ein weiteres Criterium aufstellen konnte, ist es mir jetzt gelungen, zwei weitere Criterien von einer dem p analogen Bedeutung, die Gleichheit zweier weiterer durch die Singularitäten der Flächen ausdrückbaren Zahlen p_1 und p_2, allgemein für jedes $p>1$, aufzufinden.

Diese beiden Zahlen sind jedoch, wie ich nachweisen werde, nicht von einander unabhängig, so dass ich nur die erstere besonders als

1) S. diese »Nachr.« 1869, Nr. 15; 1871, Nr. 9 1872, Nr. 25; und die von Herrn Brill und mir gemeinschaftlich verfasste Note 1873, Nr. 4.

das Curvengeschlecht der Fläche ($p>1$) bezeichnen werde. Die Existenz der linearen Relation zwischen p_1 und p_2 bildet eine merkwürdige, für alle, auch beliebig specielle, algebraische Flächen gültige Eigenschaft.

In Bezug auf eine algebraische Fläche F, von der $n$ten Ordnung, mögen die Flächen $(n-4)$ter Ordnung, welche jede i-fache Curve von F als $(i-1)$-fache Curve, jeden i-fachen conischen Knotenpunkt von F als $(i-2)$-fachen Punkt besitzen, als Flächen φ bezeichnet werden.

Dieselben haben in Bezug auf F eine ausgezeichnete Bedeutung, welche derjenigen analog ist, die in der letzten der vorher citirten Noten für die Curven φ algebraisch nachgewiesen worden ist: sie haben ebenfalls für jede rationale Transformation von $F=0$ in eine Fläche $F'=0$ Invarianteneigenschaft. D. h. bei einer solchen Transformation gehen die Flächen φ über in Flächen φ', die in Bezug auf $F'=0$ der für die φ gegebenen Definition entsprechen.

Denn nach meinem Math. Ann. II für den Satz des Flächengeschlechtes geführten Beweise gibt eine solche Transformation:

$$\varphi = A\varphi' + BF',$$

wo A eine rationale Function ist, welche die Transformationsconstanten, dagegen nicht die in φ vorhandenen willkürlichen Constanten enthält. Die Relationen

$$\varrho\varphi_i = \varphi'_i \ (i=1,2,..p),$$

wo sich der Index i auf die p linear von einander unabhängigen Functionen φ bezieht, ersetzen für $p > 3$ vollständig, für $p = 3$ und $p = 2$ wenigstens theilweise, die Transformationsrelationen zwischen $F = 0$ und $F' = 0$.

Somit ist nicht nur diese Zahl p der φ, das Flächengeschlecht, gleich der Anzahl p' der φ'; sondern es ist auch das Geschlecht p_1 der beweglichen Schnittcurve von F mit irgend einer der φ, und ferner die Anzahl p_2 der beweglichen Punkte, in welchen F von irgend zweien der φ geschnitten wird, für die Transformation invariant.

Die Formeln für diese beiden Criterien lassen sich mit den Hülfsmitteln, welche in Salmon's Raumgeometrie und in meiner Abhandlung »Sulle curve multiple di superficie algebriche« (Annali di matem., Ser. II, t. 5) geliefert sind, allgemein aufstellen. So ergibt sich für den speciellen Fall, in dem F besitzen möge:

eine Doppelcurve der Ordnung b, der Klasse q, mit t dreifachen Punkten;

eine Rückkehrcurve der Ordnung c, der Klasse r, welche beide Curven sich in i einfachen Punkten treffen;

einen isolirten l-fachen conischen Punkt,

und unter der Voraussetzung[1]), dass die

1) Andernfalls würde der numerische Ausdruck für p_1 angebbare Modificationen erleiden, und die davon herrührenden Glieder der Formel $p_1 = p'_1$ liessen sich dann auch als von der Transformation abhängig betrachten. In diesem Sinne hat Herr Zeuthen in Comptes Rendus, t. 70 und Math. Ann. IV, p. 37, II eine die Summe der einfachen Fundamentalpunkte der Transformation enthaltende Gleichung gegeben, welche,

φ nicht eine weitere einfache feste Curve von F gemein haben, die Anzahl p_2:

$$p_2 = n(n-4)^2 - 5(n-4)(b+c) + 2(q+r) + \\ + 4i + 9t - l(l-2)^2,$$

während für p die Formel gilt [1]):

$$p = \tfrac{1}{6}(n-1)(n-2)(n-3) - (n-3)(b+c) + \\ + \tfrac{1}{2}(q+r) + i + 2t - \tfrac{1}{6}l(l-1)(l-2).$$

Für p_1 aber ergibt sich:

$$1) \qquad p_1 = p_2 + 1.$$

Hieraus schliesst man nun, dass der in dieser Relation 1) ausgedrückte Satz allgemein für alle Flächen gilt, (eine einzige noch zu erwähnende Flächenfamilie ausgenommen, bei der die Definition von p_1 ihre Bedeutung verliert). Denn man kann jede Fläche durch eindeutige Transformation, wobei p_1 nnd p_2 sich nicht ändern, in eine Fläche der bezeichneten Art, oder sogar in eine solche, welche nur eine Doppelcurve enthält, überführen.

Die beiden neuen Criterien, die sich auf zwei verschiedene geometrische Eigenschaften beziehen, werden durch diesen Satz auf nur eines zurückgeführt, und man erhält innerhalb einer jeden durch einen Werth von p characterisirten

von diesen Gliedern abgesehen, mit der Formel für $12p = p_1$ übereinstimmt.

1) S. Cayley, Philos. Transactions, vol. 159, p. 227.

Flächenclasse eine weitere Eintheilung nach dem Curvengeschlecht p_1.

Für die Reihe der Werthe, welche p_1 bei gegebenem p annehmen kann, existirt eine untere und eine obere Grenze. Ich werde zeigen, dass

$$\frac{15}{2}p > p_1 \geqq 2p-3.$$

Auf der beweglichen Schnittcurve $(F\varphi)$ von F mit einem der φ existiren nach der Relation 1) ∞^{p-2} Gruppen von je p_1-1 Punkten, ausgeschnitten von den übrigen Flächen φ. Die Curve, die vom Geschlecht p_1 ist, könnte nur dann eine solche mit allgemeinen Moduln sein, wenn (s. die Note, d. Nachr. 1873, Nr. 4 §. 5):

$$p_1 - 1 \geqq \frac{(p-2)(p+p_1-1)}{p-1},$$

oder

$$p_1 \geqq p(p-2)+1$$

wäre. Wird p_1 kleiner, so muss die Curve $(F\varphi)$ eine specielle sein. Die speciellste, nicht zerfallende Curve ist aber die hyperelliptische, welche ihre sämmtlichen Curven φ nur in Punktepaaren schneiden, welche also ∞^{p-2} Gruppen von je $p-2$ Punktepaaren enthält, und für welche somit $p_1 = 2p-3$ sein kann. Man kann leicht direct zeigen, dass eine Curve vom Geschlecht p_1 zerfallen muss, wenn sie $\infty^{\frac{p_1}{2}}$ Gruppen von je p_1-1 Punkten besitzen soll. Denn

da die Curven φ durch eine solche Gruppe wieder (s. d. o. c. Note, §. 4) an der Zahl $\infty^{\frac{p_1}{2}}$ wären und in den erstern conjugirten Gruppen von je p_1-1 Punkten schneiden würden, so erhielte man Curven φ mit p_1 willkürlichen Parametern, was nicht existirt.

Die obere Grenze kann man dadurch erhalten, dass man die Ungleichung aufstellt, welche ausdrückt, dass eine Fläche $n$ter Ordnung, welche eine Doppelcurve von gegebener Ordnung enthalten soll, überhaupt existirt. Man hat diese Ungleichung nur mit den Ausdrücken für p und p_1 zu verbinden und n beliebig gross anzunehmen.

Die hier gegebenen Betrachtungen sind nicht mehr anwendbar, wenn $p=0$ und $p=1$, wo p_1 und p_2 ihre Bedeutung verlieren; und ferner, bei jedem p, für den Fall, dass die bewegliche Schnittcurve von F mit den φ immer in mehrere Curven zerfällt. Diese Flächen bilden eine besondere Flächenfamilie mit $p_2=0$, deren Typus in den Flächen $n$ter Ordnung mit $(n-3)$-facher Geraden gegeben ist, Flächen, die von ihren φ je in $p-1$ Curven vom Geschlecht 1 geschnitten werden (eine Eigenschaft, die also der oben angeführten der hyperelliptischen Curven analog ist). Die Relation 1) gilt hier, wenn man p_1 auf jede einzelne der $p-1$ Curven bezieht.

Zu bemerken ist noch, dass der Fall $p_1=2$ überhaupt nicht stattfindet, da für $p=2$, wobei nur ∞^1 Flächen φ vorhanden sind, immer $p_2=0$ ist, für $p>2$ aber $p_1>2$ wird.

Entscheidung des von Boutsinos eingesetzten dichterischen Wettkampfs, verkündigt am 10. Mai in der grossen Halle der Nat.-Universität, von Theod. G. Orphanides. Athen 1870.

— Dasselbe von Georg Mistriotes. 1871.

Euthymios Kastorches. Ueber die alte Verbindung der Griechen mit den Italern und Römern und ihre Einwirkung in Folge dessen auf die Entwicklung dieser. Athen 1872.

Nicephor. Kalogeras. Rede im Auftrage des acad. Senats, gesprochen im heil. Tempel der Metropolis am 30. Jan. 1872. Athen 1872.

Konstantin Busa. Rede, gespr. am 26. Nov. 1871, am Tage der Einsetzung der neuen Vorstände der Nat.-Univers. Athen 1872.

Bericht über die bisherigen Ausgaben des Baues des National Archäolog. Museums. Athen 1871.

Catalog der alten Münzen des Numismatischen National-Museums, angeordnet und beschrieben von Achill. Postolakas. Herausgegeb. auf Kosten der Nation.-Univers Bd. 1. Athen 1872.

Nachrichten und gelehrte Denkschriften der Univers. Kasan. 1869. Heft 6. Kasan 1871. — 1870. Heft 3 u. 4. Daselbst 1872. — 1871. Heft 4. Das. 1872*).

Februar 1873.

Nature 170. 171. 172. 173.

Zeitschrift der Deutsch. Morgenländ. Gesellschaft. Register zu Bd. XI—XX. Leipzig 1872. 8. — Bd. XXVI. Heft 3 u. 4. Mit 9 Tafeln. Ebd. 1872. 8.

Dr. F. Kaiser, Annalen der Sternwarte zu Leiden. Bd. III. Haag 1872. 4.

Annales de l'Observatoire Royal de Bruxelles. Bogen 11.

Bulletin de l'Académie R. des Sciences etc. de Belgique, 42e année, 2e sér., t. 35. Nr. 1. Bruxelles 1873. 8.

Capitaine Bazerque. La caravane universelle. Voyage autour du Monde. Paris. 8.

*) Die Werke aus Athen und Kasan sind in griechischer und in russischer Sprache.

(Fortsetzung folgt).

ROYAL COLLEGE OF PHYSICIANS IRELAND

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

9. April. № 9. 1873.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften,

Ueber die Abstammung der Diplophysen und über eine neue Gruppe von Diphyiden.

Von

C. Claus.

Unter der Fülle kleiner Scheibenquallen, welche an den sommerwarmen Märztagen die Meeresoberfläche im Golf von Neapel bevölkern, finden sich eigenthümliche, glashelle, fast kuglige Körper, die man bei oberflächlicher Betrachtung leicht für Medusen halten wird. Dieselben sind indessen kleine Siphonophorenstöckchen, bestehend aus einer Schwimmglocke und einem Stamme, welcher mit seinen zahlreichen, nach dem Typus der Diphyiden angeordneten Knospen und Anhängen in einen langgezogenen, fast trichterförmigen Canal des Schwimmglockenschirmes zurückgezogen liegt. Man fühlt sich anfangs zu der Vermuthung gedrängt, unsere Siphonophorenstöckchen für verstümmelt zu halten und den Ausfall der zweiten Schwimm-

glocke anzunehmen, da ja so häufig die bekannten Diphyiden ihre untere Schwimmglocke verlieren und mit der zurückgebliebenen obern Schwimmglocke noch Tage lang munter umherschwimmen. Wenn indessen schon der canalartige, enge und lang gezogene Raum des Gallertschirmes, in welchen Stamm und Anhänge vollständig zurückgezogen werden können, a priori diese Möglichkeit ausschliesst, so wird dieselbe weiter durch die direkte Beobachtung widerlegt. Ich habe Hunderte unserer kleinen Monophyiden, wie ich die Formen im Gegensatze zu den Diphyiden nennen will, in verschiedenen Grössen und Entwicklungsstufen von 2 bis 8 Mm. Schwimmglocken-Durchmesser beobachtet und nie eine zweite Schwimmglocke, auch nicht eine Spur, die auf ihr früheres Vorhandensein oder ihre nicht zur Ausbildung gelangte Anlage hingewiesen hätte, entdecken können. Diese Monophyidenstöckchen sind nun, wie wir sehen werden, die Erzeuger der Diplophysen, die sich zu jenen verhalten, wie die Eudoxien zu Diphyes und Abyla.

Man unterscheidet leicht zwei verschiedene Formen. Die eine, *Monophyes gracilis*, besitzt einen nicht sehr hohen, glockenförmigen Schwimmsack, an welchen nicht weit vom obern Ende der Axe das Centralgefäss herantritt. Der sog. Saftbehälter ist lang gestreckt und gekrümmt, und liegt dem langen, über die Kuppel des Schwimmsackes hinaus nach der andern Seite des Schirmes gelagerten Canal, welcher Stamm und Anhänge in sich aufnimmt, gegenüber. Die letzteren beginnen am oberen Stammesende als dicht gedrängte Knospen und bestehen je aus einem Polypen nebst Fangfadenanlage. Sämmtlich an der gleichen Seite (Bauchseite) des Stam-

mes entspringend, erscheinen sie bereits in einiger Entfernung vom Stammesende durch kurze Zwischenräume getrennt und sitzen hier nicht unmittelbar, sondern mittelst eines Stieles auf, der mit der Entfernung vom obern Ende des Stammes an Länge zunimmt. An der Ursprungsstelle des sehr contraktilen, zu bedeutender Verlängerung befähigten Stieles findet sich stets eine Auftreibung, welche an jüngeren Anhängen, deren Stiel noch nicht zur Ausbildung gekommen ist, unmittelbar über der Fangfadenknospe liegt. Es ist diese Auftreibung die Anlage einer Doppelknospe, aus der sich später Deckstück und Specialschwimmglocke nebst Genitalklöpfel der Eudoxien-ähnlichen Anhangsgruppe entwickelt. Die Nesselknöpfe, welche als Seitenanhänge des Langfadens auftreten, bleiben nach Art der Diphyiden klein und enthalten nur 2 Paar grosse, stabförmige Nesselkapseln zur Seiten des Angelbandes. Diese zeigen ebenso wie die quer gestellten, kleinen Nesselkapseln eine gelbe Färbung. Charakteristisch sind ferner zwei Gruppen birnförmiger, ebenfalls gelb tingirter Nesselkapseln, von denen die eine am Ende des Angelbandes, die zweite an der äussersten Spitze des zusammengeballten Endfadens liegt und durch den Besitz borstenförmiger Fortsätze der die Nesselkapseln bergenden Zellen ausgezeichnet erscheint.

Die zweite Art, die als ***Monophyes irregularis*** bezeichnet werden mag, unterscheidet sich von der ersteren auf den ersten Blick durch die viel bedeutendere Tiefe des Schwimmsacks und die Ungleichheit der Schwimmsackgefässe. Der kürzere und gedrungenere Saftbehälter lässt ohne Vermittlung eines besondern Stielgefässes an der Seite des Schwimmsacks die 4 Radialge-

fässe hervorgehen, von denen die beiden grösseren über die Kuppe des Schwimmsacks verlaufend die kleineren mehr als um das doppelte an Länge übertreffen. Der trichterförmige Canal, in welchen Stamm und Anhänge eingezogen werden, liegt auf der gleichen Seite des Saftbehälters und ist viel kürzer und weiter als der entsprechende Raum der erstbeschriebenen Art. Stamm und Anhänge unterscheiden sich sodann durch die bedeutendere Gedrungenheit und durch die Kürze des Stieles der Einzelpolypen. Es scheinen die beiden Knospenanlagen des Deckstückes und der Specialschwimmglocke nebst Genitalklöpfel unmittelbar über der Knospengruppe des Fangfadens und seiner Nesselknöpfe zu entspringen. Die letzteren sind den beschriebenen von *M. gracilis* sehr ähnlich, doch sind die beiden seitlichen Nesselkapseln von etwas geringerem Umfang, andererseits vermisst man die Gruppe gelber, birnförmiger Nesselkapseln an der Spitze des Endfadens.

Natürlich war meine besondere Aufmerksamkeit darauf gerichtet, die Entwicklung beziehungsweise Lostrennung der Individuengruppen, d. h. des Polypen nebst Fangfadens und der beiden Knospen seiner Basis zu verfolgen. Soviel konnte ich auch mit Sicherheit feststellen, dass sich die eine der letzteren zu einem Deckstück, die andere zu einer Specialschwimmglocke ausbildet, dass es sich also wie bei den Diphyiden um Erzeugung Eudoxien-ähnlicher Individuengruppen handelt. Dass ich dieselben in vorgeschrittenerer Form im Zusammenhang mit dem Stamme nicht mehr nachzuweisen vermochte, wird nicht auffallen können, wenn man die Art des pelagischen Fanges dieser Thiere mit dem feinen Netze in Erwägung zieht, bei

dessen Berührung wahrscheinlich sehr energische Contraktionen des Stammes eintreten werden, in deren Folge sich die Endglieder schon vor gewonnener Reife, früher als unter normalen Lebensverhältnissen ablösen müssen. Dafür aber fand ich die jungen und auch vorgeschrittenere geschlechtsreife Eudoxien unserer Monophyiden in grosser Zahl frei umher schwimmend und erkannte dieselben als die bereits von Gegenbaur beschriebenen Diplophysen. Dass diese in der That die zu *Monophyes* zugehörigen Eudoxienzustände sind, ergiebt sich mit positiver Sicherheit auch ohne direkte Beobachtung der Loslösung der Individuengruppen vom Stamme aus der Uebereinstimmung ihrer Polypen und Nesselknöpfe mit denen der beschriebenen beiden Monophyes-Arten. In der That unterscheidet man auch unter den Diplophysen zweierlei Formen, von denen die eine den Polypen auf einem mächtigen, überaus dehnbaren Stiel, wie auf einem besonderen Stamme, trägt und in der Form ihrer Nesselknöpfe mit *M. gracilis* übereinstimmt, die andere dagegen die entsprechenden Charaktere der zweiten Art wiederholt. Die erstere Diplophysa bietet zwar nach dem Alter und Entwicklungszustand des Geschlechtsklöpfels abweichende Grössenverhältnisse zwischen Deckstück und Specialschwimmglocke, doch übertrifft diese selbst im Stadium der Reife das Deckstück nur um weniges. Die zweite Diplophysenform dagegen trägt eine verhältnissmässig viel umfangreichere Specialschwimmglocke.

Neapel den 16. März 1873.

Ueber das elektrochemische Aequivalent des Wassers;

von

F. Kohlrausch in Darmstadt,

correspondirendem Mitgliede.

Am Schlusse des »Berichtes über die Beobachtungen im magnetischen Observatorium aus dem Jahre 1869«[1]) habe ich eine ebendort ausgeführte Untersuchung über das elektrochemische Aequivalent des Wassers erwähnt, welche durch einen unglücklichen Zufall (nämlich durch den zu spät bemerkten Localeinfluss eines Dämpfers auf die Nadel der Tangentenbussole) nicht das erstrebte einwurfsfreie Resultat für diese wichtige Naturconstante geliefert hat. Trotzdem glaube ich, dass das Ergebniss der Arbeit reichlich so viel Vertrauen beanspruchen kann, wie die früheren Bestimmungen der fraglichen Grösse, welche sämmtlich vor etwa 30 Jahren und in Folge dessen mit unvollkommneren Hülfsmitteln ausgeführt worden sind, als sie jetzt zur Verfügung stehen. Ferner hat sich bei genauerer Durchsicht dieser Arbeiten gezeigt, dass sie zum Theil einer Correctur bedürfen. Ich will die so corrigirten Werthe und den von mir neuerdings erhaltenen zusammenstellen, woraus dann folgen wird, dass der bisher angenommene Werth 0,00933 für das elektrochemische Aequivalent des Wassers nach den jetzigen Kenntnissen in

0,009421

verwandelt werden muss.

1) Nachrichten 1870, S. 523.

Zur Messung benutzte ich als Elektrolyten eine Lösung von salpetersaurem Silber, da die Menge eines Silberniederschlages mit grösserer Genauigkeit bestimmt werden kann als eine zersetzte Wassermenge. Die nachfolgenden Zahlen, welche um höchstens $\frac{1}{40}$ Procent von einander abweichen, bestätigen diese Voraussetzung.

Die drei ausgeführten Beobachtungsreihen ergaben

Stromstärke in magn. Einheiten	5,0482	4,1767	4,1377
In 1 Sec. ausgeschiedenes Silber	0,57359	0,47469	0,47017
Elektrochem. Aequiv. des Silbers	0,11362	0,11365	0,11363.

Multiplicirt man den Mittelwerth 0,11363 der letzteren Zahlen mit $\frac{9}{107,93}$, d. h. mit dem Verhältniss des chemischen Aequivalentgewichtes vom Wasser zu dem des Silbers, so erhält man das elektrochemische Aequivalent des Wassers gleich

0,009476.

Diese Zahl ist um 1,5 Procent grösser, als die bisher angenommene 0,00933. Indessen sind die früheren Beobachtungen in der That etwas anders zu berechnen, theilweise um mit der Correction in Uebereinstimmung gebracht zu werden, welche Hr. Weber (im 5ten Bande der Abhandlungen, S. 29) aus den von der Lage abhängigen Aenderungen des Nadelmagnetismus

für die früheren Göttinger Bestimmungen der erdmagnetischen Intensität entwickelt hat. Diese Correction betrifft die Resultate von Weber und von Casselmann und beträgt + 0,21 Procent. Das Resultat Bunsen's muss, da in ihm die erdmagnetische Intensität für Marburg um 3,8 Procent zu gross angenommen worden ist, um eben diesen Betrag vergrössert werden.

So ergibt sich:

	bisher angenommen	berichtigt
nach Weber	0,009376	0,009396
— Casselmann	0,009371	0,009391
— Bunsen	0,009266	0,009624
— Joule	0,009222	0,009222
— Kohlrausch		0,009476
Mittel	0,000331	0,009421

Den Resultaten Bunsen's und Joule's ist bei der Mittelnahme das Gewicht $\frac{1}{2}$ beigelegt worden, weil beide Beobachter keine eigenen Messungen der erdmagnetischen Intensität für ihren Beobachtungsort angestellt, sondern die Zahl dafür aus Karten entnommen haben.

Darmstadt, Januar 1873.

Preisaufgaben
der
Wedekindschen Preisstiftung
für Deutsche Geschichte.

Der Verwaltungsrath der Wedekindschen Preisstiftung für Deutsche Geschichte macht hiermit wiederholt die Aufgaben bekannt, welche für den dritten Verwaltungszeitraum, d. h. für die Zeit vom 14. März 1866 bis zum 14. März 1876, von ihm ingemäss der Ordnungen der Stiftung gestellt worden sind.

Für den ersten Preis.

Der Verwaltungsrath verlangt

eine Ausgabe der verschiedenen Texte der lateinischen Chronik des Hermann Korner.

Für den letzten Verwaltungszeitraum war eine Ausgabe der verschiedenen Texte und Bearbeitungen der Chronik des Hermann Korner verlangt und dabei sowohl an die handschriftlich vorhandenen deutschen wie die lateinischen Texte gedacht. Seit dem ersten Ausschreiben dieser Preisaufgabe hat sich aber die Kenntnis des zu benutzenden Materials in überraschender Weise vermehrt: zu der von der bisherigen Ausgabe der Chronica novella stark abweichenden Wolfenbütteler Handschrift sind zwei andere in Danzig und Linköping gekommen, die jenes Werk in wieder anderer Gestalt darbieten (vgl. Waitz, Ueber Hermann Korner und die

Lübecker Chroniken, Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen Bd. V, und einzeln Göttingen 1851. 4., Nachrichten 1859 Nr. 5 S. 57 ff. und 1867 Nr. 8 S. 113); ausserdem ist in Wien ein Codex der deutschen Bearbeitung gefunden, der den Korner auch als Verfasser dieser bestimmt erkennen lässt (Pfeiffer, Germania IX, S. 257 ff.).

Auch jetzt noch würde eine zusammenfassende Bearbeitung aller dieser Texte das Wünschenswertheste sein. Da aber eine solche nicht geringe Schwierigkeiten darbietet, so hat der Verwaltungsrath geglaubt, bei der für den neuen Verwaltungszeitraum beschlossenen Wiederholung die Aufgabe theilen und zunächst eine kritische Edition der verschiedenen Texte der lateinischen Chronik fordern zu sollen.

Hier wird es darauf ankommen zu geben:

1) den in der Wolfenbütteler Handschrift, Helmstad. Nr. 408, enthaltenen Text einer ohne Zweifel dem Korner angehörigen Chronik, als die älteste bekannte Form seiner Arbeit;

2) alles was die Danziger und Linköpinger Handschrift Eigenthümliches darbieten und ausserdem eine Nachweisung ihrer Abweichungen von den andern Texten und unter einander, so dass die allmähliche Entstehung und Bearbeitung des Werkes erhellt;

3) aus der letzten und vollständigsten Bearbeitung der Chronica novella, die bei Eccard (Corpus historicum medii aevi II) gedruckt ist, wenigstens von der Zeit Karl des Grossen an, alles das was nicht aus Heinrich von Herford entlehnt und in der Ausgabe desselben von Potthast bezeichnet ist, unter Benutzung der

vorhandenen Handschriften, namentlich der Lübecker und Lüneburger.

Es wird bemerkt, dass von dem Wolfenbütteler, Danziger und Linköpinger Codex sich genaue Abschriften auf der Göttinger Universitäts-Bibliothek befinden, die von den Bearbeitern werden benutzt werden können, jedoch so dass wenigstens bei der Wolfenbütteler Handschrift auch auf das Original selbst zurückzugehen ist.

In allen Theilen ist besonders auf die von Korner benutzten Quellen Rücksicht zu nehmen, ein genauer Nachweis derselben und der von dem Verfasser vorgenommenen Veränderungen sowohl in der Bezeichnurg derselben wie in den Auszügen selbst zu geben. Den Abschnitten von selbständigem Werth sind die nöthigen erläuternden Bemerkungen und ein Hinweis auf andere Darstellungen, namentlich in den verschiedenen Lübecker Chroniken, beizufügen.

Eine Einleitung hat sich näher über die Person des Korner, seine Leistungen als Historiker, seine eigenthümliche Art der Benutzung und Anführung älterer Quellen, den Werth der ihm selbständig angehörigen Nachrichten, sodann über die verschiedenen Bearbeitungen der Chronik, die Handschriften und die bei der Ausgabe befolgten Grundsätze zu verbreiten.

Ein Glossar wird die ungewöhnlichen, dem Verfasser oder seiner Zeit eigenthümlichen Ausdrücke zusammenstellen und erläutern, ein Sachregister später beim Druck hinzuzufügen sein.

Für den zweiten Preis.

Wie viel auch in älterer und neuerer Zeit für die Geschichte der Welfen und namentlich des mächtigsten und bedeutendsten aus dem jün-

geren Hause, Heinrich des Löwen, gethan ist, doch fehlt es an einer vollständigen, kritischen, das Einzelne genau feststellenden und zugleich die allgemeine Bedeutung ihrer Wirksamkeit für Deutschland überhaupt und die Gebiete, auf welche sich ihre Herrschaft zunächst bezog, insbesondere in Zusammenhang darlegenden Bearbeitung.

Indem der Verwaltungsrath

eine Geschichte des jüngeren Hauses der Welfen von 1055—1235 (von dem ersten Auftreten Welf IV. in Deutschland bis zur Errichtung des Herzogthums Braunschweig-Lüneburg)

ausschreibt, verlangt er sowohl eine ausführliche aus den Quellen geschöpfte Lebensgeschichte der einzelnen Mitglieder der Familie, namentlich der Herzoge, als auch eine genaue Darstellung der Verfassung und der sonstigen Zustände in den Herzogthümern Baiern und Sachsen unter denselben, eine möglichst vollständige Angabe der Besitzungen des Hauses im südlichen wie im nördlichen Deutschland und der Zeit und Weise ihrer Erwerbung, eine Entwicklung aller Verhältnisse, welche zur Vereinigung des zuletzt zum Herzogthum erhobenen Welfischen Territoriums in Niedersachsen geführt haben. Beizugeben sind Regesten der erhaltenen Urkunden, jedenfalls aller durch den Druck bekannt gemachten, so viel es möglich auch solcher die noch nicht veröffentlicht worden sind.

In Beziehung auf die Bewerbung um diese Preise, die Ertheilung des dritten Preises und

die Rechte der Preisgewinnenden ist zugleich Folgendes aus den Ordnungen der Stiftung hier zu wiederholen.

1. Ueber die zwei ersten Preise. Die Arbeiten können in deutscher und lateinischer Sprache abgefasst sein.

Jeder dieser Preise beträgt 1000 Thaler in Gold, und muss jedesmal ganz, oder kann gar nicht zuerkannt werden.

2. Ueber den dritten Preis. Für den dritten Preis wird keine bestimmte Aufgabe ausgeschrieben, sondern die Wahl des Stoffs bleibt den Bewerbern nach Massgabe der folgenden Bestimmungen überlassen.

Vorzugsweise verlangt der Stifter für denselben ein deutsch geschriebenes Geschichtsbuch, für welches sorgfältige und geprüfte Zusammenstellung der Thatsachen zur ersten, und Kunst der Darstellung zur zweiten Hauptbedingung gemacht wird. Es ist aber damit nicht bloss eine gut geschriebene historische Abhandlung, sondern ein umfassendes historisches Werk gemeint. Speciallandesgeschichten sind nicht ausgeschlossen, doch werden vorzugsweise nur diejenigen der grösseren (15) deutschen Staaten berücksichtigt.

Zur Erlangung dieses Preises sind die zu diesem Zwecke handschriftlich eingeschickten Arbeiten, und die von dem Einsendungstage des vorigen Verwaltungszeitraums bis zu demselben Tage des laufenden Zeitraums (dem 14. März des zehnten Jahres) gedruckt erschienenen Werke dieser Art gleichmässig berechtigt. Dabei findet indessen der Unterschied statt, dass die ersteren, sofern sie in das Eigenthum der Stiftung übergehen, den vollen Preis von 1000 Thalern in

Golde, die bereits gedruckten aber, welche Eigenthum des Verfassers bleiben, oder über welche als sein Eigenthum er bereits verfügt hat, die Hälfte des Preises mit 500 Thalern Gold empfangen.

Wenn keine preiswürdigen Schriften der bezeichneten Art vorhanden sind, so darf der dritte Preis angewendet werden, um die Verfasser solcher Schriften zu belohnen, welche durch Entdeckung und zweckmässige Bearbeitung unbekannter oder unbenutzter historischer Quellen, Denkmäler und Urkundensammlungen sich um die deutsche Geschichte verdient gemacht haben. Solchen Schriften darf aber nur die Hälfte des Preises zuerkannt werden.

Es steht Jedem frei, für diesen zweiten Fall Werke der bezeichneten Art auch handschriftlich einzusenden. Mit denselben sind aber ebenfalls alle gleichartigen Werke, welche vor dem Einsendungstage des laufenden Zeitraums gedruckt erschienen sind, für diesen Preis gleich berechtigt. Wird ein handschriftliches Werk gekrönt, so erhält dasselbe einen Preis von 500 Thalern in Gold; gedruckt erschienenen Schriften können nach dem Grade ihrer Bedeutung Preise von 250 Thlr. oder 500 Thlr. Gold zuerkannt werden.

Aus dem Vorstehenden ergiebt sich von selbst, dass der dritte Preis auch Mehreren zugleich zu Theil werden kann.

3. Rechte der Erben der gekrönten Schriftsteller. Sämmtliche Preise fallen, wenn die Verfasser der Preisschriften bereits gestorben sein sollten, deren Erben zu. Der dritte Preis kann auch gedruckten Schriften zuerkannt werden, deren Verfasser schon gestorben sind, und fällt alsdann den Erben zu.

4. Form der Preisschriften und ihrer Einsendung. Bei den handschriftlichen Werken, welche sich um die beiden ersten Preise bewerben, müssen alle äusseren Zeichen vermieden werden, an welchen die Verfasser erkannt werden können. Wird ein Verfasser durch eigene Schuld erkannt, so ist seine Schrift zur Preisbewerbung nicht mehr zulässig. Daher wird ein Jeder, der nicht gewiss sein kann, dass seine Handschrift den Preisrichtern unbekanut ist, wohl thun, sein Werk von fremder Hand abschreiben zu lassen. Jede Schrift ist mit einem Sinnspruche zu versehen, und es ist derselben ein versiegelter Zettel beizulegen, auf dessen Aussenseite derselbe Sinnspruch sich findet, während inwendig Name, Stand und Wohnort des Verfassers angegeben sind.

Die handschriftlichen Werke, welche sich um den dritten Preis bewerben, können mit dem Namen des Verfassers versehen, oder ohne denselben eingesandt werden.

Alle diese Schriften müssen im Laufe des neunten Jahres vor dem 14. März, mit welchem das zehnte beginnt (also diesmal bis zum 14. März 1875), dem Director zugesendet sein, welcher auf Verlangen an die Vermittler der Uebersendung Empfangsbescheinigungen auszustellen hat.

5. Ueber Zulässigkeit der Preisbewerbung. Die Mitglieder der Königlichen Societät, welche nicht zum Preisgerichte gehören, dürfen sich, wie jeder Andere, um alle Preise bewerben. Dagegen leisten die Mitglieder des Preisgerichts auf jede Preisbewerbung Verzicht.

6. Verkündigung der Preise. An dem 14. März, mit welchem der neue Verwaltungszeitraum beginnt, werden in einer Sitzung der

Societät die Berichte über die Preisarbeiten vorgetragen, die Zettel, welche zu den gekrönten Schriften gehören, eröffnet, und die Namen der Sieger verkündet, die übrigen Zettel aber verbrannt. Jene Berichte werden in den Nachrichten über die Königliche Societät, dem Beiblatte der Göttingenschen gelehrten Anzeigen, abgedruckt. Die Verfasser der gekrönten Schriften oder deren Erben werden noch besonders durch den Director von den ihnen zugefallenen Preisen benachrichtigt, und können dieselben bei dem letztern gegen Quittung sogleich in Empfang nehmen.

7. Zurückforderung der nicht gekrönten Preisschriften. Die Verfasser der nicht gekrönten Schriften können dieselben unter Angabe ihres Sinnspruches und Einsendung des etwa erhaltenen Empfangsscheines innerhalb eines halben Jahres zurückfordern oder zurückfordern lassen. Sofern sich innerhalb dieses halben Jahres kein Anstand ergiebt, werden dieselben am 14. October von dem Director den zur Empfangnahme bezeichneten Personen portofrei zugesendet. Nach Ablauf dieser Frist ist das Recht zur Zurückforderung erloschen.

8. Druck der Preisschriften. Die handschriftlichen Werke, welche den Preis erhalten haben, gehen in das Eigenthum der Stiftung für diejenige Zeit über, in welcher dasselbe den Verfassern und deren Erben gesetzlich zustehen würde. Der Verwaltungsrath wird dieselben einem Verleger gegen einen Ehrensold überlassen, oder wenn sich ein solcher nicht findet, auf Kosten der Stiftung drucken lassen, und in diesem letzteren Falle den Vertrieb einer zuverlässigen und thätigen Buchhandlung übertragen.

Die Aufsicht über Verlag und Verkauf führt der Director.

Der Ertrag der ersten Auflage, welche ausschliesslich der Freiexemplare höchstens 1000 Exemplare stark sein darf, fällt dem verfügbaren Capitale zu, da der Verfasser den erhaltenen Preis als sein Honorar zu betrachten hat. Wenn indessen jener Ertrag ungewöhnlich gross ist, d. h. wenn derselbe die Druckkosten um das Doppelte übersteigt, so wird die Königliche Societät auf den Vortrag des Verwaltungsrathes erwägen, ob dem Verfasser nicht eine ausserordentliche Vergeltung zuzubilligen sei.

Findet die Königliche Societät fernere Auflagen erforderlich, so wird sie den Verfasser, oder falls derselbe nicht mehr leben sollte, einen anderen dazu geeigneten Gelehrten zur Bearbeitung derselben veranlassen. Der reine Ertrag der neuen Auflagen soll sodann zu ausserordentlichen Bewilligungen für den Verfasser, oder falls derselbe verstorben ist, für dessen Erben, und den neuen Bearbeiter nach einem von der Königlichen Societät festzustellenden Verhältnisse bestimmt werden.

9. Bemerkung auf dem Titel derselben. Jede von der Stiftung gekrönte und herausgegebene Schrift wird auf dem Titel die Bemerkung haben:

> von der Königlichen Societät der Wissenschaften in Göttingen mit einem Wedekindschen Preise gekrönt und herausgegeben.

10. Freiexemplare. Von den Preisschriften, welche die Stiftung herausgiebt, erhalten die Verfasser je 10 Freiexemplare.

Göttingen, den 14. März 1873.

Verzeichniss der bei der Königl. Gese schaft der Wissenschaften eingegangen Druckschriften.

Februar 1873.

(Fortsetzung).

G. V. Schiaparelli e P. F. Denza. Sulla gra pioggia di stelle cadenti prodotta dalla cometa pe dica di Biela, osservata la sera d. 27. nov. 1872. lano 1872. 8.

Anzeiger für Kunde der deutschen Vorzeit. Neue Fo Jahrg. XIX. 1872. Nr. 1—12. Nürnberg. 4.

Dr. A. de Bary, Rede geh. zum Antritt des Recto der Univers. Strassburg am 2. Nov. 1872. Ebd. 8

Dr. R. Wolf, Astronom. Mittheilungen. Nr. XXXI.

Mittheilungen aus dem naturwissenschaftl. Vereine Neu-Vorpommern u. Rügen. Jahrg. IV. Berlin 1872

Memoirs of the R. Astronom. Society. Part II. V XXXIX. 1871—72. With one plate. London 1872

Catalogue of Scientific Papers. Compiled and publis by the R. Society of London. Vol. VI. Ebd. 1872

Proceedings of the Academy of Natural Sciences of ladelphia. Part I—III. 1871. Ebd. 1871 u. 72. 8

G. W. Hill, Tables of Venus, prepared for the us the American Ephemeris and Nautical Almanac. V shington 1872. 4.

Memoirs of the Boston Society of Natural History. Vol Part I. Nr. II—III. — P. II. Nr. I. Boston 1872.

Proceedings of the Boston Soc. of Nat. History. (inc plet).

Giulio Minervini, La Biblioteca Universitaria Napoli. Relazione. Ebd. 1873. 8.

Monatsbericht der k. preuss. Akad. d. Wissenschaften Berlin. Nov. 1872. Mit 1 Taf. Ebd. 1873. 8.

Rob. Grassmann, Die Erdgeschichte oder Geolo Stettin 1873. 8.

Der Zoologische Garten. Jahrg. XIII. 1872. Nr. 7— Frankfurt a. M. 1872. 8.

(Fortsetzung folgt).

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

30. April. № 10. 1873.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Ueber einen grossen Sternschnuppenfall aus dem Jahre 524 n. Chr. und seinen muthmasslichen Zusammenhang mit dem Cometen von Biela und dem des Jahres 1162.

Von

W. Klinkerfues.

Den Anstoss zu den hier mitzutheilenden Untersuchungen gab Herr Professor Unger, indem er mir am 8ten Februar d. J. folgendes Billet schrieb:

(»Theophanes chronographia ad a. 524, pag. 286 der Bonner Ausgabe der Scriptt. hist. Byzant.). In diesem Jahre (524 nach Chr. Geb.) aber geschah auch viel Laufen der Sterne (*ἀστέρων δρόμος πολύς*) vom Abend bis zum Tagesanbruch, so dass Alle erschracken, und wir wissen von keinem solchen Ereigniss weiter«.

»Aehnlich steht dasselbe, wenn ich mich recht erinnere, (fährt Herr Professor Unger fort) im Chronicon paschale. Ich weiss nicht,

ob diese Stellen schon beachtet sind.
scheinen sie charakteristisch für eine Ersc
nung, wie die kürzlich erlebte«.

Dass hier von einem aussergewöhnlich g
zenden Sternschnuppenfall die Rede sei, kor
da auch andere Berichte von dem Phänomen
von etwas ganz Ausserordentlichem sprec
kaum in Zweifel gezogen werden. So trat d
von Neuem die Versuchung an mich heran,
besonders reichen Sternschnuppenfall der be
deren Nähe eines Cometen zuzuschreiben, zu
im October genannten Jahres wirklich ein
cher gesehen worden ist. Freilich existiren k
Beobachtungen des Cometen von 524, eber
wenig eine Bestimmung des Radiationspun
der Sternschnuppen, aber eine Art von Prü
der Hypothese schien nicht mehr unmög
wenn wenigstens Etwas über die Jahreszeit
Sternschnuppenfalls in Erfahrung zu brin
war. Diesem Verlangen kam nun ein zw
Billet des Herrn Professor Unger entge
worin mitgetheilt wird:

»Michael Glycas, Annal. Pars 4, pag. 500
Bonner Ausgabe: Es erschien auch ein
met 20 Tage lang, und nach einiger Zeit
gab sich ein Laufen der Sterne vom Ab
bis früh, so dass man sagte, dass alle St
fielen«.

Einige Zeit bedeutet in solcher Verbind
wahrscheinlich: Einige Tage oder wenige
chen, und deutet also unter Berücksichtig
des Umstandes, dass der Comet während
rerer Wochen des October gesehen worden
auf einen Sternschnuppenfall ganz am Ende
October oder auch in den ersten Wochen
November. Im ersten Augenblick kann
deshalb denken, eine ausgezeichnete Erschei

der bekannten Novemberfälle mit Radiationspunkt bei γ Leonis vor sich zu haben, bis man sich überzeugt, dass letztere im sechsten Jahrhundert ganz in den Anfang des October stattgefunden haben müssen, auch immer sehr nahe die Jahrhunderte in Drittel getheilt haben. Zwanglos dagegen fügt sich der Fall in eine andere Reihe älterer ausgezeichneter Meteorschauer, welche man von Klein in seinem Handbuche der allgemeinen Himmelsbeschreibung, I. Theil pag. 328 mit anderen gemischt erwähnt findet. Diese sind, mit Hinzufügung des auf den n. Stil reducirten Datums

585 n. Chr. den 12. Nov.
837 » » » 12. » (beobachtet in China).
899 » » » 18. » (» » Egypt.)

In den nächsten Jahrhunderten fehlt es mir an hinreichend zuverlässigen Angaben. Bei dem Suchen nach einer Fortsetzung der Reihe darf man nicht vergessen, dass wegen des durch die Präcession veranlassten Unterschiedes zwischen dem tropischen Jahre und dem siderischen Jahre die Epochen sich um nahe 1,4 Tage in jedem Jahrhundert verspäten. Gegen Ende des achten Jahrhunderts fiel nach obigen Zahlen das mittlere, d. h. das von dem Einfluss der Störungen und Unregelmässigkeiten durch Ausgleichung befreite, Datum des Falles auf den 14. Nov. n. St.; gegen Ende des 16ten Jahrhunderts haben wir also einen Tag nahe dem 25. Nov. zu suchen. Mit Rücksicht auf die in die Augen springende Periode von nahe 62,6 Jahren erkennen wir in den Fällen vom 28. Nov. 1584 und 25. Nov. 1586 eine Fortsetzung der obigen Reihe wieder. Endlich ist noch als hierher gehörig

der Fall vom 6. bis 8. Dec. 1838 zu notiren
Dieser letztere gehört nun wieder zu einer Reihe
auf welche (meines Wissens zuerst) d'Arrest
Astron. Nachr. Nr. 1633, aufmerksam gemach
hat, und die, ohne Zweifel mit Recht zu den
Biela'schen Cometen in Beziehung gebracht wird
Es sind dies die Meteorfälle vom

5. Dec. 1741 (Beobachter: Krafft in Petersburg
6. » 1798 (Brandes beobachtet zu Bremen
2000 Sternschnuppen)
7. » 1830 (Beobachter: Raillard, Comtes. Ren
dus VII, pag. 177)
6. » 1838 (Flauguergues zu Toulon)
7. » 1838 (Edw. Herrick zu New-Haven
»d'un point du ciel près de l
chaise de Cassiopée«).

Letztere Bezeichnung passt auf den Heis'
schen Radiationspunkt $AR = 21^0$, Decl. $= +54^0$
Hier muss ich nun einige dem Resultate späte
rer Rechnungen vorgreifende Bemerkungen ma
chen. Der von Professor Weiss ausgesproche
nen Ansicht mich anschliessend, dass die letzt
Theilung des Cometen von Biela aus dem De
cember 1845 nicht seine einzige gewesen sei
halte ich es für nothwendig, bei der Untersu
chung alter Sternschnuppenfälle einen alten un
einen modernen Biela'schen Cometen zu unter
scheiden und entsprechend zwischen den beide
Radiationspunkten in der Andromeda und de
Cassiopeja, welche Ende des November und An
fang des December bemerkt werden. Die Bahn
des modernen Biela'schen Cometen war nun abe
schon vor dem Jahre 1838 so, dass ihr der Ra
diationspunkt in der Andromeda

$$AR = 25^0, \quad \text{Decl.} = +40^0$$

(nach der Heis'schen Bestimmung des Jahres 1847) oder

$$AR = 26^0, \quad \text{Decl.} = +37^0$$

(nach meiner neulichen Bestimmung, welche zur Auffindung des Sternschnuppenschwarms vom 27. November 1872 in Madras geführt hat) in Betreff der Zeit und in Allem ungleich besser entspricht, als der vorhin genannte. Dies und Anderes erwogen, erscheint es genügend motivirt, den Radiationspunkt vom 7. Dec. 1838 und der ganzen offenbar dazu gehörigen Reihe eine besondere Untersuchung zu widmen. Diese wird uns auf einem Wege, der Willkür am meisten ausschliesst, auf einen vom gewöhnlichen Biela'schen verschiedenen Cometen führen.

Ein Blick auf die obigen Zusammenstellungen zeigt, dass die Sternschnuppenfälle der Jahre 524, 585, 837, 899, 1584—1586, und auch noch 1838 sich einer Periode von 62,6 Jahren mit befriedigender Genauigkeit fügen. Mit Rücksicht auf die neuere Reihe jedoch, in welcher auch weniger hervorragende Fälle Beachtung gefunden haben, während die älteren Berichte nur Das zu erwähnen pflegen, was Staunen und allgemeine Aufmerksamkeit erregte, wird man zu der Annahme geführt, dass jene 62,6 Jahre ein Vielfaches der eigentlichen Periode, und zwar das Neunfache, sind. Warum das Neunfache hier eine so hervorragende Rolle spielt, darüber wird der weitere Verlauf der Untersuchung einen Aufschluss geben. Unter Voraussetzung einer Periode von 6,947 und unter Zugrundelegung der Formel:

$$I = 524{,}4 + 6{,}947\,n$$

wobei *I*, auf Ganze abgerundet, die Jahr
der Epoche, *n* die Anzahl der seit dem
524 verflossenen Perioden vorstellt, wird
auf folgende, mit dem Material vergleic
Jahreszahlen geführt:

524	n.	Chr.
586	»	»
837	»	»
899	»	»
1587	»	»
1740	»	»
1796	»	»
1830	»	»
1837	»	»

Die Unterschiede gegen die wirklich
achteten Jahre überschreiten nicht die G
des Zulässigen, da die Zahl 6,947 der Pe
nur als ein Mittelwerth betrachtet werden
welcher länger andauernde Störungen erl
aus kürzeren Intervallen findet sich die Pe

von	524	bis 585	6,778
»	585	» 837	7,000
»	837	» 899	6,889
»	899	» 1585	6,921
»	1585	» 1741	7,091
»	1741	» 1838	6,929

Die Gestalt der Bahnen der Cometen
Meteore begünstigt das Zustandekommen
grossen Störungsgleichungen mit langen
den, indem die entwickelt gedachte Stör
Function auch für Glieder mit sehr hohen
ces noch beträchtliche Coefficienten haben
und darunter auch für solche, deren Indice

sserst nahe im Verhältniss der Umlaufszeiten von störendem und gestörtem Körper stehen. Man darf deshalb auch nicht erwarten, die Bewegung der Knotenlinie mit der Secularstörung derselben in Uebereinstimmung zu finden. Für den bekannten Meteorstrom der Leoniden oder den Cometen 1866 I. z. B., welcher retrograde Bewegung in der Bahn hat, also directe Secularbewegung der Knotenlinie, und zwar nach Adams von 2100″ haben müsste, wird eine directe Bewegung der Knotenlinie von 5240″ im Jahrhundert beobachtet. Der hier zu untersuchende Meteorstrom, leicht als von directer Bewegung in der Bahn zu erkennen, sollte deshalb bloss nach den zu berechnenden Secularstörungen beurtheilt, eine retrograde Bewegung der Knotenlinie haben, welche dem Effecte der Präcession entgegengesetzt wirkt; statt dessen ist eine directe Bewegung von jährlich nahezu 16″,4 vorhanden und der Sternschnuppenfall tritt im Mittel für jedes spätere Jahrhundert um 1,88 Tage später ein, wie das Resultat einer Ausgleichungsrechnung ergibt. Ich stelle nun die Epochen der Sternschnuppenfälle nach Jahr und Datum, wie sie unter Abwesenheit der Störungen und anderer Unregelmässigkeiten nach der zu verfolgenden Hypothese stattgefunden haben würden, zusammen, daneben die Epochen der wirklichen Beobachtungen

Rechn.			Beob.		
524	Nov.	9	524	Nov.	?
586	»	10	585	»	12
837	»	15	837	»	12
899	»	16	899	»	18
1587	»	30	1584	»	28
			1586	»	25

Rechn.			Beob.		
1740	Dec.	3	1741	»	5
1796	»	4	1798	»	6
1830	»	5	1830	»	7
1837	»	5	1838	»	7

Der im letzten Jahrhundert constant gebliebene Unterschied im Datum, 2 Tage betragend, wird wahrscheinlich durch lang andauernde Störungen verursacht. Bei der Berechnung der Bahn des Meteorstroms wird das ausgeglichene Datum vor dem beobachteten den Vorzug verdienen, da in dieser Beziehung die neueren Beobachtungen einen Vorrang vor den übrigen der Reihe nicht zu beanspruchen haben. Ich berechne demnach jetzt die Bahn des Meteorstroms oder entsprechenden Cometen aus dem Radiationspunkt $AR = 21^0$, Decl. $= +54^0$ (d. h. Länge $= 43^0 12'$, Breite $= +41^0 10$) so, als wenn der Sternschnuppenfall am 5. December 1838, 8 Uhr Abends stattgefunden hätte. Es erscheint mir das als eine Consequenz aus der Ausgleichung des Datums, die im Uebrigen von geringfügiger Bedeutung erscheint. Diese Grundlage der Rechnung führt nun auf folgendes System von Elementen

Perihel . . . 1838, . . . Dec. 24.508 Berl. Zt.

$\Omega = 352^0\ 16'$
$i = 16\ 53$ } Aequ. von 1838,0
$\pi = 99\ 46$
$e = 0{,}74157$
$\log a = 0{,}56120$
$U = 6{,}947$ $\quad \log q = 9{,}97354.$

Diese Elemente haben wegen ihrer Herleitung aus den doch höchst wahrscheinlich zu-

sammengehörigen Sternschnuppenfällen alter und neuer Zeit vorläufig am Meisten Anwartschaft darauf, für die des alten, vielleicht noch ganz ungetheilten, Biela-Cometen gehalten zu werden, wie sie denn auch mit den Elementen der beiden muthmasslichen Trümmer desselben, den Pogson'schen des Cometen 1818 I und denen des gewöhnlichen Biela'schen Cometen, fast gleich grosse Aehnlichkeit verrathen. Zur bequemeren Vergleichung mögen auch diese Elemente hier stehen, beziehungsweise bezogen auf die Aequinoctien von 1818,0 und 1832,0:

Comet 1818 I.	Comet von Biela.
$\Omega = 250^0\,4'$	$248^0\,14'$
$i = 20\;\;2$	$13\;\;10$
$\pi = 97\;\;7$	$108\;\;53$
$\log q = 9{,}86526$	$9{,}94416$
	$e = 0{,}75138$
	$U = 6{,}652$ Jahre.

Die obige Bahn des alten Biela-Cometen hat die zur Erklärung der Sonderstellung, welche die Reste desselben noch jetzt unter den Cometen einnehmen, sehr in Betrachtung kommende Eigenschaft einer ganz ungewöhnlichen Annäherung an die Bahn des Jupiter. Der Abstand des Cometen vom Jupiter findet sich nämlich, wenn die wahre Anomalie des Cometen $158^0 13'$, die des Planeten $246^0 1'$, gleich 0,089, d. h. nur $3\frac{1}{3}$ mal so gross, als der Abstand des vierten Satelliten vom Jupiter. Es ist mir ausser dem berühmten Cometen 1770 I kein anderes Beispiel einer so grossen Annäherung der Bahn an die des Jupiter bis jetzt bekannt.

Mit den durch Jupiter zu erleidenden grossen Störungen des Cometen scheint es im Zu-

sammenhang zu stehen, dass die älteren un
gewiss auch auffallendsten Sternschnuppenfäl
nur in Intervallen von etwa 62,6 Jahren od
einem Vielfachen davon wiederkehren; denn
lässt sich nicht annehmen, dass das Wetter zu
fällig immer nur in solchen Intervallen günsti
gewesen sei. Näherungsweise wenigstens sind
Umläufe des Cometen gleich 5 Umläufen de
Jupiter. Man darf übrigens auch hier nich
ausser Acht lassen, dass die gefundene Umlaufs
zeit von 6,947 nur einen Mittelwerth vorstelle
kann, der merklichen Variationen unterlieg
wozu auch die Erde nicht wenig beiträgt.

Die Cometen-Erscheinung des Jahres 524 n
Chr., die von dem Zeitgenossen so auffallende
weise in Zusammenhang mit dem einige Tag
oder Wochen später erfolgten ausserordentlic
reichen Sternschnuppenfall gebracht wird, er
weckt die Hoffnung, in alten Cometen-Erschei
nungen solche des Biela'schen wiederzuerkennen
Nach Wahrscheinlichkeitsgründen zu urtheile
würde unter $3\frac{6}{2}5$ Wiederkehren des Comete
durchschnittlich eine sich finden, bei welche
Erde und Comet weniger als 24 Stunden nac
einander den Durchschnittspunkt ihrer Bahne
passiren, d. h. die Sichtbarkeitsverhältnisse s
günstig sich gestalten könnten, dass selbst de
so sehr geschwächte Biela-Comet unserer Tag
dem unbewaffneten Auge recht gut wahrnehm
bar sein würde. In den einen viel grösseren
Zeitraum als 183 Umlaufe umfassenden Berich
ten über ältere Cometen-Erscheinungen zeichne
sich bekanntlich die chinesischen durch ihre Zu
verlässigkeit, auch in der Angabe von Date
und Oertern vortheilhaft aus. Von dem obige
Cometen des Jahres 524 n. Chr. existirt leide
eine solche Angabe nicht; er entzieht sich da

her der Vergleichung, obwohl er sehr nützlich war, zu constatiren, dass der betreffende Sternschnuppenfall von dem der Leoniden verschieden sei. Ist jener Comet selbst der Biela'sche gewesen, was ich wegen seiner zu langen Sichtbarkeit nicht glaube, so werden sich unter den Cometen-Erscheinungen aus den Monaten October, November und December der Pingré'schen Cometographie manche hierher gehörige verbergen.

Es fehlen aber eben bei den kleineren Erscheinungen meistens alle Ortsangaben zur weiteren Prüfung, daher man sich auf eine kleine Auslese etwas auffallenderer Erscheinungen beschränken muss. Mit grösserem Glanze wird der Biela'sche Comet auch in alter Zeit wohl nur dann aufgetreten sein können, wenn derselbe sehr wenige Tage vor oder nach der Erde durch die Linie seines niedersteigenden Knotens gegangen ist; oben haben wir gesehen, dass wir Aussicht haben mindestens auf eine solche Erscheinung des Cometen bei unseren Nachforschungen zu stossen. Unter bewandten Umständen können wir uns aber dieses Geschäft durch die Aufstellung gewisser sehr leicht und sicher zu handhabender Kriterien ungemein erleichtern. Durch die im Folgenden entwickelten Eigenschaften des geocentrischen Laufes werden wir nicht nur davon dispensirt, bei jeder hier in Betracht kommenden Erscheinung die Perihelzeit zu berechnen, oder doch wenigstens zu versuchen, ob der bei der Beobachtungsrichtung gelegene Punkt der Bahnebene auch ein Punkt der vom Cometen beschriebenen Ellipse ist; vielmehr sind wir im Stande, die Darstellbarkeit der Beobachtungen fast ohne alle Rechnung zu erkennen und die Wahrscheinlichkeit der Identität mit dem Biela'-

schen Cometen anzugeben. Der Nutzen der fo
genden Betrachtungen bleibt aber nicht auf die
sen concreten Fall beschränkt, sondern tritt na
mentlich hervor, wenn ein Sternschnuppenfa
von einiger Bedeutung Veranlassung bietet, di
zu einem kometenartigen Gebilde gesammelte
Körper am Fixsternenhimmel aufzusuchen; e
wird sich zeigen, wie man die Aussicht auf Er
folg so erheblich steigern kann, dass in Zukunf
auch etwas weniger reiche Fälle, welche nu
die Nachbarschaft einer starken Verdichtung an
deuten, in das Bereich solcher Nachforschunge
gezogen werden können*).

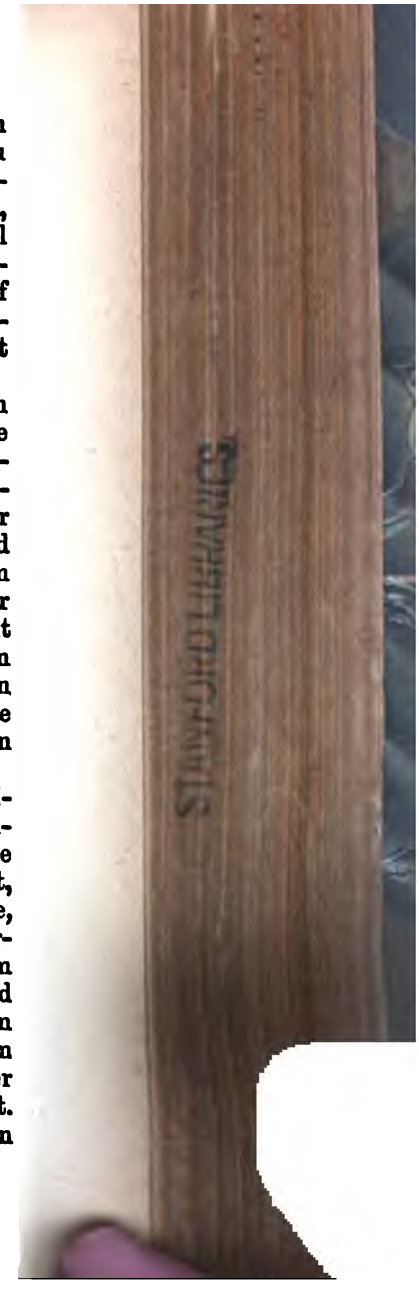
Die Wegstücke des Cometen und der Erde
hier sich schneidend, können während wenige
Tage als Elemente, d. h. als geradlinig mit con

*) Schon der 2. Januar dieses Jahres würde wiede
zu einer solchen Verfolgung Gelegenheit geboten haben
es wurde nämlich Freiherr v. Bönigk, am Morgen diese
Tages (astronimisch am 1. Januar, 18 Uhr mittl. Zeit)
im Wagen von Schloss Berlepsch nach hier zurückkeh
rend, von einem Sternschnuppenfall überrascht, den e
als an Glanz dem von ihm gesehenen des 27. Nov. vor
Jahres wenig nachstehend mir schilderte, und bei wel
chem die Meteore aus dem tiefen Südwesten oder Weste
zu kommen schienen. Wahrscheinlich hat demnach de
Neumayer'sche Radiationspunkt im Grossen Hund (A
$= 105°$, Decl. $= -27°$) in besonderer Stärke gespielt
Diese Mittheilung wurde mir jedoch erst acht Tage spä
ter; dagegen wurde ich schon am Neujahrs-Abend durch
den Castellan Heidorn auf die aussergewöhnliche Hellig
keit des Himmelsgrundes aufmerksam. Eine derartige
Helligkeit, vor, während oder nach einem reichen Stern
schnuppenfall ist nun von den verschiedensten Beobach
tern so häufig bemerkt worden, dass ich nach dieser
letzten Erfahrung darüber dieses Phänomen immer als
eine Aufforderung, eines Meteorregens gewärtig zu sein
auffassen werde, besonders zu denjenigen Zeiten des Jah
res, die sich durch Sternschnuppenfälle hervorthun, wie
der 2. Januar, 20. April u. a.

stanter Geschwindigkeit durchlaufen, angesehen werden. Es sind nun folgende drei Fälle zu unterscheiden: entweder die Erde geht gleichzeitig mit dem Cometen durch den Schnittpunkt, oder vorher, oder nachher. Den ersten Fall versinnlicht die Figur I, in welcher die sich entsprechenden Oerter von Comet und Erde auf den beiden Wegstücken C_0C_6 und T_0T_6 von Comet und Erde mit gleichen Ziffern bezeichnet sind.

Die Verbindungslinie C_0T_0, C_1T_1, C_2T_2 zielen nach dem Radiationspunkt der Divergenz, die Linien T_4C_4, T_5C_5, T_6C_6 nach dem Convergenzpunkte; alle diese Richtungen sind offenbar parallel, und man sieht also, dass der Comet vor dem Zusammentreffen mit der Erde in C_3 und T_3 im Radiationspunkt der Divergenz, nach dem Zusammentreffen im Convergenzpunkte stationär ist. Ferner: jene Verbindungslinien liegen mit C_0C_6 und T_0T_6 in einer Ebene, folglich liegen die beiden Radiationspunkte auf einem grössten Kreise der Himmelskugel, welcher durch die Zielpunkte der beiden Bewegungsrichtungen von Comet und Erde an dieser Stelle zu legen ist.

Figur II soll den Fall versinnlichen, in welchem die Erde vor dem Cometen den Durchschnittspunkt der Bahnen erreicht. Die Lage der Verbindungslinien T_0C_0, T_1C_1 u. s. w. zeigt, dass hier nicht, wie bei'm vorhergehenden Falle, die ganze geocentrische Bewegung von Divergenz- nach dem Convergenzpunkte in einem Sprunge gemacht wird, sondern allmälig, und zwar so, dass der geocentrische Ort zuerst in den Bogen eines grössten Kreises zwischen dem Divergenzpunkt und dem Gegenpunkt von der Richtung der Erdbewegung am Himmel fällt. Während des Durchgangs der Erde durch den



Schnittpunkt T_2, d. h. nach Schiaparelli's Th
rie, während des Sternschnuppenfalls, würde
Comet oder Meteorschwarm im Gegenpunkt
Richtung seines Elements, den wir einen Ant
pex nennen wollen, erscheinen. Bei günsti
Lage und Tageszeit würde also an diesem Or
zugleich mit dem Sternschnuppenfall, der Co
beobachtet werden können. Immer in dems
ben grössten Kreise fortschreitend, welcher du
den Radiationspunkt und den Zielpunkt und
genzielpunkt des Elements der Erdbewegung ge
überschreitet der geocentrische Ort in letzter
Punkte die Ekliptik, um, zuletzt gewissermass
asymptotisch, sich dem Convergenzpunkte
nähern, bis die Fehler unserer Annahme me
lich werden.

Der dritte Fall, in welchem die Erde n a
dem Cometen den Durchschnittspunkt passi
unterscheidet sich vom vorhergehenden dadur
dass der geocentrische Ort in dem genannt
grössten Kreise vom Divergenzpunkte aus in
entgegengesetzten Richtung sich bewegt, nä
lich die Ekliptik im Zielpunkt der Erdbewegu
dann seinen Apex überschreitet (wobei un
günstigen Umständen ein Sternschnuppenfall
beobachten ist) und von da, in bald langsam
werdendem Laufe, zum Convergenzpunkte ge

Uebrigens äussert sich der Fehler der A
nahme, dass Erdbahn und Cometenbahn ein
wirklichen Schnittpunkt haben, während n
von einem sehr kleinen Minimal-Abstand
Rede sein kann, in Abweichungen von dem
schriebenen geocentrischen Laufe. Diese A
weichungen sind Grössen von der Ordnung
Verhältnisses:

$$\frac{\text{Minimalabstand der Bahnen}}{\text{Distanz von der Erde}}.$$

Den Minimalabstand betrachten wir als eine kleine Grösse der zweiten Ordnung, die Distanz von der Erde aber im Allgemeinen als von der Ordnung der durchlaufenen Wege, folglich von der ersten Ordnung. Die Abweichungen von der Bewegung in jenem grössten Kreise sind in Allgemeinen kleine Grössen der ersten Ordnung und können nur dadurch, dass die Distanz von der zweiten Ordnung würde, zu Grössen der 0ten Ordnung werden.

Wenn ich bei diesen Betrachtungen vielleicht etwas zu weitläufig geworden bin, so scheint mir das wegen der nicht unwichtigen Folgerungen für die Praxis entschuldbar. Dass wir mit einem Cometen oder dem entsprechenden Meteorschwarm selbst in fast unmittelbare Berührung gerathen, der Art, dass ein Nachsuchen bei dem Convergenzpunkte sogleich Erfolg hat, wird aller Wahrscheinlichkeit nach recht selten vorkommen. Viel häufiger kann der Fall eintreten, dass wir in einem Sternschnuppenfall, dessen Glanz sich über das Mittel erhebt, die nahen Vorläufer oder Nachzügler eines solchen Gebildes treffen, die im Convergenzpunkt vereinigt doch nicht hinreichendes reflectirtes Sonnenlicht haben, um gesehen werden zu können; ein wahrnehmbares Object könnte dessenungeachtet gefunden werden, wenn das Nachsuchen auf Streifen jenes grössten Kreises ausgedehnt würde, welcher den Radiationspunkt mit einem von der Sonne nahezu 90° entfernten Ort der Ekliptik verbindet. Wenn man, wie gewöhnlich bei Nachforschungen solcher Art, eine bestimmte Vermuthung über die Bahn hat, ist es nützlich daran zu denken, dass während des Sternschnuppenfalls selbst der Comet entweder in seinem Apex oder in seinem Antiapex zu su-

chen ist. Der Comet geht durch den Apex o d e
durch den Antiapex, niemals aber durch beid
dieser Punkte, und man kann von vornherei
nicht wissen, durch welchen derselben der We
genommen wird. Desgleichen nähert sich de
Comet einige Zeit nach dem Sternschnuppenfa
dem Convergenzpunkte, nur kann man nich
wissen, von welcher Seite her in genannte
grösstem Kreise dies geschieht. Bei telegraph
schen Aufforderungen zu Nachforschungen di
ser Art könnte es sich in Zukunft von selb
verstehen, dass eventuell einige Nächte zu be
den Seiten des Convergenzpunktes gesucht wir
weil es das Object schliesslich in dieses Revie
eintreten muss. Ob es hell genug sein wir
kann freilich erst der Enderfolg des Suchen
lehren.

Ich wende mich jetzt zu dem Versuche, ein
alte Erscheinung des Bielaschen Cometen au
zufinden, zurück und werde zu dem Zweck
die Kriterien anführen, die wenn sie in ihre
Gesammtheit zutreffen, zu der Behauptung be
rechtigen, die Erscheinung habe wirklich jene
Cometen angehört, oder der Zufall habe in höchs
unwahrscheinlicher Weise sein Spiel getrieben
Nach dem Vorhergenden wird nämlich gefordert

1) dass der geocentrische Lauf in einem durch
den Radiationspunkt zu legenden grösste
Kreise vor sich gehe,

davon unabhängig:

2) dass die Bewegung die Ekliptik in einem
Punkte treffe, der 90° von der Sonn
absteht,
3) soll die Bewegung in dem Sinne, von
Divergenz- nach dem Convergenzpunkte
stattfinden.
4) dass zu der Zeit der Beobachtung di

Erde wirklich dem Schnittpunkte der Bahnen sehr nahe gewesen sei.

5) dass auch der Comet diesem Schnittpunkte nahe gewesen sein könne, d. h. das Jahr eine Wiederkehr enthalten haben könne.

Kriterium 5) hat hier, bei einer Umlaufszeit von nur 7 Jahren keinen Werth, da das Maximum einer möglichen Abweichung von der mittleren Epoche ja überhaupt kaum $3\frac{1}{2}$ Jahr betragen kann.

Kriterium 1) und 2) dagegen werden, schon jedes für sich, nicht leicht durch blossen Zufall erfüllt sein, noch ungleich seltener ihre Combition.

Offenbar ist aber auch die Forderung 4) von grosser Bedeutung. Denn es können ja 1) und 2) beide erfüllt sein, aber dies zu einer Jahreszeit, wo die Erde weit von dem Durchschnittspunkte entfernt ist, und es ist sehr unwahrscheinlich, dass der Zufall sich unter allen Zeiten des Jahres gerade die wenigen Tage aussuchen sollte, die hier allein in Betracht kommen.

1) und 2) in ihrer Combination lassen sich in die eine Forderung zusammenziehen, dass der Pol des geocentrischen Laufes mit dem Pole des den Radiationspunkt treffenden und die Ekliptik unter der Länge $90^0 + \Omega$ schneidenden Kreises zusammenfallen muss. Wird der gegenseitige Abstand dieser Pole, unter Berücksichtigung der wahrscheinlichen Beobachtungsfehler gleich ε gefunden, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass dies durch Zufall geschehen, gleich dem Quotienten: Oberfläche einer Kugel-Calotte von der Höhe $1 - \cos\varepsilon$, dividirt durch die Kugelfläche, d. h. gleich

$$2 \sin \tfrac{1}{2} \varepsilon^2.$$

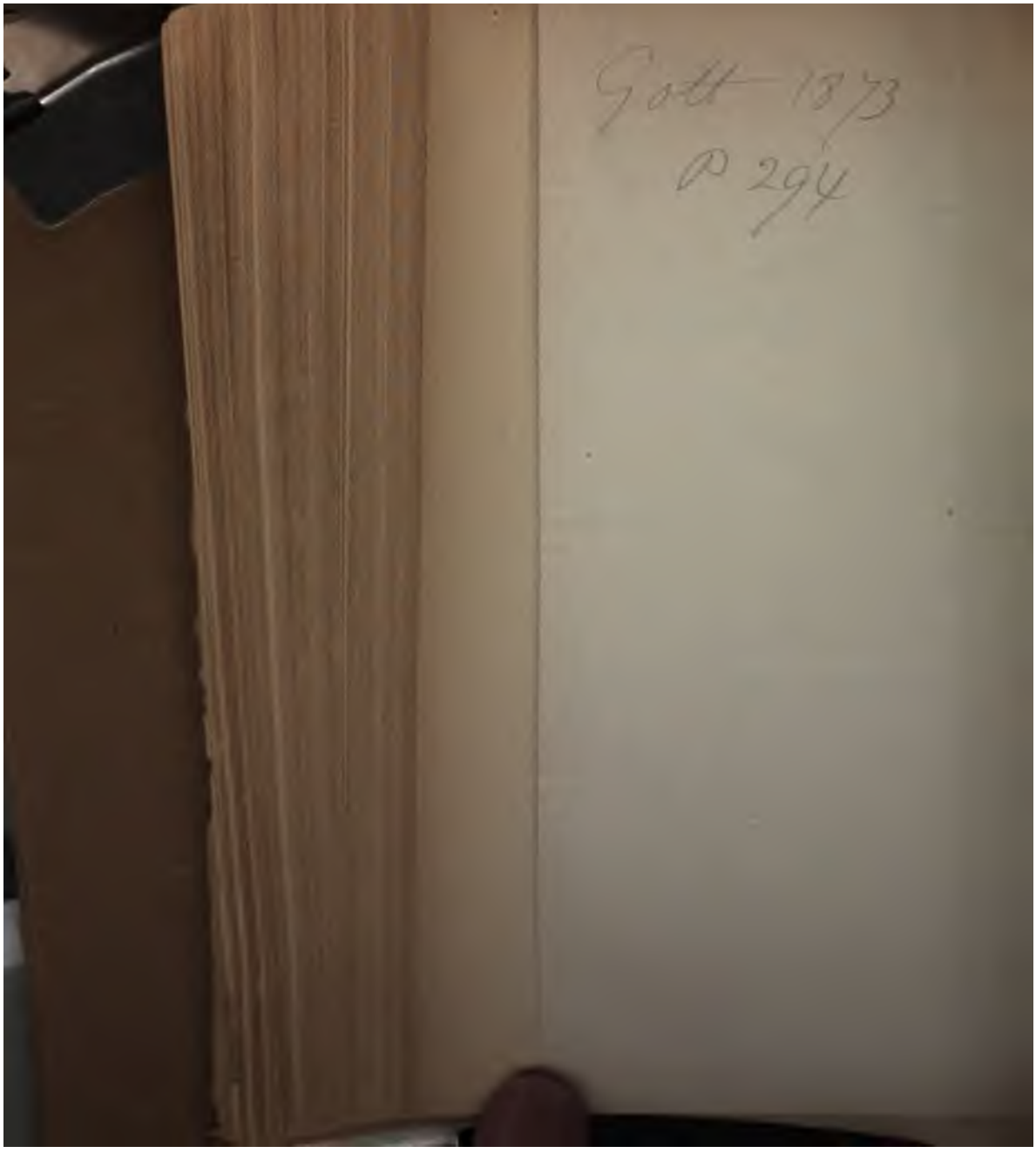
erreicht, als überschritten wird, für welchen a
die Wahrscheinlichkeit bei der einzelnen B
obachtung $= \frac{1}{2}$ wird, sonach die Wahrschei
lichkeit w, dass er überhaupt vorkommen kön
zur Gewissheit d. h $= 1$*). Es ist ebenso gro
Wahrscheinlichkeit dafür vorhanden, dass g
ssere Genauigkeit der Beobachtungen ihn v
ringern würde, als für seine Steigerung. — W
haben nun noch n zu schätzen. Die chinesisch
Beobachtungen, welche Pingré dem Gaubil'sch
Manuscripte entnommen, befolgen in der Re
die löbliche Gewohnheit, zu einem zweiten od
dritten Orte auch das zweite oder dritte Dat
anzugeben, falls die Zeit-Intervalle auch nur
nige Bedeutung haben; wenigstens wird
Dauer der Erscheinung, wenn sie einigermass
erheblich war, bemerkt. In der obigen No
nun wird die Erscheinung des Cometen 11
beinahe wie für ein einziges Datum geltend
handelt, was eine Sichtbarkeit von sehr kurz
Dauer andeutet. Die Vermuthung würde n
nicht ganz unbegründet erscheinen, dass d
Comet am Abend des 20. November gegen
oder 6 Uhr über dem Antiapex seiner Bah
mit der oben geschätzten Breite zuerst gesehe
wurde, dass am darauf folgenden Vormittage d
Erde durch Knotenlinie und Meteorstrom gin
wobei dann der Comet den Antiapex, dess
nördliche Breite etwa 16° ist, überschritten h
und dass am Abend des 21. der Comet sch
die Ekliptik erreichte. Dieser sehr plausibl

*) Man kann, um den Anschein eines logischen Z
kels zu vermeiden, auch so schliessen: sind instrume
telle Gründe zur Begrenzung des Fehlers nicht vo
handen, so ist die Wahrscheinlichkeit der Identität, w
sie sich aus den andern Gründen findet, allein mas
gebend.

Ant

An

n
e
l
r
e
n
n
O
n
s
n
e.
t
e
h
i


Gott 1873
p 294

Annahme würde der Werth $n < 1$ entsprechen. Statt dessen nehme ich, sehr zu Ungunsten meiner Hypothese, $n = 7$; denn es lässt sich in der That nicht annehmen, dass bei solcher Dauer der Bericht nicht noch ein zweites Datum, etwa das des letzten Gesehenwerdens, erwähnen sollte.

Mit diesem Werthe von n wird nun die Wahrscheinlichkeit der Identität des Cometen von 1162 mit dem alten Biela'schen gleich

$$\frac{2598}{2599}$$

gefunden, d. h. unter je 2599 Fällen eines gleich guten Zusammentreffens, wird die untersuchte Erscheinung durchschnittlich nur ein einziges Mal ein anderer als der Biela'sche Comet sein. In der benutzten Notiz wird die Bezeichnung »grande Étoile« auf den Cometen angewandt; nach dem Sprachgebrauch kann das heissen »hell«, es kann aber auch heissen »gross«, d. h. von bedeutendem Durchmesser. Schreibt man dem Biela'schen Cometen einen Durchmesser von 5000 geogr. Meilen zu, so kann derselbe bei einer Distanz von $\frac{1}{2}$ Million Meilen, den scheinbaren Durchmesser der Mondscheibe erlangen, so dass die Bezeichnung als »grande« im eigentlichen Sinne des Wortes sehr passend erscheinen würde. Bei ähnlicher Annäherung könnte uns noch jetzt der Biela'sche Comet als Stern 3. bis 4. Grösse mit merklichem Schweife erscheinen.

Die Herrn Professoren Waitz und Wüstenfeld hatten die Freundlichkeit, mir ebenfalls Notizen aus alten Quellen zu geben. Es hat sich darunter zwar ebensowenig, wie sonst noch bei Pingré, etwas auf den Biela'schen Cometen Bezügliches gefunden, welches Stoff zu einer Be-

handlung in obiger Art lieferte, dagegen andere sehr interessante Notizen, darunter eine über ein Maximum des April-Sternschnuppenfalles, welche die Kenntnisse über diesen Fall und den Urheber desselben, den Cometen 1861 I, sehr zu fördern verspricht.

Göttingen am 1. März 1873.

Universität.

Philosophische Fakultät.

Preisaufgabe der Beneke'schen Stiftung für das Jahr 1875—76.

Da die von deutschen Sprachforschern in den letzten fünf und zwanzig Jahren veröffentlichten Untersuchungen über die Entstehung der Sprache zu sehr verschiedenen Ergebnissen gelangt sind und auf die Schwierigkeiten der Aufgabe mehr hinweisen als sie überwinden, so erscheint es wünschenswerth die Frage einer sorgsamen Erwägung zu unterziehen: ob die Sprachwissenschaft für Untersuchungen dieser Art einen festen Ausgangspunkt und einen gesicherten Boden darbietet.

Die philosophische Fakultät der Georgia-Augusta verlangt daher als Lösung der von ihr für das Jahr 1873 zu stellenden Preisaufgabe der Beneke'schen Stiftung eine übersichtliche Darstellung der neueren auf die Entstehung der Sprache sich beziehenden Untersuchungen und

zugleich eine Nachweisung und Beurtheilung der sprachwissenschaftlichen Begründung ihrer Ergebnisse in der Richtung und zu dem Zwecke, dass eine Antwort auf folgende Fragen gesucht wird:

1) Vermag die Sprachwissenschaft allgemeine Gesetze nachzuweisen, nach denen die Entstehung der inneren Sprachform, d. h. derjenigen Formirung der Vorstellungsinhalte und ihrer Verknüpfungsweisen erfolgt, durch welche dieselben fähig werden, durch Worte, Flexionen der Worte und ihre Verbindungen ausgedrückt zu werden? Und wenn solche Gesetze nachgewiesen werden können, sind sie identisch für die menschliche Natur überhaupt oder variiren sie innerhalb gewisser Grenzen nach Anlage und geschichtlicher Entwickelung?

2) Lässt sich durch Vergleichung des sprachwissenschaftlichen Materials auf gewisse Gesetze zurückschliessen, nach denen zu der inneren Sprachform die äussere Lautform tritt, so dass bestimmten Vorstellungsinhalten und der Art, wie sie innerlich gefasst sind, bestimmte lautliche Ausdrücke, und bestimmten Verknüpfungsweisen der Vorstellungsinhalte bestimmte Kombinationen der Laute entsprechen? Wenn solche Gesetze aufgefunden werden können, ändern sich in Uebereinstimmung mit ihnen diese lautlichen Formen in den einmal bestehenden Sprachen, sobald diese in Dialekte auseinandergehen oder die Grundlage für neue Sprachgestaltungen darbieten, und lässt sich der Einfluss erkennen und nachweisen, den äussere Bedingungen der Organisation, des Klima u. s. w. auf diese Veränderung ausüben?

Die Bearbeitungen dieser Aufgabe sind bis

STANFORD LIBRARIES

zum 31. August 1875 dem Dekan der philosophischen Fakultät zu Göttingen in deutscher, lateinischer, französischer oder englischer Sprache einzureichen. Jede eingesandte Arbeit muss mit einem Motto und mit einem versiegelten den Namen und die Adresse des Verfassers enthaltenden Couvert, welches dasselbe Motto trägt, versehen sein.

Der erste Preis wird mit 500 Thlr. Gold in Friedrichsd'or, der zweite mit 200 Thlr. Gold in Friedrichsd'or honorirt.

Die Verleihung der Preise findet im Jahre 1876 am 11. März, dem Geburtstage des Stifters, in öffentlicher Sitzung der Fakultät statt.

Gekrönte Arbeiten bleiben unbeschränktes Eigenthum ihrer Verfasser.

Göttingen, 2. April 1873.

F. Bartling, d. z. Dekan.

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

7. Mai. № 11. 1873.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Zur Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung.

Von

Prof. **A. Mayer** in Leipzig, corresp. Mitgliede.

Die folgende Mittheilung bezweckt, zwei für die Integration der partiellen Differentialgleichungen 1. O. sehr wichtige Bemerkungen, die beide von Herrn Lie herrühren, näher zu begründen, resp. zu formuliren. Die erste betrifft die Ausdehnung, die der Cauchy'schen Integrationsmethode durch Lie gegeben worden ist, und findet sich in diesen Nachrichten 1872, p. 488. Die zweite, welche einen, den neueren Integrationsmethoden zur Zeit noch anhaftenden Mangel beseitigt, verdanke ich einer brieflichen Mittheilung von Lie. Wegen der Sätze und Definitionen, die im Folgenden zu Grunde gelegt werden, muss ich auf meinen Aufsatz »Die Lie'sche Integrationsmethode der partiellen Differentialgleichungen 1. O.«, Math. Annal. Bd. VI verweisen, dessen Druck nur durch den inzwischen eingetretenen Strike unterbrochen worden ist. —

I. Lie's Erweiterung der Cauchy'schen Methode.

Man kann dieser Ausdehnung der Cauchy'schen Methode, für die bisher die algebraischen Formeln noch fehlten, den folgenden Ausdruck geben:

Die simultane Integration des Jacobi'schen Systems von $m-1$ partiellen Differentialgleichungen:

$$\frac{dV}{dq_1} = F_1, \quad \frac{dV}{dq_2} = F_2, \quad \cdots \quad \frac{dV}{dq_{m-1}} = F_{m-1},$$

deren rechte Seiten gegebene Functionen von $q_1\, q_2 \cdots q_n$,

$$p_m = \frac{dV}{dq_m}, \quad \cdots \quad p_n = \frac{dV}{dq_n}$$

sind, (zwischen denen bekannte identische Relationen bestehen) lässt sich zurückführen auf die Ermittelung aller $2(n-m+1)$ gemeinsamen Lösungen der $m-1$ linearen Gleichungen:

$$\frac{df}{dq_i} + \sum_{h=m}^{h=n} \left(\frac{dF_i}{dq_h} \frac{df}{dp_h} - \frac{dF_i}{dq_h} \frac{df}{dp_h} \right) = 0.$$

Sind nämlich:

$$f = f_1, \; f_2, \; \cdots \; f_{2(n-m+1)}$$

diese gemeinsamen Lösungen, $a_1 \ldots a_{m-1}$ unbestimmte Constante und wird durch den oberen Index a angezeigt, dass gleichzeitig

$$q_1 = a_1, \ldots q_{m-1} = a_{m-1}$$

$$q_m = \alpha_m, \ldots q_n = \alpha_n, \; p_m = \beta_m, \ldots p_n = \beta_n$$

gesetzt werden soll, so drücke man aus den $2(n-m+1)$ Gleichungen:

$$f_1 = f_1^a, \ldots f_{2(n-m+1)} = f_{2(n-m+1)}^a$$

die Variabeln $q_m \ldots q_n \; p_m \ldots p_n$ durch $q_1 \ldots q_{m-1}$ und die willkürlichen Constanten $\alpha_m \ldots \alpha_n \; \beta_m \ldots \beta_n$ aus, wodurch man erhalten möge:

$$q_h = [q_h], \; p_h = [p_h].$$

Man berechne hierauf durch Ausführung der Quadraturen:

$$V = \sum_{h=m}^{h=n} \alpha_h \beta_h + \sum_{i=1}^{i=m-1} \int_{a_i}^{q_i} Q_i^{i-1} \, dq_i$$

als Function derselben Grössen. Unter Q_i^{i-1} wird der Ausdruck verstanden, der aus

$$Q_i = [F_i - \sum_{h=m}^{h=n} p_h \frac{dF_i}{dp_h}]$$

— die [ ] soll die Substitution der obigen We
the von $q_m \ldots q_n\ p_m \ldots p_n$ andeuten —
durch die Substitutionen

$$q_1 = a_1,\ q_2 = a_2,\ \ldots\ q_{i-1} = a_{i-1}$$

hervorgeht. Eliminirt man endlich au
dem erhaltenen Werthe von V die Grö
ssen $\alpha_m \ldots \alpha_n$ mit Hülfe der $n-m+$
Gleichungen $[q_h] = q_h$, so ist die resulti
rende Function V von $q_1 \ldots q_n\ \beta_m \ldots \beta$
eine gemeinsame vollständige Lösung
des vorgelegten Jacobi'schen Systems

Ich habe diesen Satz hier in derjenigen Form
ausgesprochen, in der er sich sofort als direkte
Ausdehnung der Cauchy'schen Integrationsre-
gel in ihrer einfachsten Gestalt, wie ich sie Ma-
them. Annal. Bd. III, p. 444 angegeben habe,
zu erkennen giebt. Beide Sätze fallen zusam-
men, wenn man im vorliegenden $m = 2$ setzt,
und die Betrachtungen, durch welche derselbe
bewiesen wird, sind so vollkommen analog dem
dort benutzten Raisonnement, dass es wohl un-
nöthig sein dürfte, näher auf dieselben einzuge-
hen. Es wird genügen, darauf hinzuweisen, dass
die im vorstehenden Satze erhaltenen Werthe
von $q_m \ldots q_n\ p_m \ldots p_n$ vollständige Lösungen
sind für jedes der $m-1$ Systeme von $2(n-m+1)$
gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$\frac{dq_h}{dq_i} = -\frac{dF_i}{dp_h}, \quad \frac{dp_h}{dq_i} = \frac{dF_i}{dq_h}.$$

Der einzige Punkt, der ein wesentlich neues Moment bildet, ist der Beweis, dass der Ausdruck

$$Q_1 dq_1 + Q_2 dq_2 \ldots . Q_{m-1} dq_{m-1}$$

ein vollständiges Differential ist. Die Integrabilitätsbedingungen

$$\frac{dQ_k}{dq_i} - \frac{dQ_i}{dq_k} = 0$$

lassen sich aber sogleich als Folgen der Identitäten erkennen, die zwischen je zwei der Functionen $F_1 \ldots F_{m-1}$ bestehen müssen, damit das gegebene System partieller Differentialgleichungen ein Jacobisches sei.

Zur Integration dieses Differentiales ist im Satze selbst die alte Cauchy'sche Formel benutzt worden, weil diese das Integral unmittelbar in derjenigen Form giebt, die sich für die zum Beweis erforderlichen Rechnungen am bequemsten eignet. Es versteht sich aber von selbst, dass man statt derselben auch die Dubois-Reymond'sche Formel anwenden kann, und wenn man dies thut, so weist die hierdurch erhaltene Form des Satzes ganz von selbst darauf hin, dass derselbe auch noch eines anderen, ungleich interessanteren Ausdruckes fähig ist. Diese andere Fassung des Satzes, die ich im Nachtrage zu der oben citirten Abhandlung ab-

leite, ist das allgemeine Lie'sche Fundament
theorem.

II. Ueber eine Unvollkommenheit d
neueren Integrationsmethoden un
deren Abhülfe.

Bei der neuen Jacobi'schen Integratio
methode der partiellen Differentialgleichungen
O. sucht man zuerst die gegebene Gleichung
rückzuführen auf ein Jacobi'sches System
2 partiellen Differentialgleichungen, dieses w
der auf ein Jacobi'sches System von 3 Gleichu
gen u. s. w., bis schliesslich, nachdem man
einem Jacobischen System von ebensoviel Gl
chungen gelangt ist, als die gegebene Gleichu
partielle Differentialquotienten der unbekannt
Function enthält, das ganze Integrationsgesch
beendet ist und eine einfache Quadratur die
suchte vollständige Lösung liefert. Man ka
es daher als die Fundamentalaufgabe der Ja
bi'schen Methode betrachten, ein gegebenes
cobi'sches System von $m-1$ partiellen Differe
tialgleichungen zurückzuführen auf ein Jacob
sches System von m Gleichungen. Diese Z
rückführung wird bekanntlich vermittelt dur
ein Jacobisches System von $m-1$ linearen Gl
chungen, von denen man nur eine gemeinsa
Lösung zu kennen braucht. Allein nicht je
beliebige Lösung dieses linearen Systems kon
bisher zu diesem Zwecke verwendet werden.
musste vielmehr, um die geforderte Reducti
damit bewirken zu können, die Lösung weni
stens eine derjenigen Variabeln p enthalt
welche ursprünglich die partiellen Differenti
quotienten der unbekannten Function darstell

Welche Methode man aber auch zur Auffindung der gemeinsamen Lösung eines solchen linearen Jacobi'schen Systems anwenden mag, bei keiner ist man a priori sicher, dass die Lösung, zu der man schliesslich gelangt, nicht gerade jener unbrauchbaren Classe von Lösungen angehört.

Es war daher diese Forderung einer Lösung, in welcher die Variabeln p nicht gänzlich fehlen, noch eine empfindliche Unvollkommenheit der Methode, und wenn man auch im Allgemeinen die Anzahl von Integralen angeben konnte, auf deren Ermittelung die vollständige Integration einer gegebenen partiellen Differentialgleichung zurückkommt, so galt diese Angabe doch immer nur unter der stillschweigenden Voraussetzung, dass man nicht irgendwo unterwegs auf eine solche Ausnahmelösung stiesse.

Dieselbe Unvollkommenheit haftet auch meiner Darstellung der Lie'schen Methode noch an, nur dass sie bei der verhältnissmässig weit grösseren Einfachheit der Operationen dort nicht so störend hervortritt, wie bei der Jacobi'schen Methode. Man führt dort die gegebene partielle Differentialgleichung mit n unabhängigen Variabeln vermöge der Lösung einer einzigen linearen Gleichung zurück auf eine partielle Differentialgleichung mit nur noch $n-1$ unabhängigen Variabeln, diese in ganz derselben Weise wieder auf eine solche mit nur noch $n-2$ Variabeln u. s. f., so dass man an Stelle der linearen Jacobischen Systeme der Jacobischen Methode stets nur einzelne lineare Gleichungen zu betrachten hat. Immer aber braucht man von den auftretenden linearen Gleichungen eine Lösung, die nicht frei ist von sämmtlichen Variabeln p.

Es ist daher eine Bemerkung von nicht zu

unterschätzender Wichtigkeit, dass man sich von dieser lästigen Beschränkung ganz befreien und aus einer Lösung der in Rede stehenden linearen Systeme oder Gleichungen, in der keine der partiellen Differentialquotienten vorkommt denselben Nutzen ziehen kann, wie aus einer welche die p enthält. Herr Lie ist durch seine Erweiterung des Begriffes der vollständigen Lösung*) auf diese Entdeckung geführt worden die — nach brieflicher Mittheilung — sich bei seiner Betrachtungsweise als eine nothwendige und naturgemässe Folge dieser Erweiterung ergiebt**). Der Satz lässt sich aber — und dies soll eben im Folgenden angezeigt werden — auch unter Beibehaltung der alten, engeren Definition der vollständigen Lösung auf einfachem Wege beweisen.

Sobald nämlich ein Jacobisches System von $m-1$ partiellen Differentialgleichungen vorliegt:

$$1) \quad \frac{V}{dq_i} = F_i(q_1 \dots q_{m-1}\, q_m \dots q_n\, p_m \dots p_n),$$

wo $i = 1, 2, \dots m-1$ und allgemein $p_h = \frac{dV}{dq_h}$ ist, und man kennt von den $m-1$ linearen Gleichungen:

*) Diese Nachrichten 1872 p. 481.

**) Eine von Christiania aus bereits angekündigte grössere Abhandlung, die neben einer sehr interessanten Reihe von neuen Untersuchungen namentlich auch eine eingehende Darstellung der ganzen Lie'schen Betrachtungsweise bringen soll, wird jedenfalls auch diesen wichtigen Punkt näher erörtern.

$$2) \quad \frac{df}{dq_i} + \sum_{h=m}^{h=n} \left(\frac{dF_i}{dq_h} \frac{df}{dp_h} - \frac{dF_i}{dp_h} \frac{df}{dq_h} \right) = 0$$

irgend eine gemeinsame Lösung, in der die Variabeln $p_m \ldots p_n$ nicht gänzlich fehlen, so ist — nach der Jacobi'schen Theorie — damit das System 1) zurückgeführt auf ein Jacobisches System von m Gleichungen, welches man erhält, wenn man die Gleichung $f = \text{const.}$ nach irgend einer der Grössen $p_m \ldots p_n$ auflöst und diese Auflösung in die Gleichungen 1) substituirt.

Nun ergiebt sich aber aus Satz II*) der Abhandlung, auf die ich oben verwiesen habe, wenn man dort

$$\varphi = c_m q_m + \ldots . c_n q_n$$

nimmt, dass das Jacobische System 1) äquivalent ist dem folgenden:

$$3) \quad \frac{dW}{dq_i} = -F_i \left(q_1 \ldots q_{m-1} \frac{dW}{dc_m} \ldots \frac{dW}{dc_n} c_m \ldots c_n \right),$$

in der Art, dass man aus einer beliebigen vollständigen Lösung des Systems 3) durch blosse algebraische Operationen eine vollständige Lösung des Systems 1) erhalten kann.

Man hat, wenn

$$W = \vartheta (q_1 \ldots q_{m-1} c_m \ldots c_n \beta_m \ldots \beta_n)$$

*) Dieser Satz ist im Grunde selbst wieder nur eine andere Fassung des Satzes 4), in meiner Mittheilung vom 21. Aug. 1872, mit dem er für $m = 2$ zusammenfällt.

irgend eine, in Bezug auf $c_m \dots c_n$ vollständig Lösung des Jacobischen Sysiems 3) ist und unter ϑ_a der Ausdruck

$$\vartheta_a = \vartheta(a_1 \dots a_{m-1}\, a_m \dots a_n \beta_m \dots \beta_n)$$

verstanden wird, nur

$$V = \vartheta_a - \vartheta + c_m q_m + \dots c_n q_n$$

zu setzen und hieraus die Variabeln $c_m \dots c_n$ sowie die willkürlichen Constanten $\beta_m \dots \beta_n$ mit Hülfe der $2(n-m+1)$ Gleichungen zu eliminiren:

$$\frac{d\vartheta}{d\beta_k} = \frac{d\vartheta_a}{d\beta_k}, \quad \frac{d\vartheta}{dc_k} = q_k.$$

Man kann daher das Jacobi'sche System 1) ersetzen durch das transformirte 3). Dies letztere stellt sich aber, wenn man allgemein:

$$\frac{dW}{dc_h} = \gamma_h, \quad F_i = -\Phi_i$$

setzt, also dar:

$$4) \quad \frac{dW}{dq_i} = \Phi_i(q_1 \dots q_{m-1}\, \gamma_m \dots \gamma_n\, c_m \dots c_n)$$

Die rechten Seiten seiner Gleichungen entstehen somit aus den rechten Seiten der entsprechenden Gleichungen 1), wenn man resp.

$$q_m \cdots q_n \; p_m \cdots p_n \text{ und } F_i$$

mit

$$\gamma_m \cdots \gamma_n \; c_m \cdots c_n \text{ und } -\Phi_i$$

vertauscht.

Durch dieselbe Vertauschung verwandeln sich aber die Gleichungen 2) in die folgenden:

$$5) \quad \frac{df}{dq_i} + \sum_{h=m}^{n=h} \left(\frac{d\Phi_i}{dc_h} \frac{df}{d\gamma_h} - \frac{d\Phi_i}{d\gamma_h} \frac{df}{dc_h} \right) = 0,$$

welche für das transformirte Jacobi'sche System 4) dieselbe Rolle spielen, wie die Gleichungen 2) für das gegebene 1).

Damit ist aber der Lie'sche Satz bewiesen, d. h. gezeigt, dass das Jacobische System 1) sich immer zurückführen lässt auf ein Jacobisches System von m Gleichungen, sobald man nur irgend eine gemeinsame Lösung f der $m-1$ Gleichungen 2) kennt, gleichviel ob diese Lösung die Variabeln p enthält oder nicht. Denn keine gemeinsame Lösung der Gleichungen 2) kann eine blosse Function von $q_1 \; q_2 \cdots q_{m-1}$ sein. Hat man daher gerade eine solche Lösung dieser Gleichungen erhalten, in der kein p vorkommt, so entsteht doch aus derselben durch die obige Vertauschung eine gemeinsame Lösung der $m-1$ Gleichungen 5), die nothwendig wenigstens einen der Differentialquotienten $\gamma_m \cdots \gamma_n$ enthalten muss. Durch eine solche Lösung der Gleichungen 5) aber wird das transformirte Jacobische System 4) und damit also auch das gegebene 1) zurückgeführt auf ein Jacobisches System von m Gleichungen. —

Um das Vorhergehende speciell auf die Lie'sche Methode anzuwenden, braucht man nur $m = 2$ zu nehmen. —

Leipzig, 28. März 1873.

Verzeichniss der bei der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangenen Druckschriften.

Februar 1873.

(Fortsetzung).

Sitzungsberichte der physical.-medicin. Societät zu Erlangen. Heft 4. Nov. 1871 bis Aug. 1872. Ebd. 1872. 8.

Proceedings of the american pharmaceut. Association at the 20th annual meeting held in Cleveland, Ohio. Also the constitution and roll of members. Philadelphia 1873. 8.

Pubblicazioni del reale osservatorio di brera in Milano Nr. I: G. Celoria, Sul grande commovimento atmosferico av. il I. di Agosto 1872 nella Bassa Lombardia e nella Lomelina. Con una tav. lit. Milano 1873. 4.

Jahrbuch der k. k. geolog. Reichsanstalt. Jahrg. 1872. Bd. XXII. Nr. 4. Oct. Nov. Dec. Mit Taf. XVI—XVII. Wien. gr. 8.

Verhandlungen der k. k. geolog. Reichsanstalt. Nr. 14. 1872. gr. 8.

A. Senoner, Generalregister der Bände XI—XX des Jahrbuches u. der Jahrgänge 1860—1870 der Verhandlungen der geolog. Reichsanstalt. Wien 1872. gr. 8.

Berichte über die Verhandlungen der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Philologisch-Historische Classe. 22. Band. 1870. I. II. III. 23. Band. 1871.

Bulletin de la société mathématique de France. Tome I. Nr. 1. Paris 1873.

(Fortsetzung folgt).

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

21. Mai. № 12. 1873.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 3. Mai.

Marx, Kasper Hofmann, ein deutscher Kämpfer für den Humanismus in der Medicin. (Erscheint in den Abhandlungen).

Wüstenfeld, zur Geographie des Gebietes von Medina. (Ersch. in den Abh.).

Stern, Mittheilung des Hrn. Prof. Sturm über das Problem der räumlichen Projectivität.

Klinkerfues, über Fixstern-Systeme, Parallaxen und Bewegungen. (Ersch. in den Abh.).

Wöhler legt drei von Dr. Tollens eingereichte Aufsätze vor (über Monobromacrylsäure, Bibrompropionsäure und Diallyl).

Das Problem der räumlichen Projectivität.

Von

Prof. **Rud. Sturm** in Darmstadt.

Unter dem genannten Probleme ist folgendes zu verstehen: Gegeben sind im Raume zwei Gruppen von gleich vielen

Punkten, welche einander entsprechend (homolog) zugeordnet sind; solche entsprechende (correspondirende) Geraden zu finden, welche bez. mit den Punkten der einen und der andern Gruppe verbunden projectivische Ebenenwürfe liefern, in denen die nach homologen Punkten gehenden Ebenen entsprechend sind, und die Vertheilung dieser Geraden im Raume zu discutiren.

1. Es bestehen die beiden Gruppen A^4 und B^4 aus je 4 Punkten: A_1, A_2, A_3, A_4; B_1, B_2, B_3, B_4; so correspondirt jeder Geraden a, die der ersteren Gruppe zugeordnet ist[1]), ein Complex 2. Grades $\mathfrak{B}$, zu dem die Strahlenbündel der 4 Punkte B_i (Hauptpunkte) und die Geradenfelder der 4 Ebenen β_{ikl}, welche je 3 der Hauptpunkte B verbinden, (Hauptebenen) ganz gehören †[2]). Die Gerade a gehört selbst zu einem Complexe 2. Grades $\mathfrak{A}$ (der ihr »adjungirt« ist), von welchem jede Gerade an Stelle von a treten kann, ohne an $\mathfrak{B}$ etwas zu ändern. Beide Complexe mögen analog heissen. Diese Complexe sind Reyesche[3]) Complexe, die auch, weil ihre Singularitätenfläche ein Tetraeder ist, *tetraedrale* genannt werden.

1) Alles der ersteren Gruppe zugeordnete, im ersteren Raume befindliche soll durch a in verschiedenen Alphabeten, alles der zweiten Gruppe zugeordnete, im zweiten Raume befindliche durch b bezeichnet werden. Es ist ersichtlich, dass die beiden Buchstaben stets vertauscht werden können.

2) Die vier mit † bezeichneten Sätze sind schon durch Herrn H. Müller Math. Ann. Bd. 1 S. 413 gefunden.

3) Reye, Geom. der Lage, II, S. 117 und Journ. für Math. Bd. 74, S. 10.

Alle Geraden $(c)_4$ des Raumes, welche mit A^4 und B^4 projectivische Ebenenwürfe erzeugen, bilden einen Complex 4. Grades; derselbe enthält die Bündel der 8 Hauptpunkte, die Felder der 8 Hauptebenen und die 12 linearen Congruenzen, wie $[a_{12}, b_{12}]$, $[a_{12}, b_{34}]$, $[a_{34}, b_{12}]$, $[a_{34}, b_{34}]$ u. s. f., wo z. B. $[a_{12}, b_{12}]$ die Congruenz der Geraden ist, die sich auf die beiden Verbindungslinien von Hauptpunkten (Hauptlinien) $a_{12} = A_1 A_2$ und $b_{12} = B_1 B_2$ stützen.

2. In Bezug auf 2 Gruppen A^5, B^5 aus je 5 Punkten entspricht jeder Geraden a das Sehnensystem einer cubischen Raumcurve, welche durch die 5 Hauptpunkte B^5 geht †, und es sind ihr alle Sehnen einer durch die A^5 gehenden cubischen Raumcurve adjungirt (zu denen sie selbst gehört); beide Curven (oder Sehnensysteme) heissen einander analog.

Die Geraden $(c)_5$ des Raumes, bei denen der nach A^5 gesandte Ebenenwurf mit dem nach B^5 gesandten projectivisch ist, erzeugen eine Congruenz (ein System) 7. Ordnung 11. Klasse oder kurz (7, 11) d. h. von welcher im Allgemeinen 7 Gerade durch einen Punkt, 11 Gerade in einer Ebene liegen. Jeder der 10 Hauptpunkte aber schickt zu dieser Congruenz einen Kegel 4. Ordnung, welcher durch die 4 andern Hauptpunkte desselben Raumes geht. Von den $(c)_5$ ist in jeder Hauptebene ein Büschel enthalten, das z. B. in α_{123} seinen Scheitel in der Spur von b_{45} hat. Die Geraden $(c)_5$, welche sich in einer Congruenz $[a_{ik}, b_{ik}]$ befinden, bilden eine Linienfläche 6. Grades, für welche a_{ik} und b_{ik} dreifache Leitgeraden, die 6 ausserhalb liegenden Hauptpunkte einfache Punkte sind.

Sind A und B zwei Scheitel von Bündeln,

so entspricht jeder a in A im Allgemeinen eine und nur eine b in B.

Die Sehnensysteme, welche den Strahlen a eines ebenen Strahlbüschels (A, α), d. i. in α um A, correspondiren, bilden einen Complex 5. Grades. Derselbe enthält die Bündel der 5 Punkte B^5 und das Sehnensystem derjenigen cubischen Raumcurve, welche der durch A und die A^5 gelegten analog ist, doppelt, die Felder der 10 Hauptebenen einfach.

Die den Strahlen des Büschels (A, α) adjungirten Sehnensysteme bilden ebenfalls einen Complex 5. Grades.

Die cubischen Raumcurven, deren Sehnensysteme den Strahlen von (A, α) correspondiren, erzeugen eine Fläche 5. Ordnung.

Durchwandert A eine Gerade $\bar{a}$ und wird zu der durch A und A^5 gelegten cubischen Raumcurve stets die analoge gesucht, so erfüllt deren Sehnensystem einen Complex 5. Grades.

3. In Bezug auf zwei Gruppen A^6 B^6 von je 6 Punkten entspricht jeder Geraden a die eine Schaar einer durch B^6 gehenden Fläche 2. Grades, »Regelschaar«, $\mathfrak{B}^2$† und ist eine solche Regelschaar $\mathfrak{A}^2$ adjungirt; die beiden Regelschaaren heissen einander analog.

Die Geraden $(c)_6$ des Raums, welche nach A^6 und B^6 projectivische Würfe senden, erzeugen eine Linienfläche 28. Grades, für welche die 12 Hauptpunkte 7fache Punkte sind. Dieselbe liefert zu jeder der 15 Congruenzen $[a_{ik}, b_{\bar{ik}}]$ 10 Gerade und enthält die 20 Geraden, wie $(\alpha_{123}, \beta_{456})$.

Einer Geraden a, die durch einen Hauptpunkt geht, entspricht jederzeit dasjenige Gebilde, das ihr in Bezug auf die beiden Gruppen correspon-

dirt, aus denen der betreffende Hauptpunkt und sein homologer ausgeschieden ist, also hier das ganze Sehnensystem einer cubischen Raumcurve. Einer Hauptlinie entspricht ebenso dasjenige Gebilde, das ihr in Bezug auf diejenigen Gruppen correspondirt, aus denen die beiden durch sie verbundenen Hauptpunkte und ihre homologen ausgeschieden sind, hier mithin ein Complex 2. Grades. Aehnliches galt schon für $A^5 B^5$ und wird bei den umfangreicheren Gruppen nicht mehr besonders erwähnt werden.

Es gibt eine Regelschaar $\overline{\mathfrak{A}}^2$ ($\overline{\mathfrak{B}}_2$), der nicht blos eine Regelschaar, sondern ein ganzes Sehnensystem analog ist, das der cubischen Raumcurve $\mathfrak{B}_0^3$ ($\mathfrak{A}_0^3$), welche durch B^6 (A^6) geht.

Die Regelschaaren, welche den sämmtlichen Strahlen eines Bündels A correspondiren, erzeugen einen Complex 3. Grades; in demselben befindet sich stets die Regelschaar $\overline{\mathfrak{B}}^2$, alle 6 Bündel um die B^6 und die Sehnensysteme der 6 cubischen Raumcurven, welche den cubischen Raumcurven, die durch A und je 5 Punkte A^6 gelegt sind, in Bezug auf die Gruppen aus diesen 5 und die ihnen homologen analog sind. Die Regelschaaren, welche den Strahlen des Bündels A adjungirt sind, bilden ebenfalls einen Complex 3. Grades, nämlich den Complex der Geraden des Flächennetzes 2. Ordnung, welches A und die A^6 zu Grundpunkten hat.

Unter den Regelschaaren, welche den Strahlen eines Bündels adjungirt sind, und ebenso unter denen, welche ihnen correspondiren, befinden sich je ∞^1 Kegelschaaren; die Spitzen der Kegel erzeugen in jenem Falle eine Curve 6. Ordnung (die bekannte Kegelspitzencurve des Netzes), in diesem eine Curve 9. Ordnung.

Die Regelschaaren, welche den Geraden eines ebenen Feldes α entsprechen, erzeugen einen Complex 9. Grades. Zu demselben gehört die Regelschaar $\overline{\mathfrak{B}}^2$ und jedes der 6 Bündel um die B^6 dreifach, ferner die 20 Geradenfelder der Hauptebenen β_{ikl} einfach; ausserdem sind in ihm ∞^1 doppelte Regelschaaren enthalten, deren Inbegriff eine Congruenz (9, 17) ist, unter ihnen 4 cuspidale. Die Curve der Spitzen der Kegelschaaren, welche sich in diesem Complexe befinden, ist 17. Ordnung.

In je zwei homologen Hauptebenen giebt es ∞^1 analoge Strahlbüschel — degenerirte Regelschaaren —; ihre Scheitel erfüllen z. B. in α_{123} und β_{123} bezüglich die Geraden $(\alpha_{123}, \alpha_{456})$ und $(\beta_{123}, \beta_{456})$.

Die Regelschaaren, welche den Strahlen eines ebenen Büschels (A, α) entsprechen, bilden eine Congruenz (3, 9), welche aus jedem der B^6 einen Kegel 5. Ordnung erhält.

Geht die Gerade $\bar{a}$ durch einen der Hauptpunkte A^6, so ist sie Leitgerade von ∞^1 Regelschaaren durch A^6; deren analoge erzeugen eine Congruenz (2, 6), zu welcher aus dem homologen des auf $\bar{a}$ gelegenen Hauptpunktes ein Kegel 5. Ordnung, aus jedem der 5 andern B^6 ein Kegel 3. Ordnung kommt.

4. In Bezug auf zwei Gruppen $A^1 B^7$ von je 7 Punkten correspondirt jeder Geraden a eine und im Allgemeinen nur eine Gerade b und keine ist ihr adjungirt.† Die beiden Räume sind also hinsichtlich ihrer Geraden eindeutig auf einander bezogen.

Ausser den Geraden durch die Hauptpunkte giebt es noch ∞^2 Gerade a_0, denen je ∞^1 Gerade correspondiren, welche eine durch alle 7

Punkte B^7 gehende Regelschaar bilden. Diese Geraden a_0 erzeugen eine Congruenz (3, 6), zu welcher jeder der A^7 einen durch die 6 andern A^7 gehenden Kegel 3. Ordnung sendet; in dieser Congruenz befinden sich auch die 7 Regelschaaren $\overline{\mathfrak{A}^2}$, welche den 7 sechsgliedrigen Gruppenpaaren, die in $A^7 B^7$ enthalten sind, zugehören.

Es giebt 3 Regelschaaren $\mathfrak{A}^2{}_{0,0}$ durch A^7, denen wieder Regelschaaren $\mathfrak{B}^2{}_{0,0}$ durch B^7 analog sind, d. h. jeder Geraden einer der ersteren entsprechen alle Geraden der analogen. Die ersteren befinden sich in der Congruenz (3, 6) der a_0. Es gibt natürlich eine ebensolche Congruenz (3, 6) von Geraden b_0, welche die 3 analogen Regelschaaren $\mathfrak{B}^2{}_{0,0}$ und die 7 Schaaren $\overline{\mathfrak{B}^2}$ enthält.

Gerade $(c)_7$, bei denen der nach A^7 gehende Ebenenwurf mit dem nach B^7 gehenden projectivisch ist, sind 38 vorhanden.

Die Geraden b, welche den Strahlen eines Bündels A entsprechen, erzeugen eine Congruenz (3, 6), zu der aus jedem der 7 Punkte B^7 ein Kegel 3. Ordnung kommt.

Die Congruenz der Geraden aber, welche den Geraden eines (ebenen) Feldes α correspondiren, ist (6, 19) und erhält aus jedem der B^7 einen Kegel 9. Ordnung.

Dem linearen Complexe $[\bar{a}]$, welcher durch die ∞^3 Geraden gebildet wird, die der Geraden $\bar{a}$ begegnen, entspricht ein Complex 7. Grades; derselbe enthält die 7 Bündel B^7 und die Congruenz (3, 6) der Geraden b_0 doppelt.

Einem ebenen Strahlbüschel (A, α) correspondirt eine Linienfläche 7. Grades, für welche jeder der B^7 ein dreifacher Punkt ist.

5. In Bezug auf zwei Gruppen $A^8 B^8$

von je 8 Punkten correspondirt nicht mehr jeder Geraden a eine Gerade b; es giebt aber ∞^3 Gerade $(a)_8$, welche entsprechende $(b)_8$ haben. Die Geraden $(a)_8$ bilden einen Complex 4. Grades und ihre entsprechenden $(b)_8$ ebenfalls. Jeder dieser beiden Complexe enthält die Bündel der Hauptpunkte seines Raums, die 8 Congruenzen (3, 6) der Geraden a_0 bez. b_0 für die 8 siebengliedrigen Gruppen, welche in A^8 B^8 enthalten sind, und die 8 Congruenzen, ebenfalls (3, 6), welche den Bündeln der Hauptpunkte des andern Raumes entsprechen.

Im Complexe der $(a)_8$ befinden sich natürlich auch die 3 Regelschaaren $\mathfrak{A}^2{}_{0,0}$ und in dem der $(b)_8$ ihre analogen $\mathfrak{B}^2{}_{0,0}$; während $(a)_8$ eine $\mathfrak{A}^2{}_{0,0}$ durchläuft, durchläuft $(b)_8$ die analoge $\mathfrak{B}^2{}_{0,0}$.

Es giebt je 4 Regelschaaren (2. Grades) $(\mathfrak{A}^2)_8$ bez. $(\mathfrak{B}^2)_8$, deren sämmtliche Gerade je einer und derselben Geraden $(b)^0{}_8$ bez. $(a)^0{}_8$ correspondiren.

In jeder Hauptebene liegt, abgesehen von den Geraden durch die Hauptpunkte, ein Büschel von Geraden $(a)_8$, dem in der homologen Hauptebene ein Büschel von Geraden $(b)_8$ correspondirt.

Der Congruenz (4, 4) von Geraden $(a)_8$, welche dem linearen Complexe $[\bar{a}]$ angehören, entspricht eine Congruenz (8, 16), zu welcher aus jedem der 8 Punkte B^8 ein Kegel 7. Ordnung kommt, für den die nach den 7 andern Punkten B^8 gehenden Hauptlinien Doppelkanten sind.

Die Geraden $(a)_8$, welche in einem Bündel A sich befinden, erzeugen einen Kegel 4. Ordnung; die ihnen entsprechenden Geraden $(b)_8$ eine Linienfläche 8. Grades, für die jeder der Punkte B^8 ein dreifacher Punkt ist.

Der Curve 4. Klasse von Geraden $(a)_8$, welche in einer Ebene α liegen, entspricht eine

Linienfläche 16. Grades, auf welcher jeder der B^8 ein 6facher Punkt ist.

6. Die ∞^2 Geraden $(a)_9$, welche in Bezug auf zwei Gruppen $A^9 B^9$ von je 9 Punkten correspondirende Gerade $(b)_9$ haben, bilden eine Congruenz (6, 10); die $(b)_9$ eine ebensolche. Zu jeder derselben schicken die 9 Hauptpunkte ihres Raums je einen Kegel 4. Ordnung, der durch die 8 andern Hauptpunkte desselben Raums einfach geht.

Die ∞^1 Geraden $(a)_9$, die in dem Complexe $[\bar{a}]$ sich befinden, bilden eine Linienfläche 16. Grades, für welche $\bar{a}$ sechsfache Leitgerade ist; ihre correspondirenden Geraden $(b)_9$ erzeugen eine Linienfläche 24. Grades, welche jeden der Punkte B^9 zum 8fachen Punkte hat.

Während die ∞^3 Geraden a_0, deren jeder ∞^1 Gerade in Bezug auf $A^7 B^7$ entsprechen, noch alle in dem Complexe der $(a)_8$ in Bezug auf $A^8 B^8$ enthalten sind [1]), befinden sich nur noch ∞^1 unter den $(a)_9$ in Bezug auf $A^9 B^9$; dieselben erzeugen eine Linienfläche 16. Grades, auf welcher jeder der 7 Punkte B^7 6fach ist und der die Hauptlinien nicht angehören. Die ∞^1 Geraden der Regelschaar $\overline{\mathfrak{A}}^2$, deren jeder in Bezug auf $A^6 B^6$ ∞^2 Geraden entsprechen, nämlich die Sehnen der durch B^6 gehenden cubischen Raumcurve, befinden sich, weil sie Gerade a_0 in Bezug auf $A^7 B^7$ sind, alle unter den $(a)_8$; 3 von ihnen sind noch unter den $(a)_9$ enthalten.

7. Die ∞^1 Geraden $(a)_{10}$, welche correspondirende $(b)_{10}$ in Bezug auf zwei Gruppen $A^{10} B^{10}$ von je 10 Punkten haben, bilden eine Linienfläche 20. Grades $\mathfrak{A}^{20}$, welche die 10

1) Wobei als selbstverständlich gilt, dass $A^8 B^8$ und $A^9 B^9$ u. s. f. aus $A^7 B^7$ hervorgegangen sind.

Punkte A^{10} zu 6fachen Punkten hat (die Hauptlinien im Allgemeinen nicht enthält); die $(b)_{10}$ erzeugen eine ebensolche Fläche $\mathfrak{B}^{10}$. Beide sind offenbar eindeutig auf einander bezogen.

Von den ∞^2 Geraden a_0 in Bezug auf A^7 B^7 befinden sich noch 18 unter den $(a)_{10}$.

8. Es giebt 20 Gerade $(a)_{11}$, welche je eine entsprechende Gerade $(b)_{11}$ in Bezug auf zwei Gruppen $A^{11}B^{11}$ von je 11 Punkten haben [1]).

Darmstadt, Anf. April 1873.

Ueber die aus βBibrompropionsäure zu erhaltende Monobromacrylsäure.

Von

Rich. Wagner und **B. Tollens.**

Die von G. Münder und dem Einen von uns [2]) durch Oxydation des Bibrompropylalkoholes (d. h. des Additionsproductes von Allylalkohol und Brom oder $C^3H^6Br^2O$) erhaltene Säure $C^3H^4Br^2O^2$ oder die βBibrompropionsäure bietet in mehrfacher Hinsicht Gelegenheit zu interessanten Untersuchungen. Einerseits kann sie analog der 2fach gebromten Bernsteinsäure durch Verlust von Bromwasserstoff eine Säure $C^3H^3BrO^2$ oder Monobromacrylsäure liefern und ferner vielleicht eine $C^3H^2O^2$ zusammengesetzte Säure, welche merkwürdige Eigenschaften darbieten muss, die sie den Proparpylderivaten nähern werden. Andererseits ist diese Bibrompropionsäure deshalb wichtig, weil ihre Structur analog

1) Eine ausführlichere Abhandlung, welche die synthetischen Beweise der im Vorhergehenden mitgetheilten Sätze bringt, ist der Redaction der Math. Annalen übersandt worden.

2) Nachrichten von der G. A. 1872. S. 423

derjenigen der von einzelnen Chemikern immer

$$\begin{array}{l} CH^2 \\ \| \\ CH \\ | \\ COOH \end{array}$$

noch nicht als Acrylsäure ist, da sie in letztere durch nascirenden Wasserstoff übergeht und aus derselben durch Addition von Br^2 sich regenerirt und deshalb war es von Wichtigkeit, ihre Constitution noch genauer als

$$\begin{array}{l} CH^2Br \\ CHBr \\ COOH \end{array}$$

Säure völlig festzustellen, indem besonders Existenz von Carboxyl in der Acrylsäure von einem hervorragenden Chemiker bestritten wird [1]).

Um uns diesen Zielen zu nähern, haben wir βBibrompropionsäure mit Kali behandelt und in der That die Säure $C^3H^3BrO^2$ oder Monobromacrylsäure erhalten. Hierzu haben wir 40 grm βBibrompropionsäure mit 2 Mol. (23 grm) Kalihydrat in alkoholischer Lösung gekocht, worauf sich bald beträchtliche Mengen Bromkalium abschieden, und beim Erkalten einer Probe die Flüssigkeit zu schönen Krystallen erstarrte. Ehe dies erfolgt war, haben wir von dem in Alkohol schwer löslichen und deshalb z. gr. Th. ausgeschiedenen Bromkalium abgegossen und nach erfolgtem Erkalten die dann entstandenen Krystalle herausgenommen und durch Eindampfen der Mutterlauge noch mehr derselben gewonnen. Dies Kaliumsalz liess sich von Resten des in Wasser viel leichter löslichen KBr durch einige Krystallisationen so vollständig befreien, dass Silbersolution keine Trübung mehr in seiner verdünnten Lösung hervorbrachte.

1) Annalen d. Chem. u. Pharm. 166 Heft 1.

Die Analyse bestätigte die Zusammensetzung $C^3H^2BrO^2.K$. Es sind prächtige Blätter, welche sich unter dem Mikroscop als aus Nadeln bestehend erwiesen [1]).

Das erhaltene Salz (27 grm) wurde in Wasser gelöst, mit etwas mehr als der berechneten Menge Schwefelsäure versetzt und dann mit Aether ausgeschüttelt. Dieser hinterliess beim Verdampfen eine feste krystallinische Masse (12 grm) welche nach 2maligem Schmelzen mit wenig Wasser und Pressen völlig rein und weiss zurückblieb und aus schön rechtwinkligen mikroscopischen Säulen bestand. Sie riecht propionsäureartig und besitzt die Haut reizende Wirkung. Den Schmelzpunkt fanden wir bei 69—70°. Den Siedepunkt konnten wir nicht bestimmen, weil sie beim Versuch der Destillation sich völlig zersetzte, denn unter HBr Entwickelung verdickte sie sich plötzlich, es hörte das Destilliren auf, der Inhalt des Retörtchens verkohlte theilweise und nach dem Erkalten war der weiss gebliebene Antheil in eine in Wasser unlösliche Gallerte verwandelt. Dies Verhalten erinnert sehr an das bei anderen ungesättigten Verbindungen speciell dem Acrylsäure-Allyläther beobachtete [2]).

Die Reaction, welche von der βBibrompropionsäure zur Monobromacrylsäure führt, wird durch folgende Gleichung ausgedrückt:

$$C^3H^4Br^2O^2 + 2KOH = C^3H^2BrO^2.K + KBr + 2H^2O$$

βBibrompropionsäure Monobromacrylsaures Kali

1) Dies Salz scheint nach dem Resultate der Analyse in unreinem Zustande schon von G. Münder und dem Einen von uns erhalten worden zu sein bei dem Versuche das Kalisalz der βBibrompropionsäure durch Sättigen dieser Säure mit Kalihydrat zu gewinnen (G. Münder Inaug.-Dissert. Göttingen 1872).

2) Caspary. Inaug.-Dissert. Göttingen 1873.

und wir glauben, dass die folgenden Structurformeln sich durch die weiteren Untersuchungen bestätigen werden:

$$\begin{array}{l} CH^2Br \\ CHBr \\ COOH \end{array} + 2KOH = \begin{array}{l} CH^2 \\ CBr \\ COOK \end{array} + KBr + 2H^2O$$

denn es giebt αBibrompropionsäure, wie in der folgenden Abhandlung näher ausgeführt ist, mit Kali ebenfalls eine bei 69—70° schmelzende Säure, was, wenn die Identität der beiden Säuren sich weiter bestätigt, die angeführte Formel der Monobromacrylsäure zur Gewissheit erhebt, indem dann zwischen den Bibrompropionsäuren Propylenbromür und Methylbromacetoleinerseits und Monobromacrylsäure und Brompropylen anderseits völliger Parallelismus herrscht.

Ferner aber wären alle diese so evidenten Beziehungen unmöglich, wenn nicht die Carboxylgruppe in der βBibrompropionsäure und folglich der Acrylsäure existirte und demnach würde hierdurch die Existenz dieser Gruppe in der Acrylsäure von neuem bewiesen.

Die Monobromacrylsäure verbindet sich mit H Br beim Erhitzen derselben im zugegeschmolzenen Rohr auf 100° mit rauchender Bromwasserstoffsäure und die entstehende Säure ist nach Krystallform [1]) und Schmelzpunkt (63—64°) identisch mit der Säure, von der wir ausgegangen sind, so dass die umgekehrte Reaction oder

1) Die Winkel der rhombischen Täfelchen erwiesen sich beim Messen unter dem Mikroscop als identisch mit denen, welche wir an einer Probe ursprünglicher βBibrompropionsäure beobachteten, nämlich 66—67° und 112—113°.

$C^3H^3BrO^2 + HBr = C^3H^4Br^2O^2$

Monobromacrylsäure — βBipropionsäure

stattgefunden hat.

Universitäts-Laboratorium in Göttingen.

Ueber die α Bibrompropionsäure aus Propionsäure.

Von

O. Philippi und **B. Tollens.**

Ein grosser Theil der in letzter Zeit erschienenen chemischen Arbeiten beschäftigt sich mit dem Studium der zahlreichen und interessanten Fälle von isomeren d. h. procentisch gleich zusammengesetzten Körper, deren Eigenschaften verschieden sind, und sucht diese Verschiedenheiten auf Differenzen in der Anordnung der kleineren darin vorhandenen Gruppen sowie der einzelnen sie bildenden Atome zurückzuführen.

Einige Gebiete sind in dieser Hinsicht gut durchforscht andere dagegen viel weniger und zu diesen gehören die sich von den fetten Säuren ableitenden Substitutionsproducte, von denen, besonders bei gleichzeitiger Substitution mehrerer Wasserstoffatome die Theorie stets mehrere voraussicht.

Von der Propionsäure leiten sich so 3 zweifach gebromte Derivate

	I	II	III
$C^3H^4Br^2O^2$ ab,	$CHBr^2$	CH^3	CH^2Br
	CH^2	CBr^2	$CHBr$
	$COOH$	$COOH$	$COOH$

doch war nur eine Bibrompropionsäure aus der Propionsäure erhalten worden, nämlich die von Friedel und Machuca[1]) hergestellte Bibrompropionsäure und zu entscheiden welche dieser Formeln ihr gehört, war unmöglich, da nähere Angaben über Zersetzungserscheinungen derselben fehlten. Nur war die Formel I ausgeschlossen, weil Bibrompropionsäure aus Monobrompropionsäure durch weitere Substitution entsteht, und in letzterer das Bromatom mit dem der Carboxylgruppe nächsten C Atom verbunden ist, folglich auch in der Bibrompropionsäure wenigstens 1 Br an diesem C Atom befindlich sein muss.

Andererseits ist von dem Einen von uns in Gemeinschaft mit G. Münder[2]) durch Oxydation des Additionsproductes von Allylalkohol und Brom eine Säure von der Zusammensetzung der von Fr. u. M. hergestellten erhalten worden, ohne dass nach den vorhandenen Daten ein sicherer Ausspruch über Identität oder Isomerie möglich war, doch haben M. u. T. die Säure als Allylalkohol als β Bibrompropionsäure von der α Säure von Friedel und Machuca unterschieden.

Da die β Säure, wie näher angegeben l. c. die Formel III besitzt, so ist die α Säure falls sie als nicht identisch mit der β Säure sich erweist, nach II constituirt oder die beiden Bromatome sind mit demselben C Atome verbunden und zwar mit dem der Carboxylgruppe nächsten.

Zur Entscheidung der Richtigkeit dieser Schlüsse haben wir grössere Mengen Bibrompropionsäure nach den Angaben von Fr. und M. dargestellt, indem wir Propionsäure mit 2 Atomen Brom erst in Monobrompropionsäure und

1) Annalen der Chemie u. Pharm. Suppl. 2 S. 70.
2) Nachrichten von der G. A. 1872. S. 423.

diese dann in Bibrompropionsäure verwandelten. welche beim Oeffnen der Röhren erstarrte. Zur Entfernung der HBr wurde die Säure im Wasserbade erhitzt und nach dem Erkalten wiederholt abgepresst. Die reine Säure ist wenig hygroscopisch, dagegen die rohe ungemein, so dass wir die Reinigung wohl auch durch einige Zeit dauerndes Exponiren der Säure auf einem Trichter an feuchter Luft ausführten, indem dann die Verunreinigungen Wasser anzogen und von der rein und weiss auf dem Trichter zurückbleibenden Säure abflossen. Durch die Analyse wurde die Formel $C^3H^4Br^2O^2$ bestätigt

Die reine α Säure bildet bei langsamem Erstarren sehr schöne mikroscopische Tafeln welche durch Abstumpfung quadratischer Octaeder entstanden sind, denn man findet zuweilen letztere sowie alle Zwischenstufen.

Diese von Münder und T. schon beobachtete Krystallform unterscheidet die α Säure sehr bestimmt von der β Säure und noch mehr der Umstand, dass während in einer geschmolzenen Probe einer der beiden Säuren ein Stäubchen derselben Substanz ein sehr rasches Krystallisiren veranlasst, im Gegentheil auf Zusatz eines Stäubchens der Säure von anderem Ursprunge nicht nur keine Krystallisation eintritt, sondern sich die hinzugebrachte Säure verflüssigt und auch nach erfolgtem Erstarren der übrigen Portion der Säure an ihrer Stelle ein Tröpfchen Flüssigkeit hinterlässt.

Den Schmelzpunkt der α Säure fanden wir bei 58—61°, während Münder und T. 61° und Friedel und Machuca 65° angeben. Er unterscheidet sich demnach nur sehr wenig von dem der β Säure (63—64°). Ein Gemenge gleicher Gewichte beider Säuren blieb flüssig und bildete erst nach meh-

reren Wochen schöne mikroscopische Würfel, welche im Gegensatz zu den reinen Säuren so zerfliesslich waren, dass wir ihren Schmelzpunkt nicht haben bestimmen können.

Die α Bibrompropionsäure siedet etwas niedriger als die β Säure, denn sie beginnt bei 200° unter geringer Zersetzung zu sieden und bei 220°—221 bleibt der Siedepunkt bis zu Ende constant während bei Destillation der β Säure das Thermometer auf 240° steigt und bedeutendere Zersetzung eintritt. Aehnliche Siedepunktsdifferenzen zeigen die Aether der beiden Säuren (s. u.).

Aufs schärfste unterscheiden sich jedoch die beiden Säuren durch ihr Verhalten gegen nascirenden Wasserstoff, denn, während die β Bibrompropionsäure beim Behandeln mit Zink und Schwefelsäure Acrylsäure liefert [1]) entsteht aus α Bibrompropionsäure bei 12stündigem Behandeln mit Zink und Schwefelsäure Propionsäure. Nach beendeter Reaction haben wir diese durch Destillation abgeschieden und durch Behandeln mit Bleiglätte und nachheriges Durchleiten von Kohlensäure, Abdampfen und Verdunsten über Schwefelsäure in propionsaures Bleioxyd übergeführt, welches genau passende Zahlen ergeben hat. Es bildete Nadeln, welche dem acrylsauren Bleioxyd ähnlich, jedoch breiter waren. Da dieses Salz als Gummi beschrieben wird (s. z. B. Linnemann [2]), so haben wir durch Behandeln von Propionsäure mit Bleioxyd dasselbe dargestellt, und auch hier gefunden dass es zwar schwierig aber doch vollständig krystallisirt.

Neue Unterschiede der beiden Bibrompropionsäuren haben sich bei Vergleich der Salze ergeben. Während diejenigen der β Säure zwar

1) Deutsche chem. Gesellsch. 1871. S. 806.
2) Annalen d. Chem. u. Pharm. 160. S. 222.

STANFORD LIBRARIES

gut krystalliren aber sich durch die gerings
Temperaturerhöhung zersetzen, so dass das B
ryumsalz von Münder und T. gar nicht, d
Strontiumsalz kaum und nur das Calciumsalz
zur vollständigen Analyse genügender Men
hatte erhalten werden können, lassen sich d
entsprechenden Salze der α Säure mit gross
Leichtigkeit durch Sättigen einer weingeistig
Säurelösung mit den betreffenden Carbonat
oder Hydraten darstellen. So haben wir d
Calcium- und das Baryumsalz dargestellt. Fern
den Aethyläther welche alle analysirt word
sind.

Das Calciumsalz $(C^3H^3Br^2O^2)^2 Ca +$
H^2O bildet schöne seidenglänzende Nade
welche bei 90° alles Wasser verlieren.

Das Baryumsalz $(C^3H^3Br^2O)^2Ba +$
$9H^2O$ bildet ähnliche Nadeln, welche an d
Luft verwittern und bei 90° alles Wass
verlieren.

Der Aethyläther $C^3H^3Br^2O^2C^2H^5$ wur
auf gewöhnliche Weise durch Einleiten v
Salzsäure in eine Lösung von 15 grm. α Säu
in 8 grm. Alkohol erhalten, und bildet e
campferartig riechendes Liquidum von 190-
191° Siedepunkt und 1,7536 spec. Gew. b
12°. Er siedet also 23° niedriger als der en
sprechende Aether der β Säure (210—214°).

Dies entspricht fast der Differenz welc
zwischen den Siedepunkten des Propylenbromü
und das Methylbromacetols liegt und bestäti
die diesen Verbindungen analoge Structur d
beiden Säuren

CH^2Br	CH^3
$CHBr$	CBr^3
CH^3	CH^3

Propylenbromür	Methylbromacetol
Siedp. 142°—Diff. 27°	Siedp. 115°
CH^2Br	CH^3
$CHBr$	CBr^3
COO^2H^5	COO^2H^5

β Bibrompropionsäure-Aether	α Bibrompropionsäure Aether
Siedp. 210—214°—Diff. 22°	Siedp. 190 — 191°

Der Zusammenhang beider Säuren würde noch evidenter werden, wenn es gelänge, von der β Säure zur α Säure zu gelangen oder umgekehrt, oder nur aus beiden dieselbe einfachere Verbindung zu erhalten, wie z. B. aus Propylenbromür und Methylbromacetol durch Verlust von HBr dasselbe Brompropylen oder C^3H^5Br entsteht. In der That haben wir durch Kochen der α Bibrompropionsäure mit Kali in alkoholischer Lösung ein krystallisirtes Kaliumsalz erhalten, aus welchem durch Ausschütteln der mit Schwefelsäure versetzten Lösung mit Aether eine bei 69—70° schmelzende Säure gewonnen wurde, welche voraussichtlich identisch mit der aus β Säure bereiteten sein wird (s. vor Abb.) Es geht die Reaction bei der α Säure jedoch viel schwieriger von Statten als bei der β Säure, so dass wir uns ein bestimmtes Urtheil bis zur Gewinnung grösserer Mengen Monobromacrylsäure vorbehalten.

Universitäts-Laboratorium in Göttingen

Ueber Diallyl und Versuche zur G
winnung von Allylbenzol.

Von

Rich. Wagner und B. Tollens.

Nachdem von Fittig und dem Einen
uns durch Einführung von Alkoholradica
statt eines Atoms Wasserstoff des Benzols
Tolool hergestellt und als Methyl-Benzol c
racterisirt, sowie von Fittig mit Glim
Stelling und Anderen ähnliche Kohlenwas
stoffe erhalten waren, lag der Versuch na
auch andere Radicale in den Benzol einzufüh
und hier bot besonders das Radical Allyl
teresse, indem man auf diese Weise einen
gesättigten Kohlenwasserstoff, das Allyl-B
zol erhalten muss, welcher homolog dem S
rol ist

Da von Fittig und Bigot[1]) die React
von Natrium auf ein Gemenge von Brombe
und Allyljodür ohne Erfolg schon versucht w
wandten wir zu gleichem Zwecke statt des
lyljodürs das Allylbromür an, welches sich lei
rein und in jeder Menge erhalten lässt.

Bei Anwendung von 48 grm. Allylbrom
56 grm. Brombenzol, 102 grm. Benzol und
grm. Natrium trat die Reaction beim Erw
men auf gegen 60° lebhaft ein, so dass
kühlung erforderlich war. Nach beendeter Z
setzung destillirten wir wie gewöhnlich ü
freiem Feuer ab, wobei sich zeigte, dass un
sehr starker Verkohlung das wahrscheinlich e
standene Product sich zersetzt hatte, denn
Destillat schien ausser Benzol und Diallyl ka
etwas nennenswerthes vorhanden zu sein.

1) Zeitschrift f. Chemie 1867 S. 134.

In der Meinung, das Natrium habe die Zersetzung des vielleicht gebildeten Productes dadurch veranlasst, das es mit demselben in der beobachteten blauen Masse verbunden geblieben war, welche dann bei der trockenen Destillation völlig sich zersetzt hat, suchten wir diese Natriumverbindung dadurch zu zerlegen, dass wir nach dem Abdestiliren des Benzols und der flüchtigsten Producte vorsichtig Alkohol auf die zersetzte Masse tröpfelten, welcher heftig einwirkte. Darauf wurde Wasser hinzugesetzt, welches das Bromnatrium löste und sich als schwere Schicht unter einer oberen öligen leichteren ablagerte. Letztere versuchten wir durch Destillation mit Wasserdampf zu reinigen, erhielten jedoch wenig Destillat, während ein dicker wenig einladender Rückstand blieb, aus dem nach langer Zeit etwas Diphenyl zu krystallisiren schien. Da das Allylbenzol jedenfalls einen nicht weit von dem des Propylbenzol entfernten Siedepunkt (150—160°) besitzt, so musste es, falls es vorhanden war, jedenfalls sich in den Destillaten befinden, diese wurden deshalb fractionirt wobei sich jedoch herausstellte, dass zwischen 100 und 200° fast nichts überdestilirte, also das gemischte Allylbenzol nicht vorhanden war. Hieraus zu schliessen, dass es sich überhaupt nicht gebildet hat, wäre voreilig; wir glauben im Gegentheil, dass es oder vielmehr die daraus durch Polymerisation entstandenen Producte in jenem dicken öligen Destillationsrückstande enthalten waren. Hierauf deutete, dass jene Oele von Brom ohne Entwickelung von viel HBr stark angegriffen wurden, dass sie also ungesättigte Gruppen enthalten mussten. Die Bromproducte waren jedoch ebensowenig wie die Producte selbst der Art, dass eine nä-

here Untersuchung irgend Aussicht auf Erfolg geboten hätte.

Das beim Destilliren unter 100° überdestillirte enthielt ausser Benzol einen mit Brom verbindbaren Kohlenwasserstoff, der sich als Diallyl erwiesen hat. Wir haben seine Identificirung durch Untersuchung des Tetrabromürs ausgeführt, sind hierbei jedoch auf Differenzen in den Eigenschaften gestossen, welche uns zu Ausdehnung unserer Arbeit veranlasst haben. Die durch Versetzen des unter 100° erhaltenen mit Brom und Abdestillren des Benzols gebildete krystallinische Masse schmolz nämlich nach einmaligem Umkrystallisiren bei 46° und bei sorgfältigem, lange fortgesetzten Umkrystallisiren erhöhte sich der Schmelzpunkt immer mehr, bis er endlich bei 63 — 63.5° constant blieb.

Die Analyse zeigte, dass der von uns erhaltene Körper wirklich die Zusammensetzung des Diallyltetrabromür $C^6H^{10}Br^4$ besass. Er bildet 4 seitige Säulen von etwas campherartigem Geruch. Im Gegensatz zu dieser Beobachtung wird dem Diallyltetrabromür der Schmelzpunkt 37° beigelegt, und es war von Interesse zu erfahren, ob das aus Allylbromür erhaltene sich von dem mittelst Allyljodür zu bereitenden wirklich unterscheidet, oder ob die Differenz auf nicht genügender Befreiung des mittelst Allyljodür erhaltenen von anderen den Schmelzpunkt erniedrigenden öligen Produkten beruht.

Um zu erfahren, ob Allylbromür ohne Beimengung von Brombenzol ebenfalls Diallyl liefert, dessen Tetrabromür bei 63° schmilzt, haben wir 43 grm. desselben mit 25 grm. Benzol und 9 grm. Natrium zusammengebracht. Hierbei bemerkten wir weder in der Kälte noch in der Wärme die geringste Reaction, auch ein Zusatz

von etwas Wasser, der Silva[1]) in seinen ähnlichen mit Aether hergestellten Mischungen einen guten Erfolg gab, war ganz ohne Wirkung, bis es uns endlich gelang, auf Zusatz eines Tröpfchens Alkohol eine regelmässige Reaction hervorzurufen, welche sich normal fortsetzte, bis das Natrium in die wohlbekannte blaue Masse verwandelt war.

Die bis 70° siedenden Producte, welche wir durch Fractioniren aus dem im Wasserbade abdestillirten erhielten, haben wir mit Brom versetzt und auch hier nach sehr häufig wiederholter Krystallisation bei 63° schmelzende Krystalle erhalten, welche den Bromgehalt des Diallyltetrabromürs zeigten.

Hierauf haben wir mittelst Allyljodürs Diallyltetrabromür hergestellt, um es mit unserem Product zu vergleichen.

Wir wählten die von Oppenheim[2]) angegebene Methode des Erhitzens von Mercurallyljodür mit Cyankaliumlösung und erhielten constant bei 58—60° siedendes Diallyl[3]) welches in der That beim Versetzen mit Brom ein Product lieferte, welches sich dem von uns mittelst des Allylbromürs erhaltenen ganz gleich verhielt. Der in Anfang etwas niedrigere Schmelzpunkt erhöhte sich nämlich nach längerer Krystallisation auf 63—63,5°, welches sonach der wahre Schmelzpunkt des Diallyltetrabromürs ist.

1) Bull. Soc. chim. [2] 18 p. 530. Es scheint also als ob vollkommen Alkoholfreie Materialien in ähnlichen Reactionen nicht auf einander wirken und dass in Friedel und Silva's Versuch der Wassertropfen auch nur die Bildung einer Spur Alkohol in ihrem reinen Aether veranlasst habe.

2) Ber. d. deutsch chem. Ges. 1871 S. 672.

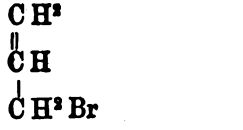
3) Leider erhielten wir nicht die von O. angegebene sehr günstige Ausbeute, sondern beträchlich weniger.

Aus theoretischen Gründen (s. u.) suchte
wir bei der Bereitung des Diallyls aus Allyl
bromür das Natrium zu vermeiden und deshal
die von Oppenheim für das Allyljodür gegeben
Methode womöglich auch auf das Allylbromü
anzuwenden. Zu diesem Zwecke erhitzten wi
10 grm. Allylbromür, 7 grm. Cyankalium, 10 grm
Quecksilber und 10—20 grm. Wasser im zu
geschmolzenen Rohr im Wasserbade. Das Queck
silber veränderte sich hierbei anscheinend nicht
wohl aber färbte sich der Inhalt des Rohre
tief braun. Beim Destilliren mit Wasser gin
eine nicht unbedeutende Menge eines farblose
Oeles über, welches für sich fast ganz zwische
110 und 120° destillirte, also, wie auch der Ge
ruch zeigte, nicht aus Diallyl sondern aus Al
lylcyanür bestand (Siedp. 118°). Die Reactio
ist also mit Umgehung des Quecksilbers au
die Weise erfolgt, dass sich einfach aus Allyl
bromür und Cyankalium Allylcyanür und Brom
kalium gebildet haben, und zwar entsteht au
Allylbromür derselbe Allycyanür wie au
Allyljodür.

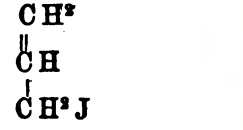
Nachdem gefunden war, dass bei Anwendun
von Natrium aus Allylbromür derselbe Diall
entsteht, wie aus Allyljodür, blieb noch di
Möglichkeit, dass bei Anwendung des von Wis
licenus eingeführten Entbromungsmittels nämlic
des feinvertheilten Silbers ein anderes Produc
sich aus dem Allylbromür bilde. Um dies z
prüfen, brachten wir 7 grm. Allylbromür un
8 grm. Silberpulver zusammen. Im ersten Au
genblick war die Reaction ziemlich heftig, s
dass Abkühlung nöthig wurde, doch verlangsamt
sie sich bald. Nach 12stündigem Erhitzen au
100° im zugeschmolzenen Rohr wurde abdestillir
und ein genau bei 58—60° siedendes Produc

erhalten, welches übrigens nach den Analysen noch etwas Brom enthielt, das erst durch wiederholtes Erhitzen mit Silber und zuletzt etwas Natrium entfernt werden konnte, wobei sich der Siedepunkt nicht änderte.

Auch in diesem Versuche ist also bei 58—60° siedendes Diallyl erhalten worden, und aus allen ergiebt sich, dass Allylbromür und = Jodür immer dasselbe Product liefern, sie folglich analog constituirt sind, nämlich die folgende Structur besitzen

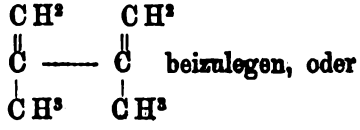


Allylbromür

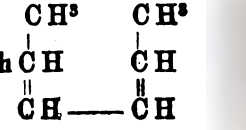


Allyljodür.

In sehr vielen verschiedenen Fällen hat sich gezeigt, dass die correspondirenden Allyl- und normalen Propylverbindung denselben Siedepunkt besitzen, und den Beweggrund zum genaueren Studium des Diallyls bildete die auffallende Thatsache, dass dasselbe bei 58—60° siedet, während normales Dipropyl bei 68—70° übergeht. Bei 58—60° siedet dagegen das von Schorlemmer wie von Silva untersuchte Diisopropyl. Es liegt folglich nahe, dem Diallyl eine dem Disopropyl analoge Structur, nämlich



beizulegen, oder auch



denn Körper von dieser Lagerung werden wahr-

scheinlich niedriger sieden als das Diprop
Sie können natürlich nur entstehen, wenn
dem Momente des Herausnehmens von Br u
J eine Umlagerung stattfindet, die man si
auf die Weise denken kann, dass das Natri
H Br abtrennt, dies unter H Abspaltung zerse
und der Wasserstoff sich an die vorher von
eingenommene Stelle bewegt (s. Kekulé l.
während die freigebliebenen Affinitäten z
Bindung zweier Molecüle verwandt werd
Eine ähnliche Anomalie der Siedepunkte, nä
lich die Thatsache, dass Methylallylbromür
niedriger siedet als das Aethylvinylbromi
folglich die beiden Kohlenwasserstoffe nic
identisch sind, worauf Wurtz und kürzlich Li
nemann[1]) aufmerksam gemacht haben, wür
bei Zulassung der zweiten oben angegeben
Formeln für das Diallyl verschwinden, denn we
sich aus Allyljodür vorübergehend die Grup

$$\begin{array}{l} CH^3 \\ | \\ CH \\ \| \\ CH \end{array}$$ bildet, so wird das Methylallyl zu $$\begin{array}{l} C \\ | \\ C \\ \| \\ C \\ | \\ C \end{array}$$

und natürlich verschieden vom Aethylvinyl od

$$\begin{array}{l} CH^3 \\ | \\ CH^2 \\ | \\ CH \\ \| \\ CH^2 \end{array}$$ (s. Linnemann l. c.)

Gegen die Annahme der oben beschriebene
Umlagerung sträubten wir uns anfangs, weil w
sie für unwahrscheinlich hielten, nachdem jedoc

1) Ann. Chem. Pharm. 161 S. 200.

Kekulé in einer nach Einreichung dieser Abhandlung erschienenen Arbeit [1]) die gleiche Umwandlung der Gruppe CH^2 $\overset{\|}{C}H$ $\overset{|}{C}H^2$ in CH^3 $\overset{|}{C}H$ $\overset{\|}{C}H$ nachgewiesen hat, und zwar in einem a priori ebenso unwahrscheinlichen Falle nämlich der Umwandlung von Allyljodür in Allylcyanür, liegt gegen unsere alle Wiedersprüche beseitigende Auffassung kein Bedenken vor.

Göttingen, 26. April 1873.

Verzeichniss der bei der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangenen Druckschriften.

April 1873.

Nature 174—180.

M. A. F. Prestel, der Boden, das Klima und die Witterung von Ostfriesland etc. Emden. 1872. 8.

Verhandlungen des naturf. Vereins zu Brünn. Bd. X. 1871. Brünn. 1872. 8.

Moritz Voigt, über den Bedeutungswechsel gewisser die Zurechnung und den ökonomischen Erfolg einer That bezeichnender technischer lateinischer Ausdrücke. Nr. 1. Leipzig. 1872. gr. 8.

Georg Voigt, Zug Karls V. gegen Tunis. 1515. Ebds. 1872. gr. 8.

A. Philippi, über die Römischen Triumphalreliefe. Nr. III. Ebds. 1872. gr. 8.

L. Lange, der Homerische Gebrauch der Partikel Eí. Ebds. 1872. gr. 8.

C. Bruhns, Längendifferenz zwischen Leipzig und Wien. Ebds. 1872. gr. 8.

W. G. Hankel, elektrische Untersuchungen. IX und X. Abth.

Berichte der mathem.-phys. Classe der Königl. Sächs Akademie der Wiss. zu Leipzig. 1871. IV. V. VI. VII.– 1872. I und II. Leipzig. 1872. 8.

Illustrated Catalogue of the Museum of Comparativ Zoölogy at Harvard College Cambridge, Mass; Nr. VI Parts I—II. With forty-nine plates. Cambridge 1872. 4.

Bulletin of the Museum of Comparative Zoölogy at Har vard College. Vol. III. Nr. 5. 6:

Alpheus Hyatt, Embryology.

J. A. Allen, notes of an ornithological Reconnoissanc of Portions of Kansas, Colorado, Wyoming an Utah. Cambridge. 8.

Actenstücke über die im Jahre 1874 projectirte englisch Polarexpedition via Smithsund. 8.

A. Kölliker, dritter Beitrag zur Lehre von der Ent wicklung der Knochen. 8.

M. C. Marignac, notices chimiques et cristallographi ques. 8.

Bulletin de la Société Imp. de Moscou. Année 1872 Nr. 3. Moscou. 1872. 8.

Bulletin de l'Académie R. des Sciences etc. de Belgique 42e année, 2e série, tome 35. Nr. 2. 3. Bruxelles 1873. 8.

Neues Lausitzisches Magazin, herausgeg. von E. E. Struve Bd. 49. Zweite Hälfte. Görlitz. 1872. 8.

Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft. Jahrg VIII. Hft. 1. Leipzig. 1873. 8.

Monatsbericht der königl. preuss. Akademie zu Berlin December 1872. Berlin. 1873. 8.

Tijdschrift von Indische Taal-Land- en Volkenkunde Deel XVIII. Aflevering. 5. 6.

Notalen. Deel X. 1872. Nr. 1. 2. 3. Batavia. 1872. 8

Verhandelingen van het Bataviaasch Genootschap va Kunsten en Wetenschappen. Deel XXXVI. Ebds 1872. gr. 8.

Sitzungsberichte der königl. böhmischen Gesellschaft de Wissenschaften in Prag. Nr. 1. 1873. 8.

Sitzungsberichte der physikalisch-medicinischen Gesell schaft in Würzburg für 1872. 8.

(Fortsetzung folgt).

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

11. Juni. № 13. 1873.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Ueber Fixstern-Systeme, Parallaxen und Bewegungen.

(Vorläufige Mittheilung).

Von

W. Klinkerfues.

Es ist eine schon vor beinahe hundert Jahren von John Michell und von William Herschel ausgesprochene Ansicht, dass die Fixsterne in Gruppen ziehen. Adoptirt ist dieselbe allgemein für solche Gruppen wie die Plejaden, Hyaden, Praesepe und andere, welche am Himmel einander benachbart erscheinen. Erst in neuester Zeit hat Proctor auf Gruppen von grösserer Ausdehnung mit gemeinschaftlicher Eigenbewegung aufmerksam gemacht, deren interessanteste durch die Sterne β, γ, δ, ε, ζ im grossen Bären gebildet wird. Die beiden äussersten Sterne dieser Gruppe, β und ζ, schliessen einen Bogen von etwa 20 Grad am Himmel ein. Darüber hinaus geht auch Proctor nicht; Huggins, welcher in dem Ergebniss seiner spectral-analy-

tischen Untersuchungen an genannten Sterne
eine Bestätigung der Proctor'schen Entdeckun
findet, spricht sogar ausdrücklich aus, dass ihn
die Sterne α und η des grossen Bären nich
mehr benachbart genug erscheinen, um dies
unter sich zu einem System rechnen zu können
Und doch beträgt der Bogen zwischen letztere
nur etwa 25°, d. h. nur 5° mehr als in der obi
gen Gruppe.

Es bedarf kaum einer Erörterung, dass di
scheinbare Nähe kein untrügliches Merkmal fü
die Möglichkeit abgeben kann, dass Sterne z
einem Systeme gehören; ich habe mir daher be
den Untersuchungen, deren Erstlingsresultat
ich hier geben will, und die in einer bald vor
zulegenden Schrift ausführlicher behandelt wer
den, keine Beschränkung solcher Art auferlegt
halte vielmehr die Ansicht für zulässig, das
Fixstern-Systeme sich durcheinander hindurch
schieben, ähnlich wie dies bei Meteorströmen de
Fall ist. Demgemäss ist denn auch meine Me-
thode des Suchens nach gemeinschaftlicher Ei
genbewegung eine andere, als die von Procto
befolgte, rein chartographische, bei welcher Rich-
tung und Grösse der Eigenbewegung durch Rich-
tung und Länge eines Pfeils angegeben werden
Ich berechne dagegen den Pol des grössten Krei-
ses, in welchen die Eigenbewegung fällt, um zu
sehen, ob eine Reihe von solchen Polen selbst
wieder in auffallender Weise einem grössten
Kreise nahe kommt. Der Pol des letzteren Krei-
ses ist eventuell sehr nahe gemeinschaftliche
Schnittpunkt der Convergenz oder Divergenz.

In genauer Copie derjenigen Betrachtungen
welche man zur Berechnung der Wahrscheinlich-
keit anstellt, dass einer auffallenden Anhäufung
von Sternen auf der Sphäre ein physisches

System entspreche, Betrachtungen, welche bekanntlich bei William Herschel's Entdeckung der wahren Bedeutung der Doppelsterne eine wichtige Rolle gespielt haben, wird hier aus der Anhäufung von Durchschnittspunkten die Wahrscheinlichkeit beurtheilt, dass letztere nicht rein zufällig sei, sondern dem Radiations-Punkte eines partiellen Systems entspreche. Es werden eben hier für die Sterne und ihre Vertheilung auf der Sphäre die Durchschnittspunkte der Eigenbewegungen und ihre Vertheilung, für das physische System der Radiationspunkt substituirt.

Der Radiationspunkt der Convergenz ist derjenige Punkt der Sphäre, welchem sich der scheinbare Ort zu einem Systeme gehörigen Sterne unausgesetzt und asymptotisch nähert, so lange nicht die Wirkung der beschleunigenden Kräfte merklich hervortritt. Dadurch unterscheidet sich der Radiationspunkt von einem einfachen Durchschnittspunkte der Convergenz, dass er die äusserste Grenze scheinbaren Bewegung vorstellt, welche niemals überschritten werden kann. Der Radiationspunkt der Convergenz ist aber zugleich der Zielpunkt derjenigen Richtung, in welche das Maximum der die Sonne fliehenden räumlichen Bewegung eines Sterns fällt, oder kurzweg das Maximum der relativen Geschwindigkeit, wenn man einer die Entfernung vergrössernden das positive Vorzeichen giebt. Gemeinschaftlicher Radiationspunkt bedeutet hier zwar Parallelismus, aber nicht Gleichheit der Bewegungen, indem die Radianten zweier oder mehrerer Systeme bloss optisch verbunden sein könnten. In der Praxis ist dies aber ebenso selten zu erwarten, als optisch verbundene Sternhaufen und Nebelflecke.

Der bedeutendste Unterschied zwischen den

Untersuchungen Proctor's und den meinige
zeigt sich aber darin, dass bei der ersteren da
Aufsuchen gemeinschaftlicher Bewegungen, we
nigstens bis jetzt noch als Ziel erscheint, be
welchem stehen geblieben wird, während mi
die Bestimmung von Parallaxen und Geschwin
digkeiten den Zweck der Untersuchungen aus
macht. Es lässt sich nämlich leicht zeigen, dass
wenn in einem Systeme eine einzige Geschwin
digkeit, gleichgiltig, ob in der Gesichtslinie ode
senkrecht dazu, oder eine Parallaxe, bekannt ge
worden ist, daraus die Parallaxen und die Ge
schwindigkeiten aller Sterne desselben System
nach jeder beliebigen Richtung zerlegt, folgen

Nach dem Grundsatze, dass alle Geschwin
digkeiten nur als relative zu betrachten sin
dass aber durch diesen Umstand nicht unstatt
haft wird, dass wir sie wie absolute projicire
und zerlegen, ist es erlaubt, die Bewegung de
Sonne auf die Sterne zu übertragen, indem ma
erstere in Ruhe denkt. Die Erscheinungen de
Eigenbewegungen gestalten sich dann genau ebe
so, als wenn die Sonne in absoluter Ruhe wär
und die Sterne eine absolute Bewegung in de
Richtung, in welcher wir den Radiationspunk
der Convergenz sehen, besässen. Die Erschei
nungen im wirklichen und fingirten Falle de
cken sich in jeder Beziehung so vollständig, das
ein Schluss auf das wirkliche Verhalten nur mi
Wahrscheinlichkeitsgründen zu führen ist. E
sei nun V die totale relative Geschwindigkei
zur Sonne, welche der Schwerpunkt eines Sy
stems von Sternen besitzt, Q und Q' seine be
ziehungsweise die Winkelabstände zweier Stern
des Systems vom Convergenzpunkte, π und π
deren Parallaxen, R und R' die Geschwindigke

ten im Visionsradius, E und E' die Eigenbewegungen, so hat man:

1) $$\frac{\pi'}{\pi} = \frac{E'}{E} \cdot \frac{\sin Q}{\sin Q'}$$

2) $$\frac{R'}{R} = \frac{\cos Q'}{\cos Q}$$

3) $$R \operatorname{tang} R = \frac{E}{\pi}, \quad R' \operatorname{tang} Q' = \frac{E'}{\pi'}$$

u. s. w.

In den Gleichungen 1) und 3) eröffnen sich zwei neue Wege zur Parallaxenbestimmung, wenn ein System vorliegt; der erste davon setzt die Kenntniss einer Parallaxe in dem System voraus, der zweite die Messung eines Werthes von R mittelst Spectral-Analyse, unter Anwendung des Doppler'schen Princips. Eine bemerkenswerthe Eigenthümlichkeit beider Bestimmungsarten ist es, dass die Kleinheit der Parallaxe kein so grosses und directes Hinderniss für deren Bestimmung mehr abgiebt, als sonst der Fall; dies giebt besonders von der spectral-analytischen Methode. Die letztere hat aber noch den besonderen Vorzug, dass sie absolute Parallaxen liefert, die man sonst bekanntlich nur sehr schwer erhalten kann.

Es hat sich mir, wie man später sehen wird, eine Gelegenheit geboten, Geschwindigkeiten, die aus Parallaxenwerthen sich ergaben, mit den Resultaten Huggins'scher Spectral-Untersuchungen zu vergleichen. Die Uebereinstimmung ist, die Schwierigkeiten der Messungen in Betracht gezogen, schon ziemlich befriedigend und ermuthigt zu der Hoffnung, auf diesem Wege bald durchaus schätzenswerthe Bestimmungen, auch von Parallaxen, gewinnen zu können.

Bei diesen Vergleichungen mit Huggins ist mir nun ein Umstand besonders aufgefallen, wie übrigens wohl Jedem, der auf das Tableau von Stern-Bewegungen in den Monthly Notices, Vol. 32, pag. 361 und 362 einen Blick geworfen hat; es sind nämlich darin durchschnittlich die fliehenden Bewegungen bedeutend kleiner als die Annäherungsbewegungen zur Sonne. Die selbstständige Bewegung dieser letzteren kann einen Unterschied dieser Art nicht hervorbringen, weil sie eben so oft die einen als die andern Bewegungen vergrössern wird, es sei denn, dass auch die Bewegungen der Fixsterne eine Tendenz zu einer bestimmten Richtung hätten. Ich möchte diesen Unterschied bis jetzt aber nicht für reell halten, bin vielmehr geneigt zu glauben, dass Huggins alle fliehenden Bewegungen zu klein, alle Annäherungs-Bewegungen zu gross gefunden hat, und zwar aus folgender Veranlassung. Seit Anwendung seines grösseren Fernrohrs von 15 Fuss Brennweite hat Huggins die Geissler'sche Röhre (vacuum tube), welche zur Vergleichung dient, so gestellt, dass ihre Axe mit der des Fernrohrs, also mit der Gesichtslinie, zusammenfällt[1]). Zum ersten Male vielleicht, seit Geissler'sche Röhren und der electrische Funken für Spectral-Analyse benutzt worden sind, bietet sich hier Gelegenheit zu der Frage, ob die Geschwindigkeit des electrischen Funkens so gering

1) In dem Berichte der Monthly Notices Vol. 32, heisst es wenigstens: He has therefore had holes drilled in the telescope tube, 30 inches from the focus, and causes a holder containing a vacuum tube to be placed exactly in the optical axis of the telescope. Es ist das gewiss etwas Anderes, als wenn gesagt wäre, dass der vacuum tube die optische Axe des Fernrohrs genau in der Mitte treffe.

ist, dass das Spectrum der Röhre ohne Bedenken als ein einem ruhenden Objecte entsprechendes angesehen werden darf. Das irdische Spectrum rührt hier ganz vorwiegend von dem metallischen Kernfunken her, der, wenn die *H*-Linie verglichen wird, an seinem jeweiligen Orte von einer sehr kleinen glühenden Wasserstoff-Atmosphäre umgeben ist. Alles, was wir bis jetzt vom Blitz und seiner Nachahmung in kleinstem Massstabe, dem electrischen Funken, wissen, lässt der Vermuthung Raum, dass die Ortsveränderung des Kernfunkens in einer Geissler'schen Röhre mit einer keineswegs ganz zu vernachlässigenden Geschwindigkeit vor sich geht; wenn jedoch, wie wohl fast immer bisher geschehen, der Funken nahezu senkrecht zur Gesichtslinie steht, kommt dieser Umstand nicht in Betracht, und es hätte daher nichts Auffallendes, wenn ein merklicher Unterschied dieses Ursprungs bisher unbemerkt geblieben wäre. Mittelst Commutators würde sich die in Rede stehende Correction eliminiren oder nachträglich auch vielleicht bestimmen lassen. Meine Versuche über diese Frage sind noch im Stadium der Vorbereitung. Dass die Huggins'schen Zahlen des neueren Arrangements einer Verbesserung der genannten Art bedürftig seien, machen auch andere Betrachtungen wahrscheinlich; dieselben gestatten zugleich die Grösse derselben, wenn auch nicht frei von allem Einwande, zu schätzen. Zuerst kann man Huggins frühere Messungen am Sirius, bei welchen die Vermuthung obiger Fehlerquelle nicht vorliegt, mit seinen späteren vergleichen. Es fand sich bei ersteren die Geschwindigkeit, mit welcher sich dieser Stern von der Sonne entfernt, 29,4 englische Meilen, bei den spätern dagegen, 18 bis

22, im Mittel also 20 englische Meilen. Hier
nach würde auf eine Correction von $x = +9$,
englische Meilen zu schliessen sein; doch ist
zu bedenken, dass die zufälligen Fehler der Hug
gins'schen Messungen ebenfalls eine solche Grö
sse erreichen. Bei der folgenden Herleitungs
weise der fraglichen Correction geht man ein
wenig sicherer, und es wird eine Schätzung des
wahrscheinlichen Fehlers des abgeleiteten Wer
thes möglich.

Bei der Bestimmung der Richtung der Son
nenbewegung ist man von der Annahme ausge
gangen, dass die individuellen Sternbewegunge
sich in ihrem Einflusse vernichten, wie es Be
obachtungsfehler thun, was an sich wahrschein
lich, nachträgliche Bestätigung in der Uebereins
stimmung der aus nördlichen und südlichen Ste
nen gezogenen Resultate gefunden hat. Be
zeichnet man nun den Betrag der Sonnenbewe
gung mit g, und multiplicirt dieselbe mit der
Cosinus des Winkelabstandes eines Sterns von
dem mittleren Convergenzpunkte, welcher der
Zielpunkte der Sonnenbewegung im Hercules
gegenüber liegt, so wird die Geschwindigkeit des
Sterns in der Gesichtslinie, bis auf eine der
Sterne zukommende individuelle Abweichung v
dargestellt werden. Nach der eben erwähnten
Annahme würde nun aber die Summe der für
eine hinreichend grosse Zahl von Sternen gebil
deten Producte $gv \cos Q$, d. h.:

$$\Sigma g v \cos Q$$

gleich null werden, und der wahrscheinlichste
Werth von g würde daher derjenige sein, wel
cher die Summe der Quadrate der anzunehmen
den individuellen Geschwindigkeiten, d. h. Σv^2

zu einem Minimum macht. Diesen Grundsatz kann man nun auf die Huggins'schen Messungen, unter Vorbehalt einer daran anzubringenden Verbesserung x, zur Anwendung bringen. Ausgeschlossen werden dürfen aber dabei solche Sterne, deren Eigenbewegung sie von dem mittleren Convergenzpunkte entfernt, bei welchen daher von vornherein sicher ist, dass sie eine Ausnahmestellung einnehmen. Es gilt dies hier von der Gruppe β, γ, δ, ε, ζ Ursae maj.

Indem ich den mittleren Convergenzpunkt der Mädler'schen Bestimmung gemäss annahm und die Abstände der Sterne von demselben, den Umständen gemäss, auf dem Globus mechanisch bestimmte, erhielt ich für x und g aus Huggins Messungen die folgenden 10 Bedingungsgleichungen, welchen hier ein verschiedenes Gewicht nicht beigelegt ist:

	Sirius	$0{,}893\,g$	$=$	$20 + x$
α	Orion	$0{,}659\,g$	$=$	$22 + x$
	Rigel	$0{,}857\,g$	$=$	$15 + x$
	Castor	$0{,}259\,g$	$=$	$25{,}5 + x$
	Regulus	$0{,}156\,g$	$=$	$14{,}5 + x$
	Arcturus	$-0{,}701\,g$	$=$	$-55 + x$
	Wega	$-0{,}978\,g$	$=$	$-49 + x$
α	Cygni	$-0{,}839\,g$	$=$	$-39 + x$
	Pollux	$+0{,}301\,g$	$=$	$-49 + x$
α	Urs. maj.	$-0{,}530\,g$	$=$	$-53{,}5 + x$

Die Zahlen der ersten Seiten sind die Bewegungen in der Secunde und in englischen Meilen. Σv^2 wird nun zu einem Mimimum gemacht, wenn

$$x = 15{,}31$$
$$g = 40{,}92$$

gesetzt wird. Eine Schätzung der wahrschein
lichen Fehler ist, trotz der geringen Anzahl de
untersuchten Sterne doch wohl nicht gänzlic
werthlos; diese Fehler werden beziehungswei
für x und g

$$\pm 5{,}57$$
$$\pm 6{,}61$$

also die Geschwindigkeit unserer Sonne im Fi
sternraume gleich

$40{,}92 \pm 6{,}61$ engl. oder $8{,}89 \pm 1{,}44$ geogr. Meile

In den Normalgleichungen obiger 10 Bedi
gungen erscheinen die Unbekannten x und
wie es in der Construction jener Gleichunge
begründet ist, beinahe getrennt, so dass ei
Aenderung der Annahme über x für g nahez
gleichgültig ist, und umgekehrt; nur dass d
wahrscheinlichen Fehler ohne die Voraussetzu
jener Verbesserung x grösser ausfallen würde
Will man nicht annehmen, dass die individue
len Sternbewegungen zu einer bestimmten Rich
tung hinneigen, was wenig zu den bisher a
diesem Gebiete gemachten Erfahrungen stimme
würde, so ist eine Verbesserung der Huggins
schen Messungen, nahezu von der obigen Grösse
nicht gut abzuweisen. Mit dieser wirkliche
oder vermeintlichen Verbesserung würden nu
aus Huggins Messungen folgende Werthe von
der Geschwindigkeit in der Gesichtslinie erhalte

Sirius	$+33{,}3$	bis	$+37{,}3$	engl. Meile
α Orionis		$+37{,}3$	»	»
Rigel		$+30{,}3$	»	»

Castor	+ 38,3	bis	+ 43,3	engl.	Meilen
Regulus	+ 27,3	»	+ 32,3	»	»
β Urs. maj.					
γ » »					
δ » »	+ 32,3	»	+ 36,3	»	»
ε » »					
ζ » »					
Arcturus	— 39,7			»	»
Wega	— 28,7	bis	— 38,7	»	»
α Cygni	— 23,7				
Pollux	— 33,7				
α Urs. maj.	— 30,7	bis	— 45,7	»	»

Man sieht auf den ersten Blick, dass in diesem corrigirten Tableau ein Uebergewicht der positiven über die negativen Werthe nicht mehr in auffallender Weise vorhanden ist. Ich werde diese Zahlen nun zur Illustration der Anwendungen der Gleichungen 1) und 3) benutzen.

Zuerst wandte ich meine Methode, gemeinschaftliche Durchschnittspunkte der Eigenbewegungen zu suchen, auf diejenigen der Bessel'schen Fundamentalsterne an, deren jährliche Eigenbewegung nach dem Mädler'schen Katalog Bradley'scher Sterne 0″,15 erreicht. Andere Neubestimmungen waren mir nicht zur Hand; auch gilt diese Quelle für die Eigenbewegungen als so zuverlässig, dass ich mich vorläufig ganz darauf beschränken durfte. Es zeigte sich nun sofort, dass die Eigenbewegungen von vier der hellsten Sterne des uns sichtbaren Himmels, nämlich von

Wega
Capella
Sirius
Fomalhaut

sehr nahe sich in einem Punkte der Kugel schneiden.

Der Durchschnittspunkt der Convergenz liegt unter:

$$AR. = 92^{\circ}32'4,. \quad \text{Decl.} = -32^{\circ}24',0$$

Ich stelle die daraus berechneten Positionswinkel der Eigenbewegungen und die beobachteten des Katalogs zur Vergleichung neben einander, unter Hinzufügung des Betrags der jährlichen Eigenbewegung:

	Ber. Pos. Winkl.	Beob. Pos. Winkl.	Eigenbeweg.
Wega	36°56',5	37°6'	0",349
Capella	166 11 ,8	166 0	0 ,438
Sirius	200 43 ,5	200 42	1 ,329
Fomalhaut	127 42 ,1	126 12	0 ,396

Um vollständige Uebereinstimmung der Positionswinkel zu haben, müssten an die Eigenbewegungen in den Coordinaten folgende Correctionen angebracht werden, deren Einheit, wie vorhin, die Bogensecunde ist:

Bei Wega	$\Delta\alpha = -0'',0015$	$\Delta\delta = +0'',0009$
» Capella	-0 ,0011	± 0 ,0000
» Sirius	± 0 ,0000	± 0 ,0000
» Fomalhaut	-0 ,0083	-0 ,0092

Es kommt nun darauf an, eine in der Praxis nicht allzuschwer zu handhabende Schätzung der Wahrscheinlichkeit zu gewinnen, dass die Uebereinstimmung kein Werk des Zufalls sei. Für diese Wahtscheinlichkeit nun kann die andere substituirt werden, dass der wahrscheinliche Fehler der Lage des Radiationspunktes, in einem grössten Kreise genommen, an Grösse den mitt-

leren gegenseitigen Abstand von Durchschnittspunkten der Convergenz in der Gegend des Radiationspunktes erreicht. Es ist klar, dass diese Convergenzpunkte näher an einander rücken werden, wenn die Entfernung vom mittleren Radiationspunkt kleiner wird; die Function, welche diese Verdichtung ausdrückt, kann freilich nur durch eine sehr langwierige Untersuchung der Vertheilung der Convergenzpunkte auf der Sphäre mit hinreichender Sicherheit ermittelt werden. Man kann hier von der letzteren Forderung aber deswegen absehen, weil es vorzüglich darauf ankommt, dass nicht Zufall, sondern Causal-Nexus die besondere Anhäufung bewirkt, und weil, wenn aus einem besonders kleinen wahrscheinlichen Fehler auf Causal-Nexus zu schliessen ist, kaum noch ein Zweifel obwalten kann, worin derselbe besteht. Es ist nun hier nicht zu übersehen, dass der wahrscheinliche Fehler eine analytische und numerische angebbare Grösse vorstellt, welche als Maass für die Verdichtung in gleichem Grade brauchbar ist, ob viele oder ob wenige Durchschnittspunkte in Frage kommen, also z. B. auch dann, wenn nur drei Sterne a, b und c untersucht werden; bei bloss zwei Sternen wird nach der Natur der Sache jener Fehler unbestimmbar. Die Zulässigkeit aber, den wahrscheinlichen Fehler in der eben angegebenen Weise zu gebrauchen, ist unabhängig von der Frage nach der Realität des betreffenden Systems; denn man kann sagen: ein derartiges System existirt gewiss, aber mit welchen individuellen Unterschieden in den Bewegungen der einzelnen Sterne, das ist die Frage. Dem sachlichen Inhalte nach drückt es dasselbe aus, ob angenommen wird Existenz des Systems, aber mit sehr starken Individualitäten, d. h. gro-

ssen Beobachtungsfehlern, oder ob dieselbe geleugnet wird, der Unterschied zwischen System und Nicht-System, kann immer, statt als ein spezifischer, als ein gradativer aufgefasst werden. Die Sicherheit von Folgerungen für Parallaxen und Geschwindigkeit hängt aber stets von der Grösse des wahrscheinlichen Fehlers ab; je kleiner derselbe wird, desto seltener wird man durchschnittlich einen Irrthum begehen. Von der Wahrscheinlichkeit des Systems selbst ist natürlich die, dass ein bestimmter Stern dazu gehöre, wohl zu unterscheiden; letztere ist nach der Stärke der Individualität zu beurtheilen, welche sich in der Eigenbewegung desselben äussert.

Bei obigen vier Sternen ergiebt sich der wahrscheinliche Fehler in der Lage des Radianten mit Rücksicht auf die verschiedene Grösse der Eigenbewegungen nahezu $^1/_6$ Grad. Unter den Bessel'schen Fundamentalsternen erreichen nun überhaupt nur 21 eine Eigenbewegung über 0″,15 jährlich; es entsprechen denselben 210 Durchschnittspunkte der Convergenz, so dass bei gleichmässiger Vertheilung derselben auf je 62,53 Quadratgrade der Kugel ein einziger Durchschnittspunkt fallen würde. Diese Vergleichung ist zu Gunsten der Wahrscheinlichkeit, dass Wega, Capella, Sirius und Fomalhaut entweder zu einem System gehören, oder doch ihre Bewegungen so beschaffen sind, als wenn dies der Fall wäre. Für die praktischen Folgerungen, die ich ziehe, kommt Beides auf das Nämliche hinaus.

Die Abstände der Sterne von ihrem Radiationspunkt der Convergenz unter 92°32′,4 der *AR* und 32°24′,0 südlicher Declinat. (Aeq. von 1850,0) sind nun

bei	Wega	127°21',0
»	Capella	79 35 ,4
»	Sirius	17 8 ,1
»	Fomalhaut	90 57, 7,

daher ergiebt die Gleichung 1)

Parallaxe von Capella = 0,16987 mal Parallaxe von Wega.
Parallaxe von Sirius = 1,7205 mal Parallaxe von Wega.
Parallaxe von Fomalhaut = 0,15107 mal Parallaxe von Wega.

Die Parallaxe von Wega ist von mehreren der ausgezeichnetsten Beobachter fast ganz übereinstimmend gemessen worden, so dass die Annahme

Parallaxe von Wega = 0″,180 w. F. = ± 0″,008

grosses Vertrauen verdient. Hieraus ergiebt sich dann

Parallaxe	von	Capella	= 0″,0306 ± 0″,0014
»	»	Sirius	= 0 ,3097 ± 0 ,0138
»	»	Fomalhaut	= 0 ,0272 ± 0 ,0012

Die Bestimmung dieser letztern wahrscheinlichen Fehler ist nicht ganz streng, aber doch hinreichend genähert. Die Werthe für Capella und Fomalhaut bedeuten so viel, als dass diese Parallaxen für die gewöhnliche directe Bestimmung unmerklich sind, was mit der bisherigen Erfahrung im Einklange ist. Der für Sirius erhaltene Werth unterscheidet sich von demjenigen, welchen Gyldén aus Reduction der Ma-

clear'schen Beobachtungen abgeleitet hat, näm
lich:

$$0'',193 \pm 0'',087$$

bis auf nahezu die Summe der beiderseitige
wahrscheinlichen Fehler. Es ist also hier we
nigstens kein Widerspruch vorhanden. Im Ue
brigen scheinen mir aber Gründe, welche ausser
halb der Gyldén'schen Rechnung liegen, für ei
nen wirklich wohl etwas grösseren Werth de
Sirius-Parallaxe, als der letzerwähnte, zu spre
chen. Abgesehen davon, dass Maclear selbs
früher 0'',23 gefunden hat, liegt es auch ziem
lich nahe zu vermuthen, dass die Bestimmung
der Masse des lichtschwachen Begleiters de
Sirius vorzüglich deshalb auf die ungewöhn
liche und bis jetzt nicht gerade wahrscheinliche
Grösse von 6,71 Sonnen-Massen geführt hat
weil eben eine zu kleine Parallaxe zu Grunde
gelegt ist. Legt man der Massenbestimmung
den Werth 0'',3097 für die Parallaxe zu Grunde
so erhält man die nach meiner Meinung wahr
scheinlicheren Werthe:

Masse des Sirius = 3,3165 Sonnen-Massen
» » Begleiters = 1,6240 » »

Ich gehe nun zu der Bestimmung der Ge
schwindigkeiten der Sterne und ihre Vergleï
chung mit Huggins'schen Messungen über.

Es sei P die zum Gesichtsradius senkrechte
Geschwindigkeit in englischen Meilen, E die jähr
liche Eigenbewegung, so ist unter Zugrundele
gung des Werthes von

91,520000 engl. oder 19,884000 geogr. Meilen

für den Halbmesser der Erdbahn:

$$\log. P = 0{,}46242 + \log. \frac{E}{\pi}.$$

Bei Wega ergiebt sich

$$P = 5{,}6231$$

die nach dem Convergenzpunkte gerichtete Geschwindigkeit

$$V = 42{,}241$$

die Geschwindigkeit im Visionsradius

$$R = V \cos. Q = -41{,}856.$$

Bei dem Sirius ergiebt sich die Geschwindigkeit im Visions-Radius, da sein Werth von $Q = 17°8',1$ ist, gleich

$$+40{,}366 \text{ engl. Meilen.}$$

Aus den Huggins'schen Messungen fand ich oben diese Geschwindigkeiten im Visions-Radius

bei Wega $-28{,}7$ bis $-38{,}7$ engl. Meilen
» Sirius $+33{,}3$ » $+37{,}3$ » »

Die Uebereinstimmung ist gut, kann aber allerdings, da letztere Zahlen nicht die unmittelbare Angabe von Huggins sind, sondern erst durch eine Correction erhalten wurden, auch leicht als eine künstliche, gemachte, erscheinen.

Um auch ein Beispiel der Anwendung von Gleichung 3) zur Bestimmung von absoluten Parallaxen aus der Spectral-Analyse zu geben, behandele ich das System β, γ, δ, ε, ζ Urs. maj. Grosse Sicherheit kann hier vorläufig aus nahe

liegenden Gründen nicht gewonnen werden, be
sonders deshalb, weil vier von diesen Sternen
nämlich β, δ, ε, ζ sehr nahe in der Richtun
ihrer Eigenbewegungen gruppirt sind, die Ei
genbewegungen sich demnach unter sehr spitze
Winkeln schneiden, und noch dazu diese Bewe
gungen ziemlich klein sind. Dies Alles erschwer
die Bestimmung des Radiationspunktes und mach
dieselbe unsicher; ein paar Combinationen füh
ren sogar auf Lagen des Radianten, die mit de
Zusammengehörigkeit zu einem System sich durch
aus nicht vertragen würden, indem einige Stern
des Systems sich ihm näherten, während ander
sich entfernen.

Nach Mädler's Katalog sind die jährliche
Eigenbewegungen und Positionswinkel

bei	β	Urs.	maj.	0″,084	90° 0′
»	γ	»	»	0 ,110	87 24
»	δ	»	»	0 ,150	99 36
»	ε	»	»	0 ,149	107 18
»	ζ	»	»	0 ,171	109 6

Die Lage des Radianten der Convergenz er
giebt sich im Mittel aus den Combinationen
und β, γ und δ, γ und ε, γ und ζ wie folgt:

Rectascension $= 218°53'$. Decl. $= +44°29'$

und die einzelnen Abstände von diesem Punkte
oder die Werthe von Q:

für	β	$Q =$	36°13′
»	γ	»	28 48
»	δ	»	26 15
»	ε	»	20 53
»	ζ	»	16 40

Die totalen Geschwindigkeiten, relativ zur Sonne, ergeben sich aus Huggins Messungen, wieder mit Anbringung der hypothetischen Verbesserung, der Reihe nach zu:

$$\left.\begin{array}{rcl} 40{,}04 & \text{bis} & 44{,}99 \\ 36{,}86 & \text{»} & 41{,}42 \\ 36{,}01 & \text{»} & 40{,}47 \\ 34{,}57 & \text{»} & 38{,}85 \\ 33{,}72 & \text{»} & 37{,}89 \end{array}\right\} \text{engl. Meilen,}$$

im Mittel zu 36,24 bis 40,27 engl. Meilen. Als Werthe von P, d. h. der transversalen Geschwindigkeiten, ergeben sich hieraus:

$$\left.\begin{array}{rcl} 21{,}41 & \text{bis} & 23{,}79 \\ 17{,}46 & \text{»} & 19{,}40 \\ 16{,}03 & \text{»} & 17{,}81 \\ 12{,}92 & \text{»} & 14{,}35 \\ 10{;}39 & \text{»} & 11{,}55 \end{array}\right\} \text{engl. Meilen.}$$

Es ist nun:

$$\log. \frac{\pi}{E} = 0{,}46242 - \log. P$$

und es ergeben sich daher folgende absolute Parallaxen:

für	β	Urs.	maj.	. . .	0″,0102	bis	0″,0114
»	γ	»	»	. . .	0 ,0164	»	0 ,0183
»	δ	»	»	. . .	0 ,0244	»	0 ,0271
»	ε	»	»	. . .	0 ,0301	»	0 ,0334
»	ζ	»	»	. . .	0 ,0429	»	0 ,0477

An dem Verhältniss dieser Parallaxen zu einander lässt sich nicht wesentlich ändern, wenigstens nicht in gleichmachendem Sinne, sollen

nicht die Huggins'schen Messungen gleichsa
cassirt werden. Der Radiationspunkt der Co
vergenz liegt vielleicht der Gruppe näher, mu
aber im Osten derselben bleiben, weil er nic
innerhalb und nicht westlich derselben lieg
kann; in letzterm Falle würde er nicht mehr d
Convergenzpunkt bleiben können, die Werth
von Q würden, einige oder alle, in den zweite
Quadranten fallen, und die Bewegungen im G
sichtsradius könnten nicht mehr sämmtlich fli
hende sein. Würden aber die Werthe von
näher gleich 90°, wobei dann die Parallaxen u
gefähr im Verhältniss der Eigenbewegung st
hen würden, so könnten die Bewegungen i
Gesichtsradius von Huggins nicht mehr nah
gleich gefunden worden sein. Weil nun ab
die obigen Parallaxen dem System eine sehr b
deutende Ausdehnung im Raum geben würde
halte ich dafür, dass der Radiationspunkt d
Convergenz in Wirklichkeit der Gruppe etw
näher liegen dürfte, als der oben angenommen
Hierbei würden dann die Parallaxen grösse
werden, besonders die von ζ Urs. maj., die vie
leicht, trotz der nicht starken Eigenbewegun
eine durchaus merkliche ist[1]). Auch die b
kanntlich sehr langsame Umlaufsbewegung d
nächsten Begleiters von ζ Urs. maj. kann nic
als entscheidendes Argument für die Kleinhe
der Parallaxe geltend gemacht werden, weil d
Projectionswinkel zwischen dem Radius Vect
und der Distanz (14″) uns ja gänzlich unb

1) Nur die relativen Parallaxen von Mizar und Alc
zu einander sind gemessen und zum Beweise, dass d
Instrument (das Königsberger Heliometer) richtige Res
tate liefert', gleich Null gefunden worden. Bekanntli
sind genannte Sterne physisch verbunden, auch hat M
zar noch einen andern Begleiter von 14″ Distanz.

kannt ist, der Radius Vector also recht gut sehr viel grösser sein kann. Es könnte daher leicht sein, dass der Versuch, die Parallaxe direct zu messen, sei es nun am Hauptstern, oder am nächsten Begleiter, oder an Alcor, sich als lohnend erweise.

Da bei diesen Sternen das Zusammenrücken der Durchschnittspunkte keineswegs so sehr auffallend wird, so musste die Spectral-Analyse als eine wesentliche Stütze für die Zusammengehörigkeit herangezogen werden, jedoch in noch etwas anderer Weise, als ich dies bisher gefunden habe. Nach den oben angestellten Betrachtungen ist durchaus nicht erforderlich, dass die Geschwindigkeiten im Visions-Radius gleich werden; sie können sogar bei einigen Sternen des Systems das positive, bei andern das negative Vorzeichen haben, je nachdem dieselben dem Convergenzpunkte oder dem Divergenzpunkte näher stehen. Es ist deshalb vor allen Dingen, bei Fällen wie der vorliegende, zu untersuchen, ob sich der Convergenzpunkt nicht wenigstens annäherungsweise bestimmen lässt, und wenn dies, wie hier, möglich ist, ob die Bewegungen das richtige Vorzeichen haben. Die Wahrscheinlichkeit, dass bei nSternen das Vorzeichen durch Zufall so gefunden wird, wie es die Hypothese verlangt, ist gleich $(\frac{1}{2})^n$, daher die Wahrscheinlichkeit der Hypothese, nach dem Ergebniss der Spectral-Analyse bei blosser Berücksichtigung des Vorzeichens beurtheilt, gleich $1-(\frac{1}{2})^n$. Letztere Wahrscheinlichkeit wird daher im gegenwärtigen Falle gleich $\frac{3}{4}\frac{1}{2}$, wenn man für gewiss ansieht, dass alle Sterne vom Convergenzpunkt weniger als 90^0 entfernt sind. Kann man über die Lage der beiden Radianten aber nicht ein-

mal so viel ermitteln, so sieht es mit der Hypothese überhaupt misslich aus.

Mit Recht legt Huggins Gewicht auf den Umstand, dass die Spectra von β, γ, δ, ε, ζ Urs. maj. einem und demselben Typus angehören als Vorbedingung der Zusammengehörigkeit; möchte ich jedoch die Uebereinstimmung dieser Art nicht betrachten, angesichts der oft so bedeutenden Farben-Unterschiede der Doppelstern-Componenten.

Schliesslich habe ich noch Einiges über Anwendungen der Gleichung 1) zu sagen. Wie schon bemerkt, ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein bestimmter Stern zu einem bestimmten Radianten gehört, von der Wahrscheinlichkeit, dass ein partielles System vorliege, zu unterscheiden. Ist doch auch z. B. die Wahrscheinlichkeit, dass Aldebaran ein Glied des Hyadensystems sei, verschwindend klein gegen die Wahrscheinlichkeit, dass letzteres System überhaupt existire. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Stern zu einem gegebenen Radianten der Convergenz gehöre, ist abhängig von der Fläche des Kugelzweiecks, welches zwischen dem berechneten und dem beobachteten Positionswinkel liegt, (wobei jedoch der wahrscheinliche Fehler der Beobachtung berücksichtigt werden muss, um nicht auf absurde Resultate geführt zu werden) specieller von dem Inhalte an Radianten, welcher im Mittel einem solchen Streifen zukommt, für eine bestimmte Kategorie genommen.

Die vollständige Durchführung dieser ganzen Wahrscheinlichkeitsberechnung wird aber sehr mühsam, wenn nicht vorher die Untersuchung über die Vertheilung der Durchschnittspunkte ihre Erledigung gefunden hat. Am besten würde dies durch einen Catalog von Durchschnitts-

punkten der gut bekannten Eigenbewegungen geschehen.

Vorläufig kann nur als Princip für die Berechnung der gesuchten Wahrscheinlichkeit, dass ein Stern zu einem bestimmten Systeme gehöre, ausgesprochen werden. Diese Grösse ist proportional der Wahrscheinlichkeit, dass die übrigen Sterne des Systems in dem Kugelstreifen ihren Radianten haben und dass nicht noch zufällig ein anderer voller Radiant in diese Fläche falle.

Dieses Princip lässt nun auch eine Anwendung auf diejenigen Sterne zu, deren starke Eigenbewegung nach dem mittleren Convergenzpunkte unter

$$AR = 81^{0}39' \quad \text{Decl.} = -39^{0}54'$$

gerichtet ist. Von solchen Sternen wird es wahrscheinlich, dass sie zu denen von schwächster individueller Bewegung unter den Fixsternen gehören und dass ihre Eigenbewegung ganz oder zum allergrössten Theile von der Bewegung der Sonne herrührt. Man kann auch in einem solchen System nach Gleichung 1) Parallaxen-Verhältnisse schätzen, oder auch nach 3) Messungen aus der Spectral-Analyse benutzen, letztere aber auch durch eine Annahme über die Geschwindigkeit der Sonne ersetzen. Ein heuristischer Werth dürfte dieser letzteren Art des Schätzens von Parallaxen wohl nicht abzusprechen sein, und ich werde sie daher ebenfalls durch ein Beispiel illustriren.

Die Eigenbewegungen von 54 Cassiop., ω Drac., p Ophiuchi und 61 Virgin. haben unter anderen die genannte Eigenschaft. Die Abstände vom mittleren Convergenzpunkte finde ich beziehungsweise

116°56′	bei der	Eigenbewegung	0″,387
151 3	»	»	»	0 ,295

141°59 bei der Eigenbewegung 1″,108
97 22 » » » 1 ,449

Setzen wir nun die Sonnenbewegung, u
consequent zu bleiben, wie oben, gleich 40,9
± 6,61 engl. Meilen, so kommen wir auf folgend
Werthe der Transversalgeschwindigkeiten P:

18,53 ± 2,99 engl. Meilen
19,81 ± 3,20 » »
25,20 ± 4,07 » »
40,58 ± 6,56 » »

wornach die Parallaxen wahrscheinlich liege
würden:

für 54 Cassiop. zwischen 0″,0522 und 0″,072
» ω Drac. » 0 ,0412 » 0 ,057
» p Ophiuchi » 0 ,1098 » 0 ,152
» 61 Virgin. » 0 ,0891 » 0 ,123

Vortreffliche, sehr sichere Messungen der P
rallaxe von p. Ophiuchi hat Krüger am Heli
meter der Bonner Sternwarte ausgeführt un
als Werth derselben

0″,162 mit dem wahrscheinlichen Fehler ± 0″,007

abgeleitet. Sollte die vorhergehende Rechnun
ebenfalls diesen Werth geben, so musste die a
genommene Sonnenbewegung um nahe 1/5 ihre
Betrages vermindert und zu

32,21 engl. oder 6,997 geogr. Meilen

angenommen werden. Diese Vergleichung mac
es wahrscheinlich, dass auch die Parallaxe vo
61 Virginis merklich ist und nahezu 1/5 Secund
erreicht. Es wäre sehr verdienstlich, wenn a
südlichen Sternwarten genannter Stern in let
terer Hinsicht untersucht würde; für Mittel-Eu
ropa ist seine Declination einem solchen Unte
nehmen wenig günstig.

Göttingen, den 3. Mai 1873.

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

18. Juni. № 14. 1873.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Beiträge zur Symbolik der Griechen und Römer.

Von

Friedrich Wieseler.

I.

Ein eigenthümliches Sühnopfer.

Bei Laurentius Lydus de mens. IV, 45 steht geschrieben: *ἐν δὲ τῇ Κύπρῳ πρόβατον κωδίῳ ἐσκεπασμένον συνέθυον τῇ Ἀφροδίτῃ· ὁ δὲ τρόπος τῆς ἱερατείας ἐν τῇ Κύπρῳ ἀπὸ τῆς Κορίνθου παρῆλθέ ποτε.* Es ist auffallend, dass Niemand an diesen Worten Anstoss genommen hat, weder einer der Herausgeber, noch W. Engel Kypros II, S. 263 fg., noch Adam Flasch Angebliche Argonautenbilder, München 1870, S. 7 fg., der seltsamerweise dieselben anführt, um die Beziehung bildlicher Darstellungen einer auf einem Widder sitzenden Frau auf Aphrodite zu bestätigen. Was soll denn *συνέθυον* bedeuten? Fasste man es etwa in der Bedeutung »sie opfer-

ten zugleich mit der Hera« oder »ebenso wie der Hera«? Unmittelbar vorher heisst es: *ἐτιμᾶτο δὲ ἡ Ἀφροδίτη τοῖς αὐτοῖς, οἷς καὶ ἡ Ἥρα.* Aber es liegt ja — um Anderes zu geschweigen — klar zu Tage, dass die obigen Worte einen Gegensatz zu diesen bilden sollen. Was hat es ferner für eine Bewandtniss mit dem Ausdruck *πρόβατον κωδίῳ ἐσκεπασμένον*? Kann damit gesagt sein sollen, »dass man der Aphrodite auf Kypros gern ein Schaaf mit einem wolligen Fliess opfere« (Engel a. a. O. S. 155)? Die Worte können doch nur bedeuten, dass das Schaf mit einem anderen Schaf- oder einem Widderfelle bedeckt gewesen sei; und das wäre mehr als auffallend. Ohne Zweifel ist die Stelle verderbt und zu lesen: *προβάτου κωδίῳ ἐσκεπασμένον σῦν ἔθυον.* Ueber Schweineopfer an Aphrodite, namentlich auf Kypros, genügt es auf Engel a. a. O. S. 155 fg. zu verweisen. Das Bedecken des zu opfernden Ebers mit einem Fell jener Art ist sehr merkwürdig. Man erinnert sich unwillkürlich daran, dass bei einem feierlichen Bittgang zu Zeus Aktaios auf dem Pelion *τῶν πολιτῶν οἱ ἐπιφανέστατοι καὶ ταῖς ἡλικίαις ἀκμάζοντες* erschienen *ἐνεζωσμένοι κώδια τρίποκα καινά* (Dicaearch. p. 408 ed. Fuhr, Fragm. histor. ed. C. Müller II, p. 262). Vgl. auch Engel a. a. O. S. 264. Dass der Eber sich auf den beziehe, durch welchen Adonis gefallen sein sollte, bemerkte schon Engel a. a. O. S. 156.

II.

Ueber den Schmuck am Gewande des Pheidias'schen Zeus.

Bei Pausanias V, 11, 1 wird in Beziehung auf Pheidias' goldelfenbeinernes Bild des Zeus

zu Olympia gesagt: *τῷ δὲ ἱματίῳ ζῴδια τε καὶ τῶν ἀνθέων τὰ κρίνα ἐστὶν ἐμπεποιημένα.* Man beruhigt sich jetzt bei der handschriftlichen Lesart *κρίνα,* auch Overbeck, zuletzt in der Griech. Kunstmyth. I, S. 561 fg., Anm. 46. Aber galten denn die Lilien absolut als die schönsten und prächtigsten aller Blumen?[1]). Und wenn dem keineswegs so ist, lässt sich etwa eine specielle Beziehung der *κρίνα* zu Zeus nachweisen? Warum wurde ferner von den Blumen nur eine Gattung gewählt[2]), während doch von »Thieren« die Rede ist, was offenbar auf verschiedene Arten deutet, und *τὸ σκῆπτρον μετάλλοις τοῖς πᾶσιν ἠνθισμένον* war? Auch hätte man gern ein Adjectivum, welches zugleich eine genauere Bestimmung zu *ζῴδια* böte. Ich meines Theils zweifele nicht, dass zu lesen ist: *τὰ κρεί-σσονα,* »die vorzüglicheren, angeseheneren«. Der Fehler entstand, indem geschrieben war: *κρεινα.*

σσον

III.

Ueber den Eichenkranz bei Zeus (Juppiter) hat zuletzt Overbeck Griech. Kunstmyth. I, S. 231 in verdienstlicher Weise ausführlich und eingehend gesprochen. Nichts destoweniger sind noch manche Punkte dunkel geblieben.

Overbeck bemüht sich darzuthun, dass der Eichenkranz wesentlich locale Beziehung habe, und die mit demselben versehenen bildlichen Darstellungen des Zeus möglichst auf den Gott von Dodona zurückzuführen. Selbst der Juppiter auf dem zuletzt von mir in den Denkm. d. a. Kunst II, 66, 841 herausgegebenen und behandelten Sarkophagrelief zu Neapel soll der Dodonäische sein.

Es kann aber kaum einem Zweifel unterliege
dass in der späteren Griechisch-Römischen Kun
der Eichenkranz keineswegs auch nur hauptsäc
lich zur Bezeichnung des Gottes von Dodon
dient. Ein von Overbeck nicht beachtetes wich
tiges Zeugniss lehrt ihn uns ausdrücklich a
Attribut des Juppiter Victor kennen. Ja
giebt noch eine ebenfalls von Overbeck übers
hene Schriftstelle, aus welcher mit grösster Wah
scheinlichkeit geschlossen werden kann, dass d
Eichenkranz schon in früherer Zeit einem ba
barisch-hellenischen Gotte, dem Zeus Stratio
als Attribut gegeben wurde, dass wenigstens d
Eiche diesem heilig war.

Diese Stelle ist die des Plinius Nat. his
XVI, 239: In Ponto circa Heracleam arae su
Jovis *Σιραῖον* cognomine; ibi quercus dua
ab Hercule satae. Das erst erwähnte Zeugni
findet sich in einer Inschrift von Constanti
(Cirta), welche zuletzt herausgegeben ist vo
W. Fröhner Mus. impér. du Louvre, Notice
la sculpt. ant., Vol. I, n. 29, p. 59 fg.: Jov
Victor argenteus in Kapitolio, habens in capi
coronam argenteam querqueam folior. XXX,
qua glandes n. XV.

Schon Preller bemerkte Röm. Mythol. S. 17
Anm. 2, d. erst. Ausg., dass man ohne Zweif
ein Vorbild des Römischen Capitols anzunehme
habe. Hienach kann man geneigt sein, die cy
lindrische Ara bei Clarac Mus. de sc. pl. 25
570, zuletzt besprochen von Fröhner a. a. O.
40, S. 70 fg., auf den Juppiter Victor zu bezi
hen, da an derselben ein Adler mit ausgebreit
ten Flügeln auf einem Eichenkranze mit lemnis
dargestellt ist[3]).

Freilich steht das keineswegs ganz siche
Es ist nach Livius I, 10 durchaus nicht unwah

scheinlich, dass auch einem anderen kriegerischen Juppiter Roms, dem Feretrius, die Eiche (quercus) geheiligt war.

Dazu kommt der Juppiter Capitolinus selbst. Dass diesem die Eiche heilig war, dass ein Eichenkranz in dem Capitolinischen Agon als Kampfpreis gegeben wurde, steht fest. Wir haben aber in diesen Nachrichten 1872, S. 276 fg. noch ausserdem darzuthun versucht, dass auch die beiden wichtigsten Juppiterstatuen des Capitolinischen Tempels mit dem Eichenkranze geschmückt waren, die eine wenigstens ursprünglich, und vielleicht neben dem Lorbeerkranz oder der Binde auch noch später dann und wann[4]).

Dass auch Juppiter Capitolinus als ein Sieg und Triumph verleihender Gott gedacht wurde, und zwar als der allerbedeutendste dieser Art, zeigen namentlich seine Feste (Preller a. a. O. S. 204). Wer das von Preller a. a. O. S. 202 fg. über die Capitolinischen Spiele vor Domitian Bemerkte billigt, wird geneigt sein, den bei ihnen gegebenen Preiskranz aus Eichenblättern ganz im Besonderen auf Sieg und Triumph zu beziehen.

Mit dem Juppiter Capitolinus stehen auch in Verbindung die bekannten Etruscae coronae (K. O. Müller »Die Etrusker« I, S. 137 fg.), welche Tertullianus de coron. 13, Vol. II, 284 ed. Oehler, ausdrücklich als gemmis et foliis ex auro quercinis ob Jovem insignes bezeichnet.

Die Etrusca corona ist ganz deutlich ein Kranz, der sich auf Sieg und auf Herrschaft bezieht[5]), Begriffe, die unzertrennlich sind, und so auch in den Sagen von Zeus und in der Symbolik seines Cultus hervortreten.

Zeus gelangt zur Herrschaft durch den Sieg über die Titanen oder, nach der späteren An-

überträgt, so läge es doch viel näher an de
in Asien an mehreren Stellen verehrten Zeu
Stratios zu denken, bei dem wir oben S. 36
zu Herakleia die Eiche nachgewiesen haben.

Aller Wahrscheinlichkeit nach war übrigen
die Eiche, um welche es sich hier handelt, quer
cus esculus oder aegilops, in Asien keineswege
auf den Zeus Stratios und Nikephoros beschränkt
Schon J. Grimm stellte in der Deutschen Myth
S. 168 Zeus' »in der Ilias oft genannte Buch
bei Troja« neben seine δρῦς zu Dodona un
Overbeck hat S. 241 bemerkt, dass die Stelle
der Ilias V, 692 fg. und VII, 59 fg. auf di
Annahme führen können, dass die Buche (φη
γός) dem Idäischen Zeus heilig gewesen sei
Dass Zeus dem Herrscher vom Ida in der Troa
die Eiche (δρῦς) heilig war, lässt sich auch dar
aus mit Wahrscheinlichkeit schliessen, dass de
Cult auf dieser Ida dem auf der Kretensischen
entspricht, die noch von Dionysius Perieg. Vs
503 als καλλικόμοισιν ὑπὸ δρυσὶ τηλεθόωσα be
zeichnet wird, und dass er an beiden Stätten
mit dem der Rhea in Verbindung stand, welche
nach Apollodor die Eiche besonders heilig wa
(Schol. zu Apollon. Rhod. I, 1124)[9]).

Auch im eigentlichen Griechenland lassen
sich Spuren der Eiche bei Zeus auch anderswo
als in Thessalien und zu Dodona nachweisen
In Lakonien wurde Ζεὺς unter dem Beinamen
Σκοτινᾶς oder Σκοτίνας und Σκοτίτας in einem
dichten Eichenhaine verehrt, vgl. Pausan. III
10, 6, Polyb. XVI, 37, 3, Stephan. Byzant. u
d. W. Σκοτίνα. Die Beziehung dieses Zeus, wel
chen Panofka in Gerhard's Arch. Ztg. VII, S
73 fg. selbst auf einem Vasenbilde dargestell
erachtete, steht freilich keineswegs ganz sicher
Welcker dachte in der Griech. Götterl. II, S

486 an einen Zeus Chthonios. Doch hat es sicherlich wenigstens eben so viel für sich, den Beinamen auf den Veranlasser des *σκοτόεν νέφος* (Hesiod. Op. 553) zu beziehen, so dass also jener zusammenzustellen ist mit den Epitheta *κελαινεφης* und *νεφεληγερέτης* und im Gegensatz steht zu dem Epith. *αἴθριος*. Dann vergleiche man was Pausanias VIII, 38, 3 über *τῆς Ἀγνοῦς ἐν τῷ ὄρει τῷ Λυκαίῳ πηγὴ* sagt: *πέφυκεν ἴσον παρέχεσθαι τὸ ὕδωρ ἐν χειμῶνι ὁμοίως καὶ ἐν ὥρᾳ θέρους, ἢν δὲ αὐχμὸς χρόνον ἐπέχῃ πολὺν καὶ ἤδη σφίσι τὰ σπέρματα ἐν τῇ γῇ καὶ τὰ δένδρα αὐαίνηται, τηνικαῦτα ὁ ἱερεὺς τοῦ Λυκαίου Διὸς προσευξάμενος ἐς τὸ ὕδωρ καὶ θύσας, ὁπόσα ἐστὶν αὐτῷ νόμος, καθίει δρυὸς κλάδον ἐπιπολῆς καὶ οὐκ ἐς βάθος τῆς πηγῆς, ἀνακινηθέντος δὲ τοῦ ὕδατος ἄνεισιν ἀχλὺς ἐοικυῖα ὁμίχλῃ, διαλιποῦσα δὲ ὀλίγον γίνεται νέφος ἡ ἀχλὺς καὶ ἐς αὐτὴν ἄλλα ἐπαγομένη τῶν νεφῶν ὑετὸν τοῖς Ἀρκάσιν ἐς τὴν γῆν κατιέναι ποιεῖ*[10]).

Diese Stelle ist auch deshalb interessant, weil sie, irren wir uns nicht, zugleich eine Andeutung der Beziehung der Eiche zu Regen und Gewölk enthält. Die Beziehung der Eiche zu dem Gewitter veranlasste es aber hauptsächlich, dass diese dem Zeus heilig erachtet wurde. Jene beruhte übrigens nicht etwa darauf, dass »die Eiche dem Gewitter des Himmels zu trotzen scheint«, sondern darauf, dass sie besonders den Blitz anzieht, ein Umstand, über welchen auch neuere Beobachter verhandelt haben, vgl. die Anführungen bei J. B. Friedreich Symbolik und Mythologie S. 305, Anm. 5. So erklärt es sich, warum auch bei den Kelten, den Germanen, den Serben, den alten Preussen die Beziehung der Eiche zu Blitz und Donner und dem über diese waltenden Gotte vorkommt, vgl. J. Grimm

Deutsche *Myth.* S. 60, 63, 168 und Voigt Pre
Gesch. I. S. 580. Die Eiche ist das älteste S
bol des Zeus aus dem Baumreiche. Nachher,
der Naturgott mehr ethisch und politisch
fasst wurde, wich sie mehr und mehr and
Bäumen, namentlich hinsichtlich des Kran
der vorzugsweise vom Lorbeer genommen wu
Auch wo dieses bei den bildlichen Darstell
gen geschah, verblieb doch der Eiche ihr A
hen in der Religionssymbolik und im Cul
Einen Beleg hiefür bietet der schon oben
rücksichtigte Capitolinische Juppiter. Selbst
Thessalischen und Epirotischen Münzen fi
sich an Zeusköpfen auch der Lorbeerkranz.
Lykäische Zeus erscheint auf den Münzen, so
uns bekannt, nur mit dem Lorbeerkranz.
dem in der Troas und auf Kreta verehrten Z
giebt es, unseres Wissens, kein Beispiel
Zutheilung des Eichenkranzes auf Münzen.
der Eichenkranz des Zeus auf dem vielbes
chenen Wandgemälde (Overbeck S. 240 fg.)
Zeus Idäos, sei es nun den Troischen oder
Kretensischen, bezeichnen soll, das steht s
dahin, schon deshalb weil der Eichenkranz
Zeus auf einem anderen Gemälde derselben
tung, welches Benndorf im Rhein. Mus. f. P
N. F., Jahrg. 19, zu S. 442 hat abbilden las
und Overbeck S. 238 fg. an letzter Stelle
handelt, schwerlich mit irgendwelchem Sch
auf gleiche Weise erklärt werden kann. Da
gen passt für beide Gemälde die Beziehung
Eiche auf den Wolkenversammler und Ge
tergott[11]); für das an zweiter Stelle erwäh
nach der schönen Erklärung Benndorf's, wel
für mich ungemein viel Ueberzeugendes hat,
sonders auch die auf den sieghaften Zeus,
nach meiner schon oben angedeuteten Ans

mit der Beziehung der Eiche auf den Blitz wesentlich zusammenhängt. Auch für das Neapolitanische Sarkophagrelief passt eine entsprechende Beziehung, die auf den Regengott, vortrefflich, vgl. Epictet. I, 19, p. 106 ed. Upton.: *ἀλλ' ὅταν θέλῃ εἶναι ὑέτιος καὶ ἐπικάρπιος καὶ πατὴρ ἀνδρῶν τε θεῶν τε.* Doch liesse sich hinsichtlich dieses Römischen Werkes wohl noch eher an den Capitolinischen Juppiter denken [12]).

Auch andere Eichenarten darf man bei Zeus voraussetzen.

So die *ἄσχρα*, welche bei Hesychios als *δρῦς ἄκαρπος* erklärt wird; wenn in der That nach ihr ein von den Lydern und zu Halikarnassos verehrter Zeus Askraios benannt war, vgl. Ch. Lenormant Nouv. gal. myth. p. 53 und Overbeck a. a. O. S. 211[13]).

Jenes würde auch in Betreff eines Makedonischen Zeus zulässig sein, wenn man auf einer Makedonischen Münze wirklich den Kopf dieses Gottes anzuerkennen hätte. Es ist die Rede von jener schönen als unicum im K. Museum zu Neapel befindlichen Münze, welche zuerst von Millingen Sylloge of anc. coins pl. III, n. 23 herausgegeben, dann in der Rev. num. Fr., N. S., T. XII, 1867, pl. X, n. 12 wiederholt abgebildet, von Overbeck aber gar nicht berücksichsichtigt ist. Millingen hält a. a. O. p. 49 den betreffenden Kopf für den des Dodonäischen Zeus, während ihn L. Müller Numism. d'Alexandre p. 313, Anm. 41, ohne weiter auf die Sache einzugehen, wie selbstverständlich als den des Poseidon bezeichnet, wogegen Ferdin. Bompois in der Rev. num. Fr. a. a. O. p. 99 fg., Anm. 3, auf die Seite Millingen's tritt. Dass der Kopf nach Haarbehandlung und Gesichtsausdruck durchaus Poseidonisch ist, liegt auf

der Hand. Kein Münztypus des Dodonäische
oder eines anderen Zeus gleicht ihm, auch nic
der Kopf auf den Münzen des Pyrrhos und d
auf denen der Bruttier (D. a. K. I, 54, 26
Overbeck »Kunstmyth.« S. 232). Die Beziehu
des Zeus von Dodona auf das Wasser berechti
mit nichten zu der Annahme einer Auffassung
weise als Poseidon (Overbeck, S. 233 fg.). Bo
pois meint, dass zwei Umstände für Zeus en
scheidend seien, erstens der, dass der Zeusko
auf Münzen von Amphipolis, wo die vorliegen
Münze aller Wahrscheinlichkeit nach geprägt s
häufig vorkomme, während ein Poseidonsko
auf jenen seines Wissens noch nicht signalisi
sei, zweitens der, dass unser Kopf mit eine
Eichenkranz versehen sei, der unwiderleglich f
einen Zeus spreche. Aber um davon abzusehe
dass von Andern in der That auch der Pose
donskopf auf Münzen von Amphipolis vermuth
ist, so handelt es sich hier nicht sowohl um b
sondere Münzen dieser Stadt, als um die G
sammtmünzen der Makedonier, zunächst alle
dings um die des ersten der vier Landestheil
dessen Hauptstadt Amphipolis war. Auf d
Münzen jener Art aber lässt sich der Poseidon
kopf unzweifelhaft nachweisen, vgl. z. B. Mio
net, Descr. d. Méd. Suppl., T. III, pl. III, n.
u. p. 2, n. 8. Hinsichtlich anderer Münzen *M.*
ΚΕΔΟΝΩΝ lässt es Mionnet a. a. O. u. 9 fg. u
entschieden, ob der Kopf auf denselben Ze
oder Poseidon angehe. Unter ihnen ist die je
von Overbeck a. a. O., Münztaf. I, n. 20 abbildli
mitgetheilte und S. 103 fg. besprochene Erzmün
welche, wenn sich auch der Kopf auf ihr von de
unserigen nicht bloss durch den Schmuck, ei
Tänia, sondern auch durch den Gesichtsausdru
und selbst hinsichtlich der Behandlung des Ha

res unterscheidet, doch durch dieses, das »so auffallend wie feucht herabhängt«, auf Poseidon hinweist. Overbeck freilich will diesen nicht anerkannt wissen, weil der Gott auf den verwandten Makedonischen Münzen durch den Dreizack auf der linken Schulter als solcher bezeichnet sei und es keine Wahrscheinlichkeit habe, dass man dieses sicher unterscheidende Merkmal, wenn man es einmal anbrachte, in dem betreffenden Falle weggelassen habe. Dadurch könnte, falls jene Voraussetzung richtig wäre, für die Beziehung unseres Kopfes auf Zeus anstatt auf Poseidon ein neuer Grund geboten zu sein scheinen. Aber ein solches Weglassen eines sonst gebräuchlichen Attributs ist auf Münzen nichts weniger als unerhört. Was dann den Kranz betrifft, so ist zunächst zu bemerken, dass derselbe keineswegs die Blätter der Dodonäischen Eiche zeigt. Er ist vielmehr allem Anscheine nach von einer Eichenart, die sich besonders auch in Makedonien findet, derselben, welche uns auch auf dem Revers der Makedonischen Gesammtmünzen entgegentritt, von quercus cerris. Dass diese dem Poseidon heilig gewesen sei, ist freilich nicht bekannt. Allein dasselbe gilt von ihr in Betreff des Zeus. Wie nun keineswegs in Abrede gestellt werden soll, dass er auch für den Makedonischen Zeus passt, so wird dasselbe auch hinsichtlich des Makedonischen Poseidon zugegeben werden müssen. Der Kranz scheint sich eben mehr auf die Landschaft als auf die Gottheit zu beziehen. Hienach spricht das Meiste, ja so gut wie Alles für Poseidon. Gegen diesen wird auch dann nichts eingewendet werden können, wenn man den abweichenden Kopf der oben erwähnten Makedonischen Erzmünzen auf denselben Gott beziehen zu müssen glaubt.

rus und Caracalla bei Millin Mon. inéd. T. I, pl. I
Mongez Iconogr. Rom. pl. XLVIII, n. 3, Ch. Lenorm
Iconogr. d. Emp. Rom. p. XLII, n. 1. — Was end
die seltenere Verbindung von Aegis und Diadem a
trifft, so sei nur auf die Büste des Augustus zu Flo
in Gori's Mus. Florent. T. I, pl. YVIII und bei Le
mant a. a. O. pl. V, n. 1 verwiesen mit der Bemerk
dass als Diadem auch zu fassen sein wird die »Tä
des Juppiter-Augustus auf dem Intaglio des Neisos (
phani Apollon Boëdromios Taf. IV, n. 4, Denkm. d
Kunst II, 2, n. 24 oder besser n. 25 der dritten j
vorbereiteten Ausg.). — Fast überall erscheint die A
nicht als Sinnbild des Sieges, sondern zeusähnlicher H
schaft. Wiederholt ist das Scepter hinzugefügt, vgl. T
D. a. K. II, 2, 24 der zweiten Ausg., wo in dem C
aus Lenormant's N. gal. myth. pl. VIII, n. 1 gem
war, und Lenormant Iconogr. d. Emp. Rom. pl. XX
13, wo das Adlerscepter dargestellt ist. Selbst der A
des Zeus bezieht sich nicht nur auf Sieg, sondern a
auf Macht, welche letztere Beziehung in dem Adlers
ter der Griech. Könige auf der Bühne und bekan
Bildwerken so wie der Grossen Etruriens (Dionys. H
carn. III, 61) und der Römischen Kaiser allein zur
tung kommt. So ist auch in den Fällen, dass die
ser neben der Aegis den Eichenkranz haben, dieser n
auf Sieg sondern auf zeusähnliche Herrschaft zu beziel

8) Jenes bemerkte schon Müller Etr. I, S. 372, §
Wir heben noch hervor, dass der Etruskische T
nicht mit einem Eichenkranz, sondern mit einem Epl
kranz dargestellt gefunden wird.

9) Andere Spuren des Eichenkranzes bei Zeus
Asien anlangend, so führt Overbeck a. a. O. S.
Anm. d eine autonome Silbermünze von Sagalassos
Pisidien nach Mionnet Descr. T. III, p. 512, n. 103
mit der Bemerkung, dass von Mionnet »irrig der Z
kopf lorbeerbekränzt genannt wird, während der
chenkranz in der Schwefelpaste deutlich ist«. Mionn
eigene Abbildung Suppl. T. VII, pl. V, n. 1 zeigt die
Kranz. Der Revers, welcher die Nike darstellt, legt
Gedanken an einen Zeus Nikephoros nahe, der auch so
auf den Münzen dieser Stadt nachweisbar ist. Schl
dass Overbeck für den in Rede stehenden Umstand
ihm sonst wohlbekannten von Mionnet a. a. O. p.
beschriebenen autonomen Münzen von Antiochien
Mäander in Karien übersehen hat. Wir würden du

ihn vielleicht erfahren haben, ob sich Mionnet in umgekehrter Weise irrte, als er zu n. 57 schrieb: Tête de Jupiter, couronnée de chêne, oder etwa in gleicher Weise, als er auf n. 58 eine tête laurée de Jupiter erkannte. Hat es doch die grösste Wahrscheinlichkeit, dass der Typus auf dem Avers denselben Juppiter angeht, da auch der des Reverses wesentlich derselbe ist. Aus Supplém. T. VI, p. 447, n. 61 lernen wir eine andere Münze derselben Stadt mit einer tête laurée de Jupiter und einem zum Theil entsprechenden Typus des Reverses kennen. Somit hat allem Anscheine nach auch für die ersterwähnte Münze die Annahme eines Lorbeerkranzes bedeutende Glaubwürdigkeit. Dennoch steht sie keineswegs sicher. Der Adler des Reverses würde sehr gut zu einem Zeus Nikephoros passen. Die Münze der Magneten, rücksichtlich deren Overbeck a. a. O. Anm. d bemerkt, dass Mionnet T. III, p. 143, n. 599 irre, wenn er dem Zeuskopf des Averses einen Lorbeerkranz giebt, da der Eichenkranz nach der Schwefelpaste vollkommen unzweifelhaft sei, gehört, wenn ich recht sehe, den Thessalischen Magneten an, hat demnach keinen besonderen Belang, da der Eichenkranz bei Zeus auf Thessalischen Münzen auch sonst vorkommt, vgl. das von Overbeck selbst S. 231, Anm. g und h Beigebrachte. Sollte ich mich aber irren, so würde die Erklärung des Eichenkranzes, welche Overbeck für so schwierig hält, doch, so zu sagen, auf flacher Hand liegen, da ja die Ionische Magnesia eine Colonie der Thessalischen war. (Hinterdrein gewahre ich, dass schon Cadalvène Rec. de méd. p. 123 fg. und jüngst mit gründlicher Motivirung auch Kenner »Die Münzsamml. d. Stiftes St. Florian« S. 37 fg. jene Ansicht aussprach. Auch Fox Gr. coins P. I, p. 20 hat die auf pl. VII, n. 69 abbildlich mitgetheilte Silbermünze der Magneten mit einem allem Anschein nach eichenlaubbekränzten Zeuskopf den Thessalischen zugeschrieben).

10) Joh. Heinr. Krause hat »Olympia« S. 167, Anm. aus Corp. inscr. Gr. n. 234, p. 356 mit Wahrscheinlichkeit geschlossen, dass in den Nemeen in späterer Zeit den Siegern eine Zeit lang ein Eichenlaubkranz gegeben worden sei. Demnach darf man doch auch wohl dem Zeus von Nemea die Eiche geheiligt erachten. Der Umstand, dass dieser Zeus auf Münzen von Alexandria aus Nero's Zeit mit einem Lorbeerkranz versehen erscheint, spricht auch nicht im mindesten dagegen. — Eigenthümlich, aber bisher, so viel ich weiss, noch nicht erörtert

sind Pausanias' Worte V, 12, 7: *Ἐν δὲ τῷ ἐν Ὀλυμπί*
ναῷ Νίκωνος ἀναθήματα, τρίτος μὲν ἐς κοινὸν φέλλα σ
φανος, τέταρτος δὲ ἐς δρυὸς ἐστι μεμιημένος. Sollte sic
der Eichenkranz auf einen anderswo als in Olympia e
rungenen Sieg und, wenn auf eine Gottheit von Olympi
auf eine andere als Zeus beziehen? — Merkwürdig i
auch die Stelle Ovid's in den Metam. I, 446 fg., wo
von Apollon heisst:

Instituit sacros celebri certamine ludos,
Pythia de domitae serpentis nomine dictos,
His juvenum quicumque manu pedibusve rotave
Vicerat, aesculeae capiebat frondis honorem:
Nondum laurus erat, longoque decentia crine
Tempora cingebat de qualibet arbore Phoebus.

Es ist schwer zu sagen, ob der Dichter in dem, was
über den Eichenkranz der Sieger in den Pythien angieb
einer Tradition folgte oder nicht, und noch schwerer,
entscheiden, ob diese der Wahrheit entsprach oder nich
Abweichende Sagen nannten den Lorbeer als schon u
sprünglich zum Kranz gebraucht, vgl. J. H. Krau
»Die Pythien, Nemeen und Isthmien« S. 47 fg. Der E
chenkranz ist notorisch mehrfach durch den Lorbeerkra
verdrängt. Wurde jener wirklich einmal zu Pytho geg
ben, so ist das ohne Zweifel auf die Bedeutung des Ze
zu Delphi und seine enge Verbindung mit Apollon z
rückzuführen. Von dem Eichenkranz bei Apollon find
sich auch sonst eine Spur, nämlich auf der schönen o
besprochenen und mehrfach abgebildeten Münze von C
tania mit dem Namen des Gottes und des Stempelschne
ders Choirion. Die frühere Literatur giebt H. Brun
Gesch. d. Griech. Künstler II, S. 424. Später hat C. F
Fox Gr. Coins pl. III, n. 31 eine gute Abbildung eine
besonders interessanten Exemplars geliefert. Ueber de
Stempelschneider ist von G. Schmidt im Philologus Jah
gang XI, S. 790 und richtiger von A. von Sallet D
Künstlerinschr. auf Griech. Münzen, S. 41 gehandelt. M
dem Eichenkranz hat man nicht fertig werden könne
Er erklärt sich, mein' ich, am leichtesten als von Zeu
ebenso wie die Aegis, sonst übertragenes Attribut.

11) Auf dem an erster Stelle erwähnten Wandgemäld
tritt zu dem Eichenkranz der Schleier, über dessen Be
ziehung ganz auf Overbeck a. a. O. S. 251 fg. verwiese
werden kann.

12) Das betreffende Relief ist zuletzt von Overbec
a. a. O. S. 236 fg. besprochen. Unter den Gründen, a

denen er den Zeus von Dodona dargestellt erachtet, befremdet es folgende zu finden: »erstens dass der Zeus die Phiale in der Rechten nicht bloss hält oder sie wie ein Opfer heischend vorstreckt, sondern dass er sie ausgiesst, was den Regen- und Quellgott *Νάϊος* von Dodona füglich bezeichnen mag; zweitens dass der in seine Trompete stossende Windgott neben dem thronenden (?) Götterpaare mit dem dodonäischen Zeus, dessen Stimme man im Windesrauschen vernahm und der seinem Wesen nach ein Gott des belebenden und befruchtenden Lufthauches war, weit sinnvoller angebracht ist, als neben einem beliebigen anderen Zeus; drittens dass hinter der am rechten Ende der ganzen Darstellung gelagerten Gaea wiederum ein Eichenbaum erscheint«. Dass »dieser zuweilen ohne besondere Bedeutung anstatt eines besonderen anderen Baumes gesetzt« ist, bemerkt Overbeck selbst. Dieser Umstand wird auch in dem vorliegenden Falle anzunehmen sein, wenn man nicht etwa glauben will, der Künstler habe anstatt der Gaea oder Tellus die personificirte Dodona gemeint. Der Windgott spricht ebenso wenig für den Dodonäischen Zeus als den Sol und die Luna, mit denen jener zunächst zusammenzustellen ist. Wir brauchen den Verfasser der Kunstmythologie wohl nur mit einem Worte an die ihm wohlbekannte (s. S. 174) Darstellung der Berliner Lampe in Bartoli's Luc. sepulcr. II, 9 zu erinnern. Dass Zeus »die Phiale ausgiesse«, nimmt Overbeck ohne Zweifel mit Recht an. Ein solcher die Patera ausgiessender Zeus steht nicht vereinzelt da. Er findet sich auch auf einem Karneol zu Wien, vgl. Sacken u. Kenner »Die Sammlungen des k. k. Münz- u. Ant.-Cab.« S. 484, n. 260. Allein die Beziehung, welche Overbeck dieser Handlung unterlegt, kann unter keiner Bedingung zugelassen werden. Der Gott, welcher die Geschicke der Welt und jedes Einzelnen lenkt, libirt zu Gunsten des Todten, welcher vor ihm daliegt, und in Beziehung auf die diesen angehende symbolische Ueberreichung des Beutels durch Hera oder Juno an den Gott der Unterwelt: das Pfand, welches zeitweilig dem Schosse der Erde anheimgegeben werde, möge, reiche Frucht tragend, wieder auf der Oberwelt erscheinen. Overbeck will freilich lieber nach Jahn und Welcker das Umgekehrte annehmen, nämlich dass Hera oder »ungleich wahrscheinlicher »Gaea-Dione« den Beutel von Pluton empfange. Aber die von Conze und mir aufgestellte Annahme, ist allein schon »der Darstellung nach wahrscheinlich« und

giebt allein einen guten Sinn. Ist doch das Gebilde z
den Füssen des Prometheus ein Todter und kein Leben
der! Wenn Overbeck auf einem Relief wie das in Red
stehende an der Stelle der so deutlich charakterisirte
und als Göttin, die hier auf der Oberwelt Leben und Ge
deihen verleiht, zu der Darstellung so passenden Jun
die locale und verschollene Dione von Dodona setze
will, so wird dagegen noch mehr Protest einzulegen sei
als gegen den Umstand, dass er jeden eichenbekränzte
oder Regen-Zeus auf den Zeus von Dodona bezieht. Da
der Gott von Dodona in Epeiros — und auf den thu
man doch wohl die Bezeichnung als Dodonäischer Zeus z
beschränken — je hauptsächlich oder auch nur vorzug
weise als Regengott gegolten habe, ist durchaus in Ab
rede zu stellen. Wenn Jahn (Arch. Ztg. 1848, S. 303
n. 24) diese durch eine hingeworfene Frage E. Braun'
veranlasste Ansicht zu bestätigen versuchte, so finde ich
in dem von ihm Beigebrachten nichts, was dafür stich
haltig zeugen könnte. Ich bin sogar in der Lage, die
Beziehung der bekannten Berliner Büste auf den Got
von Dodona nicht für unumstösslich sicher halten zu kön
nen, obgleich die auch von Welcker Gr. Götterlehre I
S. 203 gebilligt wird, der mit Recht von einer Bezie
hung des *Νάϊος* auf Regenschauer ganz schweigt. Er
kennt man auf dem Relief den Juppiter vom Capito
und die mit ihm verbundene Juno, so wird man wohl
thun, die zwischen beiden im Hintergrunde stehende Fi
gur, welche ich früher, mit Billigung Overbeck's, au
Aphrodite bezoge haben, auf Fortuna zu deuten, wozu
auch ihr Kopfschmuck bestens passt. — Den Darstellun
gen des mit dem Eichenkranze versehenen Zeus, welche
von Overbeck mit anerkennenswerther Sorgfalt zusam
mengestellt und besprochen sind, kann jetzt aus den ober
erwähnten Photographien ein geschnittener Stein hinzu
gefügt werden, vgl. Catal. p. 64, pl. 731, n. 5. Ob e
sich bei dem betreffenden schönen Kopfe, an dessen
Echtheit zu zweifeln kein besonderer Grund vorliegt, um
den »Jupiter of Dodona« handelt, steht sehr in Frage.
Er zeigt nicht nur die ruhige Milde, welche Overbeck
S. 233 an dem Kopfe einer Goldmünze Alexanders I von
Epeiros, Münztaf. III, n. 28, besonders hervorhebt, son
dern ausserdem noch einen Anflug von Heiterkeit, die zu
jenem Gotte nicht wohl passt.

13) Ob dieser Zeus Arkraios auf den bekannten Bron
zemedaillons von Halikarnassos und Eintrachtsmünzen

von dieser Stadt und Kos zu erkennen sei, wie man jetzt annimmt, müssen wir dahingestellt sein lassen, so scheinbar auch jene Annahme sein mag und so wohl das äussere Ansehn der betreffenden Figur zu einem Asiatischen Zeus im Allgemeinen und dem Lydischen im Besonderen passt. Aber gerade die Bäume, welche die Figur umgeben und gewiss auf dieselbe Beziehung haben, erregen Bedenken. Die ἄσχρα bei Hesychios erinnert zunächst an die ἄσπρις bei Theophrast Hist. plant. III, 8, 7, über welche dieser berichtet, dass von den Makedoniern, bei denen sie wuchs, sie einige als ἄχαρπον ὕλως, andere als φαῦλον τὸν χάρπον bezeichneten. Fraas Synops. plant. flor. class. p. 253 hält diese für quercus cerris, welche auf den betreffenden Münzen sicherlich nicht gemeint ist. Nach dem, was bei Theophrast über die ἄσπρις gesagt wird, ist es ferner auch schwer einzusehen, wie man grade eine solche Eichenart dem Zeus heiligte. Man könnte nun annehmen, dass die ἄσχρα Lydiens nicht ganz identisch sei mit der ἄσπρις Makedoniens. Dem Vernehmen nach giebt es von quercus cerris verschiedene fruchtlose Eichen. Aber diese sind staudenartig. Auf den in Rede stehenden Münzen können sie also nicht vorausgesetzt werden, da hier ohne Zweifel Bäume dargestellt sind, und zwar nehmen sich diese durchaus wie Lorbeerbäume aus. Wer bürgt überhaupt für die Richtigkeit der Annahme eines etymologischen Zusammenhangs des Zeusnamens Askraios und der ἄσχρα? Könnte nicht jener ein gräcisirtes Lydisches Wort sein? An entsprechenden Beispielen fehlt es aus dem Kreise des in Lydien verehrten Zeus nicht. Eine weitere Frage ist die, ob man Ἀσκραίῳ Διὶ Λυδίων, wie ihn Plutarch Animine an corp. aff. sint pej. T. VII, p. 951 ed. Reisk., bezeichnet, ganz dieselbe Beziehung geben darf wie dem von Overbeck ganz übergangenen Zeus Lydios, den wir auf Münzen von Sardes inschriftlich bezeugt finden (Mionnet IV, p. 120, n. 677 u. 678, VII, Suppl., p. 415, n. 450 u. 451, Combe Num. mus. Brit. pl. XI, n. 11) und vielleicht auch in dem »Zeus Patrios« auf der durch Birch in Akerman's Num. Chronicle IV, p. 138 fg. bekannt gewordenen Münze der Saettener, von der auch Ch. Lenormant keine Kunde hatte, voraussetzen dürfen, oder ob der Zeus Askraios von dem als Lydios bezeichnetem verschieden war. Die Opfer, von denen wir hören, dass sie dem Zeus Askraios dargebracht wurden, Ziege und Erstlinge der Früchte, passen sehr wohl für einen Gott von

der Beziehung des Zeus Lydios. Dass dieser ein Regen
gott war, geht hervor aus der Stelle des Io. Laur. Lydu
de mens. p. 228 ed. Roether., welche nicht bei den vo
Overbeck S. 226, Anm. k für den *Ζεὺς ὑέτιος* angeführ
ten Gewährsmännern, wohl aber von Osann z. Cornu
p. 253 veranschlagt worden ist.

Nachschrift.

Da der obige schon vorlängst in die Druckerei geg
bene Aufsatz mir erst nach meiner Rückkehr von ein
Reise in den Orient zur Correctur übergeben wird, kan
ich zum Schluss von Anm. 12 hinzufügen, dass ich
keiner der zahlreichen von mir besichtigten Sammlunge
eine antike Darstellung des Zeus mit dem Eichenkran
fand, wohl aber in dem akademischen Kunstmuseum
Breslau den Gypsabguss eines Medaillonreliefs mit d
eigenthümlichen Darstellung eines eichenbekränzten Ju
piterkopfes auf den ausgebreiteten Flügeln eines Adler
der auf einem Ringe steht, welchen er mit dem Schn
bel und den Krallen festhält. Das Original soll sic
in Rom befinden. Es wäre interessant, genauere Au
kunft über dasselbe zu erhalten. An den Dodonäische
Zeus ist auch hier sicherlich nicht zu denken.

Wieseler.

Universität.

Preisvertheilung.

Am 11. Juni fand die wegen der Pfingstfe
rien verlegte akademische Preisvertheilung stat
Die Festrede hielt Prof. Wachsmuth, der übe
die Entstehung und die geschichtliche Entwicke
lung der athenischen Hochschule im Alterthu
sprach.

Die Aufgaben der theologischen, juristische
und medicinischen Fakultät waren ungelöst ge
blieben. Die ordentliche Aufgabe der philose
phischen Fakultät:

Ars dialectica Platonis qua in re consistat quaeque ejus sit virtus in promovenda rerum cognitione, exemplis, quibus ad eam illustrandam Plato ipse usus est, recensendis et diligenter digerendis ostendi iubemus

hatte zwei Bearbeitungen erfahren, die beide als des Preises würdig befunden wurden, unbedingt die erste, als deren Verfasser sich Hermann Oldenberg, stud. phil., ergab, dagegen mit der Beschränkung, dass sie um der mangelhaften Latinität willen in der jetzigen Gestalt nicht druckfähig sei, die zweite von Johannes Wolff, stud. phil.

Auch als Beantwortung der ausserordentlichen Aufgabe dieser Fakultät:

Von gewissen phanerogamischen Pflanzen, welche kein Chlorophyll enthalten, ist es noch ungewiss, auf welche Weise sie sich ernähren. Es sollen daher Monotropa und Neottia in dieser Beziehung untersucht werden u. s. w.

war eine Abhandlung eingelaufen und mit dem Preise gekrönt; als ihr Verfasser ergab sich: Oskar Drude, stud. rer. natur.

Die Preisaufgaben für das nächste Jahr, deren Bearbeitungen bis zum 15. April 1874 einzuliefern sind, sind folgende:

1. Als wissenschaftliche Aufgabe stellt die theologische Fakultät:

Rationes reformationum in ecclesia occidentali medii aevi tum ab auctoritatibus ecclesiasticis tum a partibus haereticis susceptarum exponantur et diiudicentur.

Als Predigttext giebt sie:

Matthaeus 10, 39.

2. Die juristische Fakultät stellt auf's Neue die Aufgabe des Vorjahres:

Expicentur iuris romani principia de mandato, quod vocant, qualificato.

3. Ebenso wiederholt die medicinische Fakultät die das vorige Mal gestellte Aufgabe:

Es ist bis jetzt nicht in befriedigender Weise aufgeklärt, ob der mit der Nahrung eingeführte oder aus Amylum gebildete Zucker als solcher aus dem Darm zur Aufsaugung ins Blut und im Stoffwechsel zur Verwendung gelangt: es soll durch Versuche an Thieren, unter Berücksichtigung zugleich des Rohr- und Milch-Zuckers, diese Frage von neuem bearbeitet werden, wobei namentlich auch die Einführung von Zucker in den Körper auf andern Wegen als vom Darm aus, sowie die Frage nach den Bedingungen des Uebergangs von Zucker in den Harn in den Kreis der Untersuchung gezogen ist.

4. Die philosophische Fakultät stellt zwei Aufgaben, als ordentliche:

Der Magnetismus eines Stahlstabs zerfällt in einen beharrlichen und einen vergänglichen Theil. Der letztere ist derjenige welcher zugleich mit den auf den Stab wirkenden magnetischen Scheidungskräften verschwindet. Es wird eine nähere Untersuchung dieses vergänglichen Theiles bei verschiedener Stärke des beharrlichen Theiles und unter Einwirkung verschiedener Scheidungskräfte verlangt.

als ausserordentliche:

Versio evangeliorum Syriaca a W. Curcton reperta et edita quid ad crisin novi testamenti augendam et stabiliendam faciat exponatur.

ROYAL·COLL
Excerpt
llständi-
der

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

25. Juni. № 15. 1873.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 14. Juni.

Waitz, Verlorene Mainzer Annalen.
Benfey, Die Suffixe *anti*, *âti* und *ianti*, *iâti*.
Derselbe, Ein Theil des Mongolischen Ardschi Bordschi und Stücke des Pantschatantra im Singhalesischen.
Derselbe, Skizze einer Abhandlung über Augensprache, Mienenspiel, Gebärde und Stimmmodulation.
Klinkerfues, Nachtrag zur Methode der Parallaxenbestimmung durch Radianten (S. Nr. 13).
Enneper, Bemerkungen über die orthogonalen Flächen.
A. v. Brunn, Ueber das Vorkommen organischer Muskelfasern in den Nebennieren (vorgelegt von Henle).
Quincke, Corresp., Eine neue Methode Kreistheilungen zu untersuchen (vorgel. von Weber).
H. G. Lolling, Beiträge zur Topographie von Athen (vorgel. mit Anmerkungen von Wieseler).
Stern, 2 Mittheilungen von Dr. Voss 1) über eindeutige Transformation ebener Curven. 2) zur Geometrie der Flächen.
C. A. Bjerknes in Christiania, Das Dirichlet'sche Kugel-Ellipsoid-Problem (vorgel. von Schering).

Verlorene Mainzer Annalen.

Von

G. Waitz.

Wie manches Stück annalistischer Aufzeichnungen des Mittelalters uns verloren ist, haben die neueren eingehenden Untersuchungen der erhaltenen Exemplare wiederholt ergeben: es mussten öfter Mittelglieder statuiert werden, wo man früher mit der Beziehung auf einen vorliegenden Text auszukommen meinte. Aber es ist auf solchem Wege auch manchmal gelungen verlorene Stücke ganz oder theilweise wieder herzustellen und so unsere Kenntnis des früher vorhanden gewesenen Reichthums an Annalen zu vervollständigen.

Dazu ist eine neue Gelegenheit geboten durch die Ausgabe der Polnischen Annalen zuerst in dem 19. Bande der Scriptores der Monumenta Germaniae historica, neuerdings auch in Vol. 5 der Monumenta Poloniae historica von Bielowski. Die hier publicierten Annales capituli Cracovien-sis und ein ihnen entsprechendes, früher von Sommersberg SS. R. Silesiacarum II, S. 94 edier-tes [1]), Stück [2]) beginnen, jene nach Vorausschi-

1) Darauf hat einer meiner Zuhörer Hr. Smolka aus Lemberg aufmerksam gemacht, der durch eine ausführliche Arbeit über die Polnischen Annalen mir auch zu dieser kleinen Untersuchung den Anlass gab, die seinem Interesse ferner lag. Das eben erschienene Buch von Zeissberg, Die polnische Geschichtschreibung des Mittelalters, geht auf diese Frage nicht näher ein.

2) Die Abweichungen von dem Text der Ann. capit. Cracov. bestehen meist nur in Auslassungen oder Verschiebungen der Jahreszahl. Zusätze zu dem hier in Betracht kommenden Theil sind nur: 840. Lotarius successit; 93[illegible] nach Heinricus rex: Germanie. — Ein Theil dieser Annalen hat auch Aufnahme gefunden in die sog. Ann. Cracovienses vetusti, SS. XIX, S. 477, die sich gerade hier

ckung der kurzen Weltchronik des Isi Excerpt Annalen seit dem Jahre 730, die zu ständi- die nächste Verwandtschaft mit den Ann. der feldenses, später theilweise mit den SS. III, S. 119 gedruckten Ann. Pragenses zeigen, aber weder auf die einen noch die andern ganz zurückgeführt werden können. Die Herausgeber in den Monumenta denken an ein fortgesetztes Exemplar der Hersfeldenses, das etwa über Prag nach Krakau gekommen wäre. Allein ein nicht unbedeutender Theil der Nachrichten findet sich nicht in den uns erhaltenen Ableitungen der Hersfeldenses. Davon ist einiges in der Ausgabe durch den Druck hervorgehoben, aber keineswegs alles. Und die Quellen dieser den Hersfeldenses fremden Nachrichten sind nicht angegeben. Sie sind aber leicht zu erkennen. Die Jahre 842. 843. 875. 879. 881. 882. 887, auch 889, 889 (a Normannis), 895. 897. 899, vielleicht 937, 953 stammen aus den Ann. Augienses, die, wie bekannt, später in Mainz aufbewahrt wurden. Dagegen finden sich 907. 933. 934. 936, auch 937, ein Theil des Jahres 940 in den Ann. Corbejenses. Auf die Verwandtschaft dieser mit den Pragenses hat schon Pertz aufmerksam gemacht: diese haben von den angeführten Jahren 933. 934. 936 theilweise und die Stelle aus 940, ausserdem namentlich 915 das charakteristische: Bellum fuit in Hersburch, mit den Corbejenses gemein. Lässt die letzte Angabe nicht zweifeln, dass Corvey die Heimath dieser Aufzeichnungen war, so weist auf dies auch eine Stelle

durch vorzugsweise als Auszug eines grösseren Werkes charakterisieren. Ein paar schwache Spuren (990. 1002) finden sich in den Ann. Cracovienses breves, eb. S. 664.

1) Auf eine umgekehrte Ansicht könnte die Notiz 937 über den Brand der monasteria S. Galli et S. Bonifacii führen, die sich auch in den Augienses findet.

Expi Cracovienses, die sich nur hier findet: *dato* entio sancti Stephani protomartyris; der ?phan war bekanntlich ein Schutzheiliger es Sächsischen Klosters. Wir sehen hieraus, dass es allerdings auch noch ein anderes Exemplar als das uns erhaltene der Corbejenses war, das als Vorlage diente. Ob auf dieselbe auch die paar Notizen zurückgehen, deren Quelle sonst nicht nachgewiesen werden kann, muss dahingestellt bleiben. Es sind 877 die Bezeichnung des Locals der Schlacht zwischen Ludwig und Karl: in Ripuaria; 940: hyemps valida. Mortalitas jumentorum. 961. Otto [II] in regem elevatur. Eclypsis solis. 968. Junior Otto per Leonem papam cum patre suo coronatur. Dann 1002. 1003, die sich, wie der Herausgeber bemerkt, ähnlich in den Ann. Weissenburgenses finden, aber schwerlich daher stammen. 1012. Hermannus dux obiit. — Eine andere Notiz ist nur durch ein, freilich auch sonst wohl vorkommendes, aber von den Herausgebern nicht bemerktes Versehen unter diese Jahre gerathen: 931. Sanctus Ambrosius episcopus Mediolanensis obiit; er starb bekanntlich 397; die Stelle ist aus dem älteren Cyclus irrthümlich hierher übertragen: ziehen wir von 931 die Jahre desselben, 532, ab, so ergiebt sich 399.

Dass die Corveyer und Hersfelder Annalen vereinigt waren, ehe sie in die Prager übergingen, zeigen in dem uns erhaltenen Exemplar dieser die Jahre 910. 912. 945. 950, zufällig solche die in den Cracovienses nicht erhalten sind. Von den Augienses wird dasselbe hiernach nicht bezweifelt werden können, wenn sich auch in dem erst 894 beginnenden Fragment der Prager keine Spuren derselben mehr nachweisen lassen. Ueberhaupt haben wir es in diesem an

genscheinlich nur mit einem sehr magern Excerpt älterer Jahrbücher zu thun, die viel vollständiger, aber freilich auch nur theilweise, in der Krakauer Ableitung erhalten sind. Fragen wir aber nach der Herkunft des zu Grunde liegenden Annalenwerkes, so können wir nur an Mainz denken. Nirgends so leicht wie hier konnte die Vereinigung der Augienses, Hersfeldenses, Corbejenses erfolgen; und am naturgemässesten von hier empfing Prag, das Bisthum von der Metropole, die Grundlage eines Annalenwerkes, das uns leider nur in dem mangelhaften Auszug späterer Zeit überliefert ist. Die Deutschen Nachrichten gehen in der Krakauer Ableitung bis zu dem angeführten Jahre 1012, dem Tode des Herzog Hermann III. von Schwaben. Viel später wird die Uebertragung nach dem Osten nicht erfolgt sein. Anderswo hat sich eine Ableitung dieser Annalen nicht erhalten.

Die Suffixe *anti*, *âti* und *ianti*, *iâti*

von

Th. Benfey.

Indem ich bei Ausarbeitung der Nominalbildung in der vedischen Sprache alte Papiere durchstöberte, fielen mir Zusammenstellungen von Nominibus auf lateinisch und sskr. *âti*, lat. *enti* und sskr. *anti* = griechischen auf *ᾱτι* (Nom. S. *ατης*) *ητι* (Nom. Si. *ητης*) *ωτι* (Nom. S. *ωτης*), lat. *et* = griech. *οτι* (Nom. S. *οτης*), *ϛι* (Nom. S. *ϛης*) u. s. w. in die Hand, welche ich in der Abhandlung über die Entstehung des Indoger-

manischen Vokativs bei dem Nachweis, dass ein beträchtlicher Theil der griechischen Nomina der ersten Declination, welche im Nom. Sing. auf ᾱς ης auslauten, aus Themen auf ι besteht (in den Abhandlungen der kön. Ges. der Wissensch. in Göttingen Bd. XVII, S. 80), hätte geltend machen können.

In Betreff der hieher gehörigen griechischen und lateinischen Bildungen verweise ich im Allgemeinen auf Leo Meyer »Vergleichende Grammatik der griechischen und lateinischen Sprache« II, 525—528, und ausserdem, insbesondere wegen hieher gehöriger aus einigen andern indogermanischen Sprachen, auf Pott »Etymologische Forschungen« II¹ (1836) S. 558—560.

I.

Hier treten zunächst lateinische, wie *nostr-âti* »den unsern angehörig« *Arpin-âti* »Arpinum angehörig« griechischen gegenüber wie *Τεγε-ᾱτι* (N. S. *της*) »Tegea angehörig«, *Αἰγιν-ητι* (N. S. *της*) »Aegina angehörig« »*ἠπειρ-ωτι* (*της*) dem Festlande angehörig«.

Lateinischem *âti* gr. *ᾱτι, ητι, ωτι* würde in der Grundsprache und im Sanskrit *âti* entsprechen und in Letzterem finden wir mit dieser Endung den Volks- und Mannesnamen *Vas-âti*. Nach Analogie der griechischen und lateinischen Bildungrn würde die etymologische Bedeutung in beiden Fällen sein »Vasa angehörig«. Ein sanskritisches *vasa* in einer hieher passenden Bedeutung ist zwar bis jetzt, so viel mir bekannt, noch nicht nachgewiesen, allein der sanskritische Sprachschatz ist, trotz seines grossen Reichthums, keinesweges schon vollständig bekannt oder auch auf uns gekommen. Wer je-

doch an diesem Mangel Anstoss nimmt, der findet einen Ersatz dafür in der Sprache des Avesta. Hier erscheint im 13ten, dem Farvardin Yasht, Abschnitt 115 ein Genetiv eines Patronymikum *taurvâtôis*, dessen Thema nach den Regeln dieser Sprache *taurvâiti* lautet; in diesem ist aber nach besonderen phonetischen Gesetzen das *i* vor dem *t* durch die assimilirende Wirkung des diesem nachfolgenden *i* erzeugt; daher es auch im Genetiv *taurvâtôis* fehlt; ebenso verdankt das *a* vor dem *u* seine Entstehung nur einer phonetischen Neigung dieser Sprache, so dass die dem Thema *taurvâiti* zu Grunde liegende dieser und dem Sanskrit gemeinsame Form *turvâti* lauten musste. Mit dieser tritt in enge Beziehung (vgl. weiterhin unter V.) — nur durch *î* statt *â* davon verschieden — der vedische Name *Turvîti*. Dieser Namen steht in innigem Verhältniss zu einem andern vedischen Eigennamen *Turva*. Dieser letztere ist nämlich identisch mit *Turva-ça* (s. Petersburger Wörterbuch) und mit *Turvaça* erscheint *Turvîti* in denselben Versen Rigveda I. 36, 18; 54, 6, so dass diese Verbindung ganz denselben Werth hat, als wenn *Turva* und *Turvîti* neben einander ständen.

Bei dem innigen Zusammenhang zwischen dem Avesta und den Veden ist es aber gar keinem Zweifel zu unterwerfen, dass die Verfasser des Avesta, welche in *Taurvâiti* = arisch *Turvâti*, wesentlich = vedisch *Turvîti*, »den Angehörigen des vedischen *Turva*« (vgl. die Bed. von *Αἰγινῆται* u. s. w.) kannten, auch mit diesem selbst nicht unbekannt sein konnten, obgleich dieser Name selbst in den verhältnissmässig geringen Resten der heiligen Schriften der Perser, die uns bewahrt sind, nicht wiedergespiegelt wird. Er würde hier *taurva* lauten; *taurvâta*, welches

Justi in seinem Wörterbuch der Altbactrischen Sprache als Basis des Patronymikum *taurvâiti* aufstellt, ist bloss Hypothese.

Demgemäss lässt sich auch vielleicht noch ein drittes hiehergehöriges Beispiel in dem sskr. Eigennamen *Çaryâti* erkennen, von welchem im Rigveda *Câryâtá* stammt, trotzdem dass eine Basis *Çarya* in dazu passender Bedeutung nicht nachzuweisen ist (vgl. jedoch V).

Bei dieser Uebereinstimmung zwischen Griechisch, Lateinisch, Sanskrit und der Sprache des Avesta in Bildungen von Wörtern durch ein Suffix, welches in der Grundsprache *âti* lauten würde, mit der Bedeutung »angehörig«, wozu noch die lettischen auf *eetis, eete* treten die von den Namen der Höfe abgeleitet werden und dazu dienen die Bauern desselben Gebiets zu bezeichnen wie *Walmareetis*« u. s. w. (Pott Et. Fschg II[1], 559), ist es keinem Zweifel zu unterwerfen dass Suff. *âti* in der Bed. »angehörig« schon in der indogermanischen Grundsprache existirte.

II.

Neben *âti* erscheint aber im Latein in derselben Bedeutung *enti* z. B. *Vejenti* »Veji angehörig«. Diesen Bildungen stellen sich die vedischen Eigennamen *Purush-ánti* (Basis *Purusha*) *Dhvas-ánti* zur Seite.

Aus dem Latein gehören auch dazu bedeutungsverwandte Wörter, mit *s* für *t*, auf *ensis* wie *Cur-ensi* »angehöriger von *Cures*, *hort-ensis* »zum Garten gehörig« u. s. w. (Leo Meyer II 531); ferner die Nomina auf *esti;* wie *mon* mit Affix *tro* zu *mon-s-tro*, so ward *enti* zu *en-s-ti* und mit Einbusse des *n* vor *s*, wie z. B. in *potestat* für *potenstat* statt *potent-tat*, zu *esti* z. B.

agr-esti, vermittelst *agr-en-s-ti*, für *agr-enti* »dem Lande angehörig«, *coel-esti* für *coel-enti* »dem Himmel angehörig«.

Aus dem Griechischen lassen sich keine Formen mit *ν* gegenüberstellen. Aber wir wissen, dass von der Gruppe *ντ* im Griechischen häufig das *ν* eingebüsst wird (z. B. *ὀνοματ* für ursprünglich *ὀνομαντ* und so in allen auf *ματ* und sonst, z. B. *ἀϱγέτ* für *ἀϱγέντ* altes Ptcp. Präs. von dem Verbum, von welchem auch *ἄϱγ-υϱο* für *ἄϱγ-ϝαν-ο* = sskr. *árj-un-a* »Silber«, mit der so häufigen Cerebralisirung des dentalen *ν* zu *ϱ*). Wir erhalten dadurch das Recht die bedeutungsgleichen griechischen Bildungen auf *ετι, οτι* (Nom. Si. *ετης, οτης*) hieher zu ziehen, z. B. *ἀγϱ-οτι* (Nom. S. *ἀγϱότης*) für *ἀγϱ-οντι* = **agrenti, agresti*, *δημ-οτι* (*της*) »zum Demos gehörig«, *φυλ-οτι* (*της*) »zur Phyle gehörig« *σὺν-ετι* (*της*) »zum Lager gehörig« u. s. w.

Die Einbusse von *n* vor *t* findet, wenn gleich seltener als im Griech., auch im Latein Statt, z. B. im Suff. *met* für *mant* in *pal-met* u. s. w. (Leo Meyer a. a. O. II, 270). Es gehören daher auch die Bildungen wie *coel-ĕt* für *coel-ĕti*, statt *coel-enti* = *coelesti*, *Cur-ĕt* für *Cur-ĕti* statt *Cur-enti* = *Cur-ensi* (s. oben) »Angehöriger der Stadt *Cures*« (vgl. über *Vej-enti*) hieher.

III.

Es lässt sich nachweisen, dass schon in der Grundsprache die Beschwerung durch Position nicht selten dahin wirkte, dass ein dieser vorhergehender von Natur kurzer Vokal gedehnt ward; so z. B. wurde ursprüngliches *an-tmant* »Athem« schon in der Grundsprache zu *â-tmant*, im Sanskrit durch *â-tman* wiedergespiegelt, im

Griech. durch *ἄ-σθματ* (neben *ἄ-σθμαν* in *ἀσ*
μαίνω für *ἀσθμαν-ιω*) für *ἄ-τματ* (mit *σ* vor
wie so oft, und Aspirata für Tenuis, wie ebe
falls mehrfach, durch Einfluss des folgenden N
sals); eben so beruht darauf das Verhältniss v
grdsprachl. *âku* »schnell« zu *akva* »Pferd« bei
für ursprüngliches *ak-vant* »schnell«, *svâdu* »süs
für *svad-vant* »köstlich«.

Daraus erklärt sich auch das Verhältniss v
âti (in I.) zu *anti* (in II.). Letzteres ist die u
sprüngliche Form, aus welcher die erstre e
durch Dehnung vor der Position, dann Einbus
des *n*, aber natürlich mit Bewahrung der De
nung, entstanden ist. Beide Formen existirt
in der Grundsprache nebeneinander und hab
sich so auch theilweise in den besonderten Spr
chen erhalten, wie die schon angeführten Fo
men, z. B. lat. *Vejenti* neben *Arpináti*, sskr. *P*
rushánti neben *Vasâti* zeigen.

IV.

Da die Dehnung durch Position eine phon
tische Erscheinung ist, phonetische Erscheinu
gen sich aber erst nach und nach geltend m
chen, demgemäss in den früh fixirten Sprach
gewöhnlich erst in einem mehr oder weniger g
ringen Umfang, während die organischere Fo
sich noch daneben erhält, so zeigen sich au
nach Einbusse des einen Consonanten Form
mit und ohne Dehnung neben einander. W
haben deren schon in I. und II. aus dem Gr
chischen und Lateinischen erwähnt z. B. *Aly*
-ητα (*της*), *φυλετα* (*της*). Ehe wir weiter geh
erlauben wir uns noch einige interessante h
vorzuheben, so *κωμ-ητα* (*της*) »zum Dorf gehöri
γυμν-ητα (*της*) »zu den Unbekleideten, Ungep

zerten gehörig«; ohne Dehnung *ἱππ-οι* (*της*) »zu den Pferden, = Reitern, gehörig«; ebenso mit Dehnung *αἰχμ-ηι* »zu den Lanzen, d. h. den mit Lanzen Bewaffneten gehörig«, dagegen ohne Dehnung *τοξ-οι* (*της*) »zu den Bogen, = Bogenschützen, gehörig«.

Dem griechischen *ἱπποι* entspricht nun in Form und Bedeutung lat. *equĕt* für *equ-ĕti* (vgl. in II. *ĕt* z. B. in *coel-ĕt* = griech. *οι* in *ἀγρ-οι*). Ganz eben so wie *equĕt* ist aber *ped-ĕt* gebildet »zu den Fussgängern gehörig«, wo jedoch die Fussgänger etymologisch nur durch »die Füsse« bezeichnet sind, wie in *αἰχμητι*, *τοξοι* die Lanzenträger, Bogenschützen nur durch die Waffe, deren sie sich bedienen. Das Affix *ĕt* in *ped-ĕt*, für *ĕti* ist aber nach dem bisherigen identisch mit sskr. *âti*, so dass in dem sskr. Wort *pad-âti* welches, aus *pad* = lat. *ped* gebildet, dieselbe Bedeutung wie lat. *ped-et* hat, das ganz getreue Spiegelbild des letzteren zu erkennen ist.

Dass ein aus denselben Elementen gebildetes Wort im Sanskrit und Latein, also in so weit auseinander liegenden Sprachen des Indogermanischen Sprachstammes, übereinstimmend eine von der etymologischen so weit abliegende Bedeutung haben, ist eine höchst auffallende Erscheinung und würde nach den bekannten Principien der Vergleichung eigentlich dafür entscheiden, dass Bildung und Bedeutung schon der Grundsprache angehört haben. Es ist aber völlig undenkbar, dass zur Zeit der Grundsprache schon eine Militärverfassung existirt hätte, in welcher »Krieger zu Fuss« eine besondre Abtheilung im Gegensatz zu irgend einer andern gebildet hätten. Es ist hier vielmehr sicherlich ein zufälliges Zusammentreffen anzuerkennen, für

welches sich zwar manche Erklärungen aufstel
lassen, aber so viel ich bis jetzt zu erkennen v
mag, keine, welche die übrigen unbedingt a
schlösse; daher ich es für undienlich halte,
hier gegeneinander abzuwägen.

V.

Wir haben es bis jetzt verschoben, das V
hältniss von *îti* in dem vedischen *Turvîti* zu
(arisch *âti*) in *Taurvâiti* des Avesta in Betra
zu ziehen.

Dass beide in engem Zusammenhang steh
wird wohl Niemand bezweifeln, allein wie
das *î* statt des arischen *â* zu erklären?

Man könnte auf den ersten Anblick anzun
men geneigt sein, dass der im Sanskrit so h
fige Uebergang von *â* in *î* dazu genüge;
wie ursprüngliches *pâ-tá* = latein. *pô-to* (*pô
»getrunken« im Sskr. *pî-tá* lautet, wie noch
disches *âs-âná* (von *âs* »sitzen« Ptc. Med.
späterem *âs-îná* ward, und so *â* zu *î* in un
ligen andern Fällen, so auch arisches *Tur
zu sskr. *Turvîti* geworden sei. Auf dies
Weise würde man dann den ebenfalls vedis
Eigennamen *Dabhîti* aus *Dabhâti* erklären
ebenfalls als Angehörigen oder Abkömmling
Dabha auffassen. Eine Basis *Dabha*, welche
passen würde, fehlt im Sskr., ähnlich wie *Ta
in der Sprache des Avesta.

Gegen diese Erklärung spricht aber, v
auch nicht ganz entscheidend, doch starke
denken erregend, der Umstand, dass dieser
bergang von *â* in *î* — so viel ich mich erin
— nur vor accentuirten Silben, wie in den
angeführten *pîtá*, *âsîná* und z. B. noch *dh
von *dhâ* u. aa. der Art, Statt findet; unter

hieher gehörigen Fällen ist aber kein oxytonirter, sondern *Turvíti*, *Dabhíti*, *Purushánti*, *Dhvasánti* sind paroxytonirt; eben so auch die griechischen auf *ντι* u. s. w. und zwar, nach der Analogie der sanskritischen zu urtheilen, schwerlich durch Einfluss der folgenden langen Silben, sondern schon ursprünglich.

Es ist mir daher wahrscheinlicher, dass eine andre Erklärung zu suchen sei; und zu dieser bahnt uns das Griechische den Weg.

Hier erscheinen in beträchtlicher Anzahl neben den Formen, welche *âti* reflectiren, gleichbedeutende auf Reflexe von *idti*, so *Κροτων-ιατ-ης* »Angehöriger von Croton« (vgl. *Αἰγιν-ητ-ης*, *Σπαρτ-ιατ-ης*); zweifelhaft kann man sein, ob *πτολι-ητ-ης*, oder *πτολ-ιτ-ης* zu theilen sei »Angehöriger einer Stadt«, sicher ist aber die Theilung *ἀγρο-ιωτ-ης* der von *ἀγροι-ωτ-ης* vorzuziehen »Angehöriger des Landes« (vgl. *ἀγρ-οτ-ης* in II.); eben so ist *στρατ-ιωτ-ης* »Angehöriger eines Heeres« zu theilen und von *στρατό-ς* nicht von *στρατιά* abzuleiten.

Da sich *âti* als aus *anti* entstanden ergab, so ist schon darum auch für *iâti* die Entstehung aus *ianti* höchst wahrscheinlich; dafür sprechen entscheidend die lateinischen Wörter auf *iensi* für *ienti* (vgl. II.) wie *Athen-iensi*, *Latin-iensi*.

Da nun im Sskr. die Zusammenziehung von *iá* in *î* sowohl bei folgendem als vorhergehendem und unter dem Accent eintritt, d. h. von dem Accent unabhängig ist, z. B. grdspr. *gviâ-tá* = sskr. *jîtá* (sskr. Vb. *jyâ*), ved. *citî* für älteres *citiâ*, ved. *utî* für älteres *utiâ*, dieser selbe Uebergang sich auch im Griechischen u. aa. Sprachen zeigt und dadurch als ein nahe liegender fast allgemein menschlicher ergiebt (z. B. *πολῖτ-ις* für *πολι-ητ-ις* (*της*) und so auch *Συβαρῖτ-ις*

für *Συβαρι-ηται* oder *ιᾶτι*, *ὁπλιτι* für *ὁπλ-ιηται* od
ιᾶτι, *ὀρειτι* zunächst für *ορεσ-ῖτι* und dieses f
ὀρεσ-ιηται oder *ιᾶτι*, wie das entsprechende *ὀρειτ*
für *ὀρεσ-ιωτι* erweist[1]), — so vermuthe ich, da
turvîti, *dabhîti* für ursprünglicheres *turviâti*, *d*
bhiâti steht. Dafür spricht auch eine der V
rianten von *taurvâtôis* in der (unter I.) angefüh
ten Stelle des Avesta, nämlich *taurvaêtôis*,
welchem sich schwerlich eine Corruption von
nem nachweisen lässt, sondern vielmehr, wie
Varianten von *Thraêtaona* (vgl. *Τριτωνιδ Αθα*
S. 7 ff., in diesen Nachrichten 1868 S. 43 f
eine berechtigte Nebenform mit hoher Wah
scheinlichkeit zu erkennen ist. Und diese N
benform erklärt sich in der That aus dem v
mutheten *turviâti*.

Da nämlich sowohl im Sskr. als in der Spr
che des Avesta ursprüngliches *i* vor Vokal
durch die fast allgemein menschliche Synize
so überaus oft zu *y* wird, so dürfen wir unb
denklich annehmen, dass dieses in der Sprac
des Avesta auch mit *turviâti* geschehen sei. D
durch und durch das gewöhnlich vor *u* erzeug
a entstand zunächst *taurvyâti*; dann ist *â* v
mittelst des *y* (vgl. Justi, Handbuch des Altba
trischen S. 359, 20) zu *ê* geworden, so da
taurvyêti (eigentlich *taurvyêiti*, aber im Genet
ohne dieses *i* *taurvyêtôis*) entstand, endlich
das *y* eingebüsst (Justi 365, 3), aber dem *ê*, w
gewöhnlich, ein *a* vorgetreten, also *taurvaêtô*

Dürfen wir demnach *Turviâti*, *Dabhiâti*
Grundlage von *Turvîti*, *Dabhîti* annehmen,
erhalten wir das Recht auch in *Çaryâti* das
aus Synizese eines ursprünglichen *i* zu erklär
und *Çar-iâti* zu Grunde zu legen. Dieses erhi

1) Beiläufig bemerke ich, dass wie *Συβάριτας* aus
βαρῖτας, ganz ebenso *Ὀρίστης* aus *Ὀρισ-ῖτης* entstanden

dann, wie *Turv-iâti* in *Turva*, als Basis den in den Veden erscheinenden Eigennamen *Çara*.

Damit erhalten wir *iâti* als arischen Reflex des griechischen *ιατι, ιητι, ιωτι*, so wie des lateinischen *iensi* für *ienti*, woraus sich ergiebt, dass wie *anti*, *âti*, so auch *ianti*, *iâti* schon in der Grundsprache existirten.

VI.

Es würde nun die Frage zu erörtern sein, wie diese Suffixe *anti*, *âti* und *ianti*, *iâti* entstanden sind. Da ich eine ganz sichre Entscheidung nicht zu geben vermag, so will ich mich darauf beschränken, meine Ansicht kurz mitzutheilen.

Das auslautende *i* scheint mir in beiden das Suffix zu sein, welches im Sskr. zur Bildung von Patronymicis dient (Vo. Sskr. Gr. §. 436); man vgl. z. B. *ânuroh-at-i* Patronymikum von *anu-roh-ant* im Gaṇa Taulvalyâdi zu Pâṇini II. 4. 61; man beachte in diesem Beispiele die für das Sskr. gesetzliche Einbusse des *n*, die auch in griech. *ευ, ου* lat. *ĕt* (in II.) eingetreten ist.

In Bezug auf *ant* erinnere ich daran, dass ich schon lange eine Menge Nomina auf *a* als Verstümmelung von solchen auf *ant* nachgewiesen habe; speciell lässt sich dieses für die Themen auf *va* feststellen; so dass z. B. *turva*, vermittelst des belegten *turvan*, auf *turvant* (Ptcp. Pr. von *turv* ohne die nur phonetische, in den Veden noch oft mangelnde, Dehnung vor *rv*) zurückgeht. In **Turv-ant-i*, dann *Turv-ât-i*, erkenne ich nun ein von dem Namen des Stammvaters *Turvant* durch *i*, eig. »angehörig« gebildetes Patronymikum. Solcher gab es in der Grundsprache gewiss viele; allein schon in ihr waren die ursprünglichen Themen auf *ant* viel-

fach zu Themen auf *a*, und die Formen auf *an*
zu solchen auf *âti* geworden, so dass das gene
tische Verhältniss der Formen auf *âti* anfange
musste aus dem Sprachbewusstsein zu verschwin
den; noch mehr musste diess natürlich nach de
Trennung geschehen; *anti* und *âti* mussten in
Sprachbewusstsein sich von dem Heerde ihre
Entstehung loslösen und nach und nach für selbst
ständige Exponenten der Angehörigkeit gelten
in Folge davon erscheinen sie dann in Fälle
wo die Basis sicherlich nie auf *ant* auslautete
wie z. B. lat. *nostr-âti* von *nos-tro* u. aa.

Aehnlich deute ich die Entstehung von *iant*
iâti aus ursprünglichen Themen auf *iant*, Pt
Präs. der Verba der sogenannten 4ten Conjuga
tions-Classe, also etwa *dhabîti* für *dabhiâti* au
dabh-iant-i; auch hier wurden — ähnlich wie be
denen auf *anti, âti — ianti, iâti* nach und nach z
selbstständigen Exponenten des Begriffs »ange
hörig« und traten in dieser Bed. ebenfalls a
Wörter, die nie auf grundsprachliches *iant* aus
lauteten, wie z. B. in στρατ-ιωτ-ης von στρα-τό (a
tem Ptcp. Pf. Pass. von grundsprachl. *star*).

VII.

Beiläufig will ich nicht unbemerkt lasse
dass durch die wesentliche Identität von ved
Turvîti mit dem *Taurvâiti* des Avesta, zu de
bisher schon nachgewiesenen, diesen heilige
Schriften der Arier gemeinsamen, Eigenname
noch ein neuer, nämlich ein Patronymikum, trit
oder vielmehr, da, wie bemerkt, auch dessen Ba
sis *Taurva* = ved. *Turva* den Verfassern de
Avesta bekannt gewesen sein muss, zwei, näm
lich auch der des Stammvaters.

VIII.

Schliesslich muss ich noch hervorheben, dass die hier besprochenen Wörter auf grundsprachliches *âti*, als secundäre Bildungen, nicht mit solchen wie lateinisch *quiêti* f. = altpersisch *shiyâti* (für grundsprachlich *skiâti*, vgl. Fick, die ehemalige Spracheinheit der Indogermanen Europas 1873 S. 113), sskr. in den Veden *vasâti* (f.) »Morgendämmerung«, in der Sprache des Avesta *carâiti* verwechselt werden dürfen. Die beiden ersten — über das dritte wage ich noch kein Urtheil — sind Bildungen durch das primäre Abstractsuffix *ti* aus Verbalthemen, in denen *â* angetreten ist. Die Zahl derartiger Verbalthemen ist sehr beträchtlich und ihre Bildung gehört schon der Grundsprache an; die meisten Beispiele liefern die Verba auf *r* und *m n*, wobei Einbusse des radikalen Vokals eintritt z. B. aus *par-â* sskr. *prâ*, gr. *πλη*, lat. *plê*, aus *dham-â* sskr. *dhmâ*, aus *man-â* sskr. *mnâ*, gr. *μνη*, so auch aus *gan-â*, lat. *gnâ* in *co-gnâ-to*, (*g*) *nâ-scor*, sskr. *jnâti* »Verwandter«, griech. *γνή-σι-ο* für *γνη-τ-ο*. Doch tritt dieses *â* auch an Verba auf andere Auslaute z. B. schon grdspr. *gvi-â* in sskr. *jyâ*, gr. *βιάω*, grdspr. *ski-â* in dem erwähnten *qui-ê-ti*, *shiy-â-ti*; eben so sskr. *jîv-â* von *jîv* »leben« in *jîv-â-tu* und *jaivâtrika*, welches auf *jîv-â-tar* beruht; eben so *vas-â* in *vas-â-ti* von *vas* »aufleuchten«, woher auch *ushas* »die Morgenröthe«.

Wie dieses *â* zu deuten, ist noch sehr fraglich. Doch bemerke ich, dass es vorzugsweise in generellen Verbalderivationen hervortritt, z. B. von *man* sskr. Aor. *a-mnâ-sisham*, *μνή-σομαι*, lat. *qui-ê-vi*. Zu diesen generellen Ableitungen gehören natürlich auch die auf grundsprchl. *ska*,

z. B. *θνή-σκω* (wie *μι-μνή-σκω*), *lucê-sco* (sor derbarer Weise gegen alle Analogie *quiĕsco*), un auch die reduplicirten, welche ursprüngliche Fr quentative sind, wie *πίμ-πλη-μι* u. aa. Nach dem dieses *â* sich in einer Menge genereller Bi dungen geltend gemacht hatte und die sp cielle Bedeutung, die es einst verlieh, aus de Sprachbewusstsein verschwunden war, musste natürlich den Schein eines integrirenden Thei des Verbalthema's annehmen und trat demnac auch als Präsensthema auf, z. B. sskr. *psâ* a ursprünglichem *bhas-â*, »essen«, gerade wie i Verlauf der Sprachentwickelung ursprünglich Präsensthemen mehrfach zur Bildung von gen rellen Derivationen verwendet wurden.

Ein Theil des Mongolischen Ardsch Bordschi und Stücke des Pantschatan tra im Singhalesischen.

Von

Th. Benfey.

Hr. Thomas Steele, ein Englischer Beamt in Ceylon, hat in englischen Versen eine Bea beitung eines der Buddhistischen Jâtaka (Vo existenzen des Çâkyamuni) herausgegeben u manche andere Mittheilungen aus ceylonesisch Quellen hinzugefügt. Der Titel des Buches i An Eastern Love-Story. Kusa Játakaya, a Bu dhistic Legend: Rendered for the first time, in English Verse, from the Sinhalese Poem of Al giyavanna Mohoṭṭâla, By Thomas Steele, Ceyl Civil Service. London Trübner and Co. 1871

Unter den Beilagen verdienen eine besond Beachtung die Sinhalese Stories S. 247 ff.

Sogleich die erste dieser Geschichten ist

sofern von Wichtigkeit als die von mir im Pantschatantra I. 489 nur aus dem Mongolischen Ardschi Bordschi erschlossene Existenz derselben im Indischen dadurch ihre volle Bestätigung erhält. Die ceylonesische Darstellung ist gleichwie die mongolische aus buddhistischen Quellen geflossen und spricht, wie vieles andre, für die Ansicht, dass die Hauptniederlage dieser Märchen, Fabeln u. s. w. in der buddhistischen Literatur zu finden ist.

Die Mongolische Form möge man jetzt bei Jülg Mongolische Märchen, Insbruck 1868 S. 101 ff. nachsehen; über die damit zusammenhängenden vgl. man Pantschatantra I. S. 489 ff. und Jülg a. a. O. S. 129.

In der vorliegenden ceylonesischen Darstellung, die einfacher ist als die mongolische, gilt es die Tochter eines Königs, von der man nicht weiss, ob sie stumm ist, oder nicht sprechen will, zum Sprechen zu bringen. Wem diess gelingen würde, verspricht sie der König zur Frau. Nachdem viele sich vergebens damit abgemüht haben, macht sich ein Prinz daran. Auch er erhält zuerst keine Antwort. Da wendet er sich an eine in der Halle hängende Lampe und spricht »Lampe! ich will dir eine Geschichte erzählen: Vier Reisende, ein Zimmermann, ein Maler, ein Kaufmann und ein Juwelier kamen zusammen in ein Wirtshaus, wo ein Holzblock auf dem Boden lag. Der Zimmermann nahm sein Werkzeug und schnitzte daraus die Gestalt einer schönen Frau in Lebensgrösse. Der Maler malte sie an, dass sie schön wie eine Göttin ward. Der Kaufmann bekleidete sie mit den schönsten Stoffen; der Juwelier schmückte sie mit den kostbarsten Edelsteinen, Ohrringen, Halsketten u. s. w. Zuletzt ward die Figur lebendig. Alle vier verliebten

sich nun in sie; jeder wollte sie zur Frau habe
Der Zimmermann berief sich darauf, dass er il
die unvergleich schöne Gestalt gegeben hab
der Maler, dass er ihr die herrliche Farbe ve
liehen, der Kaufmann, dass er sie köstlich b
kleidet, der Juwelier, dass er sie so glänzen
geschmückt habe. So geriethen sie in imm
grösseren Streit. »Wer ist wohl der rechtm
ssige Eigenthümer? fragte der Prinz nun d
Lampe. Diese giebt mehrere Antworten, welc
der Prinz stets widerlegt. Da kann sich endli
die Prinzessin nicht länger schweigend halte
Sie entscheidet, »dass die Frau dem Wirth g
höre, aus dessen Eigenthum, dem Holzblock, s
gemacht sei«. Der Prinz, da es ihm gelung
ist, die Prinzessin zum Sprechen zu bringen, e
hält sie natürlich zur Frau.

S. 248 wird die Form von »Salomo's Urthei
erzählt, welche sich auch in d'Alwis Sidat
Sangarawa Introduction, p. CLXXIX findet, d
aus Roberts Oriental Illustrations of the S
cred Scriptures p. 191 entlehnten und im Orie
und Occident III, 377 von Liebrecht mitgethe
ten entspricht und mit der von mir im Pan
schatantra II, S. 544 zu I. §. 166 S. 396 geg
benen eng zusammenhängt; vgl. auch noch d
chinesischen Formen in Ausl. 1860, nr. 17
201, und nr. 36, S. 431; so wie eine in de
mongolischen Kasar Chan, welchen Hr. von d
Gabelentz übersetzt hat.

S. 249 folgt eine hübsche Erzählung i
Geiste der Lalenburger.

Darauf dann mehrere des Pantschatantra, n
mehr oder weniger leichten Varianten; nämli
S. 250 eine Variante zu Pantschat. Lib. I. fa
21 (s. Bd. I. §. 101. S. 284); — ferner S. 2
leicht variirt Pantschat. Lib. V. fab. 2 (vgl. B

I. §. 201. S. 479). — S. 251 = Pantsch. Lib. I. fab. 7 (vgl. Bd. I. §. 60 S. 174); — S. 253 The Braggards ist verwandt mit dem Rahmen von Pantschat. Lib. II und Pantsch. Lib. I. fab. 14 (vgl. Bd. I. §. 84 S. 242). — S. 254 = Pantsch. Lib. IV. fab. 8 (Bd. I. §. 191. S. 468). — S. 255 The rat and The Garandiyâ hängt mit dem Abschnitt des ursprünglichen Sanskrit-Werkes über Politik zusammen, welcher Pantschat. Bd. I. §. 219 S. 544 ff. besprochen ist; darauf beruht auch die kurze Fassung in Bhartrihari's Nitiçatakam Strophe II 82. — S. 255 The Cranes u. s. w. ist = Pantsch. Lib. I. fab. 20 (vgl. Bd. I. §. 97 S. 279).

Skizze einer Abhandlung: Ueber Augensprache, Mienenspiel, Gebärde und Stimmmodulation.

Von

Th. Benfey.

Ein Zufall führte dem Verfasser dieser Zeilen eine Reihe von Gedanken über die in der Ueberschrift bezeichneten Erscheinungen ins Gedächtniss zurück. Sie schienen ihm einer Ausarbeitung nicht unwerth zu sein. Allein da andre Aufgaben ihn in naher Zeit und vielleicht überhaupt nicht mehr dazu kommen lassen werden, hält er es für nicht undienlich mit wenigen Worten den Ideengang zu skizziren, welchen er in einer solchen verfolgen würde, einerseits für ihn selbst zur Erinnerung im Fall ihm noch Musse zur Ausarbeitung verstattet werden möchte, andrerseits um Fachgenossen darauf aufmerksam zu machen, die vielleicht geneigt wären, sie zu übernehmen.

Er ging von der Bemerkung aus, dass man

unter Sprache gewöhnlich nur die artikulir
Sprache versteht und dabei fast ganz übersiel
dass diese mehr oder weniger, ja, wo sie ih
ganze Kraft entfalten will: im Affect, von d
in der Ueberschrift zusammengefassten vier A
cessorien begleitet ist, dass diese sogar nicht s
ten ganz und gar an die Stelle derselben treten u
fähig sind Wahrnehmungen, Empfindungen, G
fühle, Gedanken und Absichten einzig durch sic
ohne jegliche Beihilfe der artikulirten Rede vo
ständig verständlich zu machen. Drei dies
Accessorien —: Augensprache, Mienenspiel u
Stimmmodulation — scheinen sogar bei all
Völkern ganz — das vierte —: Gebärden — w
nigstens zum Theil übereinzustimmen, so da
sie das verbindende Element in der gegensei
gen Gedanken-Vermittelung der gesammt
Menschheit bilden, während die artikulirte Spr
che, im vollsten Gegensatz dazu, sich als tre
nendes, die Menschheit in Völker scheidend
Element geltend macht.

Diese Accessorien der Rede scheinen demg
mäss eine grössere Beachtung zu verdienen
ihnen bisher zu Theil geworden ist und zwa

1. an und für sich als wesentliche und se
bedeutende Aeusserungen der menschlichen See
welche würdig sind in ihrem ganzen Umfang g
kannt und, wo möglich, ihren tieferen Gründ
nach, erkannt zu werden.

2. Um zu erforschen, welche Aeusserung
dieser Art allen oder vielen Völkern gemei
sam sind, welche einigen besonders eigen, u
worin sie sich unterscheiden, damit man festz
stellen vermöge, was in ihnen allgemein menschli
sei, was auf besondere naturgemäss zusamme
hängende Menschencomplexe beschränkt, was a
allgemeinen Gesetzen, was auf Convention beruh

3. Weil sie dazu dienen können uns die Vorstellung von der rein menschlichen Entstehung der artikulirten Sprache nicht wenig zu erleichtern, indem ihnen unzweifelhaft die Fähigkeit zugesprochen werden muss, jedem Laute oder Lautcomplexe diejenige Bedeutung zu verleihen, welche der erste, der diese Articulationen mit jenen Accessorien verband, durch sie auszudrücken gedrängt war oder beabsichtigte.

4. Weil sie in gleicher Weise geeignet sind, manche Erscheinungen in der Entwickelung der artikulirten Sprache zu erklären oder wenigstens begreiflich, oder auch nur vorstellbar zu machen. So ist es z. B. eine unläugbare Thatsache, dass Völkerstämme, welche zu derselben Menschenrasse gehören, Sprachstämme entwickelt haben, welche vom sprachwissenschaftlichen Standpunkt aus völlig unvereinbar sind. Die Indogermanen z. B. werden aus physischen und psychischen Gründen zu derselben Rasse — : der sogenannten lockenhaarigen — gerechnet, zu welcher auch die Semito-Hamiten, Basken und kaukasischen Völker, so wie in weiterem Kreise selbst die Dravida's Ostasiens und die Nuba's Nordafrika's gezählt werden. Diese Völkerstämme bilden aber in der historischen Zeit Sprachstämme, welche weder mit dem Indogermanischen Sprachstamm noch unter sich auf sprachwissenschaftlichem Wege vereinigt werden können. Diese Erscheinung wird aber begreiflich, wenn wir annehmen dürfen, dass zu der Zeit, als sich die Voreltern dieser Völkerstämme von dem ihnen zu Grunde liegenden, die Basis der ganzen Rasse bildenden, trennten, jene Accessorien der artikulirten Sprache diese selbst noch so sehr überragten, dass artikulirte Laute und Lautcomplexe erst in geringer Zahl zu begrifflichen Werthen verwendet

wurden, oder diese Verwendung, selbst wenn sie schon einen grösseren Umfang angenommen hatte, doch in Bezug auf die damit verknüpften begrifflichen Werthe noch so wenig durch Gewohnheit gesichert war, dass noch nach der Trennung durch Hülfe derselben Accessorien andre Laute und Lautcomplexe mit Leichtigkeit an ihre Stelle zu treten vermochten.

In Betracht dieser Bedeutung jener Accessorien und selbst Stellvertreter der artikulirten Rede würde schliesslich der Wunsch gerechtfertigt sein, dass

1. Reisende ihnen die grösste Aufmerksamkeit widmen und alle dahin gehörige Erscheinungen aufs sorgfältigste und so klar als irgend möglich beschreiben möchten.

2. Dass auch Schriftsteller, welche Grammatiken lebender Sprachen abfassen, anstatt sich bloss auf die nächsten praktischen Bedürfnisse zu beschränken, sich von dem Gedanken leiten lassen möchten, dass es die Aufgabe einer wissenschaftlichen Grammatik ist, alle Mittel zu verzeichnen und so genau als möglich zu schildern, deren sich eine Sprache bedient, um im lebendigen Verkehr das vollste Verständniss der gegenseitigen Mittheilungen zu erzielen. Eine genaue Beschreibung der hervorgehobenen Accessorien der articulirten Rede lässt sich aber im Gebiete der lebenden Sprachen unzweifelhaft anbahnen und nach und nach zu hoher Vollendung führen. Sie würde den Grammatiken derselben im Verhältniss zu denen der todten Sprachen einen Werth verleihen, welcher durch die tiefere Einsicht die diese letzteren in den Bau und die Entwickelung der artikulirten Sprache gewähren, kaum überragt, ja auch nur aufgewogen werden möchte.

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

2. Juli. № 16. 1873.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Eine neue Methode Kreistheilungen zu untersuchen

von

G. Quincke.

Die Aufgabe, eine Kreistheilung zu untersuchen, an welcher die Lage zweier Fernröhre mit Ablese-Mikroskopen auf einige Secunden genau bestimmt werden sollte, hat mich auf eine Untersuchungs-Methode geführt, welche Bequemlichkeit und Genauigkeit vereinigt und meines Wissens bisher noch nicht beschrieben worden ist.

Die Fernröhre sind mit einem Gauss'schen Ocular versehen (Astron. Nachr. 579, 31. 10. 1846), bei welchem durch ein unter 45° gegen die Fernrohraxe geneigtes Planglas zwischen Ocularlinse und Fadenkreuz das letztere beleuchtet werden kann.

Das Fernrohr ist auf Unendlich und seine Axe normal gegen eine planparallele Glasplatte gestellt, wenn das Fadenkreuz mit dem Spiegel-

bild zusammenfällt, welches die von der Glas
platte zurückgeworfenen Strahlen entwerfen.

Die Glasplatte kann normal gegen die Kreis-
theilung mit Wachs auf einem drehbaren Tisch-
chen in der Mitte derselben aufgestellt werden
Axe und Drehungsaxe des Fernrohrs stehen ge-
nau senkrecht gegeneinander, wenn Fadenkreuz
und Spiegelbild desselben zusammenfallen, auch
nachdem das Fernrohr um 180° gedreht worden
ist. Bei verschiedenen Lagen des mit der Kreis-
theilung fest verbundenen Planglases ergiebt
sich dadurch auch gleichzeitig die etwa vorhan-
dene Excentricität der Drehungsaxe gegen den
Mittelpunkt der Kreistheilung. Der grösseren
Lichtintensität wegen benutze ich Steinheil'sche
Planparallelgläser, deren eine Seite mit Silber
belegt und polirt worden ist.

2 Planparallel-Spiegel werden mit Wachs auf
dem Tischchen senkrecht gegen die Fernrohr-
Axen befestigt. Sie stehen genau senkrecht ge-
geneinander, wenn der von ihnen gebildete Win-
kelspiegel die durch doppelte Reflexion erzeug-
ten beiden Spiegelbilder eines Fernrohrfaden-
kreuzes mit diesem selbst zusammenfallen lässt.

Stellt man die Axen der Fernröhre 1 und 2
durch Reflexion der beleuchteten Fadenkreuze
normal gegen die beiden Flächen des Winkel-
spiegels, so bilden sie genau einen Winkel von
90° mit einander. Verschiedene Lagen des Win-
kelspiegels bestimmen dann je 4 um 90° von
einander entfernte Punkte der Kreistheilung.

2 Plangläser bilden genau einen Winkel von
120° oder 60° mit einander, wenn 2 einzeln nor-
mal gegen dieselben gestellten Fernröhre gleich-
zeitig durch doppelte Reflexion das Fadenkreuz
des Fernrohrs 1 im Fadenkreuz von Fernrohr
2 erscheinen lassen und umgekehrt. Stellt man

bei verschiedener Lage des Winkelspiegels von 120° oder 60° die beiden Fernröhre normal gegen die einzelnen Spiegelflächen, so erhält man durch die Ablesungen der Kreistheilung Punkte, die genau um 60° resp. 120° von einander abstehen.

Bilden die beiden Plangläser einen Winkel $180—2\varphi$, die normal gegen dieselben gestellten Fernrohr-Axen einen Winkel 2φ mit einander, so lässt sich mit Wachs ein 3tes Planglas auf dem Tischchen in der Mitte der Kreistheilung so befestigen, dass es die von dem Fadenkreuz des Fernrohrs 1 ausgehenden Strahlen nach dem Fadenkreuz des Fernrohrs 2 reflectirt. Das Planglas 3 ist dann unter dem Winkel φ gegen das Planglas 1 oder 2 geneigt und der aus 1 und 3 oder 2 und 3 gebildete Winkelspiegel kann wieder benutzt werden, die Fernrohraxen senkrecht gegen die Spiegelflächen zu stellen und Punkte der Kreistheilung zu bestimmen, die um den Winkel φ von einander entfernt sind.

Aus den Winkeln 90° und 60° erhält man mit diesem 3ten Planspiegel also Winkel von 45° und 30°, aus diesem Winkel von $22^1/_2$ und 15° u. s. f.

Sollte Jemand eine Schwierigkeit finden die Plangläser mit Wachs und der freien Hand in die richtige Lage zu bringen, so wird sich diese Schwierigkeit durch eine einfache Vorrichtung mit Schraube und Druckfeder leicht beseitigen lassen.

Die Methode der Reflexion des Fadenkreuzes erlaubt auch Winkel von Glasprismen mit denen von Winkelspiegeln zu vergleichen, und mit dem unveränderlichen Winkel eines Glasprismas von genau 90° 60° 30° 20° 10° u. s. w. die Kreistheilung auszumessen und zu calibriren. Das letztere habe ich noch nicht ausführen können,

da die seit längerer Zeit für diesen Zweck bestellten Glasprismen noch nicht in meinem Besitze sind.

Die beschriebene Methode Kreistheilungen zu untersuchen ist bequem und genau, so weit die Vergrösserung der Fernröhre reicht und eine Unterscheidung von Ocularfäden möglich ist, d. h. so genau als man überhaupt mit dem betreffenden Apparat sehen kann. Da auch die Vollkommenheit der Plangläser mit dem Fernrohr leicht controllirt werden kann, so ist sie vielleicht auch bei der Herstellung einer neuen und genauen Kreistheilung mit Vortheil zu verwenden.

Würzburg den 1ten Juni 1873.

Note betreffend die eindeutige Transformation ebener Curven.

Von

Dr. A. Voss in Göttingen.

In der Theorie der Abelschen Functionen von Clebsch und Gordan findet sich ein algebraischer Beweis des Satzes, dass zwei Curven, welche eindeutig in einander transformirt werden können, gleiches Geschlecht haben. Von Herrn Cremona ist später ein synthetischer Beweis dieses merkwürdigen Theorems gegeben worden. Ich erlaube mir hier einen Beweis desselben vorzulegen, welcher im Grunde auf ähnlichen Principien beruht, wie der Cremona'sche, aber die Betrachtung räumlicher Verhältnisse nicht erfordert.

Zwei Curven $f x_1 x_2 x_3 = 0$ $F y_1 y_2 y_3 = 0$ von

den Graden n, n' seien eindeutig auf einander bezogen vermöge der Formeln

$$\varrho y_i = \varphi_i \quad \sigma x_i = \psi_i$$

wo die φ_i rationale ganze Functionen von F vom Grade s sind, welche in σ einfachen und τ Doppelpuncten von $f=0$ gleichzeitig verschwinden, während für die ψ_i in Bezug auf $F=s$ die entsprechenden Zahlen s' σ' τ' gelten. Ausserdem mag angenommen werden, dass $f=0$ $F=0$ sich in μ entsprechenden Puncten schneiden.

Verbindet man die entsprechenden Puncte von f, F durch Gerade, so entsteht eine Curve C, deren Klasse $k=n+n'-\mu$ ist. Wir bestimmen die Ordnung der C, indem wir untersuchen, wie oft consecutive Verbindungsgerade xy, $x+dx\ y+dy$, sich auf einer willkürlichen Geraden $\alpha_x = 0$ schneiden. Die Determinante

$$\Sigma \pm (\alpha_1, x_2 y_1 - x_1 y_2,\ d(x_1 y_2 - x_2 y_1)),$$

welche dann verschwinden muss, verwandelt man leicht in

$$\alpha_y \Sigma (x\, dy\, y) - \alpha_x \Sigma (x\, dy\, y) = 0.$$

Vermöge

$$f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3 = 0$$

$$k_1 dx_1 + k_2 dx_2 + k_3 dx_3 = 0$$

$$dy_i = \frac{\delta \varphi_i}{dx_1} dx_1 + \frac{\delta \varphi_i}{dx_2} dx_2 + \frac{\delta \varphi_i}{dx_3} dx_3$$

erhält man

$$\Sigma (x\, dx\, y) = k_x \Sigma y_i f_i$$

$$\Sigma x\, dy\, y = \frac{k_x}{s} \begin{vmatrix} \frac{\delta \varphi_1}{dx_1} & \frac{\delta \varphi_2}{dx_1} & \frac{\delta \varphi_3}{dx_1} & f_1 \\ \frac{\delta \varphi_1}{dx_2} & \frac{\delta \varphi_2}{dx_2} & \frac{\delta \varphi_3}{dx_1} & f_2 \\ \frac{\delta \varphi_1}{dx_3} & \frac{\delta \varphi_1}{dx_3} & \frac{\delta \varphi_3}{dx_3} & f_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 \end{vmatrix} = \frac{k_x}{s} T$$

die Curve

$$M \equiv \alpha_y \Sigma y_i f_i - \frac{T \alpha_x}{s} = 0$$

giebt durch die Zahl ihrer Schnittpuncte mit $f = 0$ die Ordnung der C an. Es verschwindet aber M für sämmtliche Doppel- und Rückkehrpuncte von $f = 0$ einfach. Für jeden der Puncte σ, μ verschwindet M einfach, während $\frac{\delta M}{dx_i} \equiv f_i$ wird. Für jeden der Puncte τ endlich verschwindet M zweifach und ist $\frac{\delta^2 M}{\delta x_i \delta x_k} \equiv f_i k$.

Daraus ergiebt sich die Ordnung ν der C_m

$$\nu = n(2s + n - 1) - 2(d + r) - 2\sigma - 6\tau + 2\tau - 2\mu$$

$$\nu = n(2s' + n' - 1) - 2(d' + r') - 2\sigma' - 6\tau' + 2\tau' - 2\mu$$

Man hat aber

$$n' = ns - \sigma - 2\tau$$

$$n = n's' - \sigma' - 2\tau'$$

Indem man die Ausdrücke von ν gleich setzt, entsteht:

$$2n' + n^2 - n - 2(d + r) = 2n + n'^2 - n' - 2(d' + r')$$

oder

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} - d - r, = p = \frac{(n'-1)(n'-2)}{2} - d' - r'$$

womit der Satz bewiesen ist.

Da die Curve C eindeutig auf f, F bezogen ist, so kennt man sowohl ihr Geschlecht p als ihre Classe k und Ordnung $2[k + p - 1]$. Man erhält so die weiteren Singularitäten von C aus den Plückerschen Formeln, beispielsweise:

$$\iota'' = 0$$

$$r'' = 2(\nu - 1) - k + 2p$$

$$d'' = \frac{(\nu-1)(\nu-6)}{2} - 3p + k$$

$$t'' = \frac{(k-1)(k-2)}{2} - p$$

$$\nu = 2(k + p - 1)$$

$$k = n + n' - \mu$$

wo ι'' r'' d'' t'' die Zahl der Wende-Rückkehr-Doppeltangenten und Doppelpunkte von C bezeichnen.

Zur Geometrie der Flächen.

Von

Dr. A. Voss in Göttingen.

In einem neuerdings erschienenen Aufsatze[1]) hat Herr Cayley die Hesse'sche Determinante einer in der Gleichung

$$P^k + \lambda P^{k'} = 0$$

vorausgesetzten Fläche untersucht. Man erhält auf eine elegantere Weise Aufschluss über das Verhalten der genannten Determinante Δ, wenn man ihre Polaren $\Sigma y_i \frac{\delta \Delta}{dx_i}$, $\Sigma y_i y_k \frac{\partial^2 \Delta}{dx_i dx_k}$ u. s. w. untersucht[2]). Es ergibt sich so:

In jedem conischen Knotenpuncte einer allgemeinen Fläche $f = 0$ hat auch Δ einen conischen Knotenpunct, dessen osculirender Kegel mit dem von f identisch ist.

In einem biplanaren Puncte von f hat Δ einen triplanaren Punct, und zwei Tangentenebenen desselben coincidiren mit denen der Fläche f.

In einem uniplanaren Knotenpuncte von f hat Δ einen vierfachen Punct. Der osculirende Kegel vierten Grades besteht aus einem

1) Quarterly Journal of Mathematics. April 1873.

2) Auf dieselbe Weise lässt sich eine allgemeine Untersuchung der Hesseschen Curve anstellen insbesondere die Plückersche Formel:

$$i = 3n(n-2) - 6d - 8\varrho$$

herleiten.

Kegel zweiten Grades und der doppeltzählenden Tangentenebene von $f = 0$.

Es ergibt sich hieraus zugleich das Verhalten von Δ in höheren Knotenpuncten, sobald in denselben keine besonderen Singularitäten auftreten.

Von den zahlreichen Anwendungen, die sich auf dies Verhalten der Hesse'schen Determinante gründen lassen, mag nur folgende hervorgehoben werden. Befindet sich auf einer Fläche $n$ten Grades eine Doppelcurve vom Grade μ, eine Rückkehrcurve vom Grade ν, so ist die parabolische Curve

$$4n(n-2)-8\mu-11\nu^{*}).$$

Dieser Satz gestattet insbesondere Anwendungen auf die Geometrie der windschiefen Flächen, deren parabolische Curve aus den doppeltzählenden singulären Erzeugenden besteht, während eine Rückkehrcurve im allgemeinen nicht vorhanden ist. Ist k die Zahl der singulären Erzeugenden, p das Geschlecht der Fläche, so ist

$$\mu = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - p$$

$$2k = 4n(n-2) - 8\mu$$

woraus

$$k = 2(n + 2p - 2).$$

Die Zahl der singulären Erzeugenden, welche bei einer durch drei allgemeine Complexe von

1) Δ wird selbstverst. für ν quadriplanar, wobei sich noch eine Tangentenebene mit den von f vereinigt.

den Graden l, m, n erzeugten Linienfläche auftreten ist bekanntlich

$$4lmn(m+l+n-3)^{1}).$$

Daraus ergibt sich das Geschlecht der Fläche

$$p = lmn(m+n+l-4)+1$$

und die Ordnung der Doppelcurve

$$\mu = lmn(2lmn-(l+m+n)+1).$$

Hieraus ergiebt sich die Bestimmung des Grades N (= Klasse) der Brennfläche zweier Complexe m^{t} und n^{ten} Grades, wenn man bedenkt, dass der Grad der Brennfläche halb so gross ist, wie die Zahl der singulären Erzeugenden der Linienfläche, welche durch die beiden Complexe und einen speciellen linearen mit der Leitgeraden A erzeugt wird. Demnach ist:

$$4N = 16mn(mn-1)-8mn(2mn-(m+n))$$

$$N = 2mn(m+n-2).$$

Beispielsweise ist der Grad der Brennfläche eines linearen Complexes und eines vom $n$ten Grade gleich

$$2n(n-1)$$

was schon von Herrn Klein nachgewiesen wurde[2]).

1) Lüroth, Crelle Bd. 67. Klein, Math. Ann. Bd. V, pag. 292.

2) Math. Ann. V, pag. 435 Anmerk. in dem Aufsatze von Clebsch.

Ueber das Vorkommen organischer Muskelfasern in den Nebennieren.

Von

Dr. A. von Brunn.

Vorgelegt von J. Henle.

In der Marksubstanz der Nebenniere des Menschen finden sich glatte Muskelfasern, welche, zu Bündeln angeordnet, dem Verlauf der stärkeren Venen folgen, in beträchtlicher Menge. — Solche Bündel werden mit seltenen Ausnahmen als Begleiter aller Venen von 0,2 mm. Kaliber und darüber angetroffen; nie werden sie an der Theilungsstelle einer Vene dieser Grösse vermisst, wo sie den zwischen den beiden Aesten befindlichen Winkel ausfüllen und sich von da an den Seiten des Stammes hinabziehen. —

Wie Schnitte, welche die Venen quer getroffen haben, zeigen, sind die Muskelbündel entweder cylindrisch, oder plattgedrückt. Im ersten Falle, der bei Venen von weniger als 0,4 mm. Durchmesser die Regel bildet, liegen die gewöhnlich nur auf einer Seite des Gefässes vorhandenen Bündel der Venenwand entweder nur mit kleiner Fläche an, so wie zwei neben einander liegende Cylinder, oder sie wölben sich in das Lumen hinein und geben dem Querschnitt eine unregelmässig bohnenförmige Gestalt.

Sind dagegen die Muskelfasern zu platten Bündeln angeordnet, so umgeben sie das Venenlumen halbrinnenförmig, wohl auch schlauchförmig, wie wir es bei den stärkeren Venen sehen: bis zu solchen von 1,0 mm. Durchmesser herrscht die Halbrinnenform vor, solche vom stärksten Kaliber, — wie die Vena suprarenalis kurz vor

dem Austritt aus dem Organ und ausserhalb desselben, — besitzen einen vollständigen Muskelschlauch.

Bemerkenswerth ist, dass die rundlichen, vorwiegend die Venen kleinen Kalibers einseitig begleitenden Muskelbündel stets relativ, oft aber auch absolut stärker sind, als die platten. Erstere erreichen an Venen von 0,15 — 0,4 mm. Durchmesser eine Stärke von 0,5 — 0,6 mm., während die platten Stränge innerhalb der Nebennieren an Gefässen von 0,5 — 1,2 mm. einen Dickendurchmesser von höchstens 0,5 mm. zeigen.

Die Vena suprarenalis behält die Musculatur auch ausserhalb der Nebennieren bei; dieselbe geht direct in die Musculatur der Vena cava inf. über.

Die Richtung der Muskelfasern ist stets der Gefässaxe parallel; Ringfasern kommen nicht vor.

Von dem Venenlumen sind die Muskelbündel nur durch die Intima getrennt. Umgeben sind sie von wenig fibrillärem Bindegewebe mit spärlichen Zellen, welches Fortsätze, wie zwischen die Zellreihen der Marksubstanz, so auch in die Muskelmasse hinein sendet und dieselbe in grössere und kleinere Bündel von bis 0,03 mm. Durchmesser herab, zerlegt.

Die Länge der durch Kalilauge von 35 % isolirten Muskelzellen beträgt 0,09 — 0,2 mm., ihre Dicke 0,006 — 0,009 mm., die Länge der Kerne 0,015 — 0,018, die Dicke derselben 0,003 mm.

In weit geringerer Menge finden sich die beschriebenen Muskelbündel in der Nebenniere des Pferdes. Sie liegen hier den Venen in derselben

innigen Weise an und finden sich besonders in den Theilungswinkeln; nirgends aber als runde Stränge, sondern als platte Bündel. —

Venen von 0,2—0,5 mm. Durchmesser zeigen nur einseitig anliegende platte Bündel von höchstens 0,1 mm. Mächtigkeit.

Aehnlich verhält sich die Nebenniere des Kaninchens; auch hier findet man an den Hauptvenen von 0,3 mm. Kaliber platte Bündel von 0,09 — 0,12 mm. Durchmesser.

In der Nebenniere des Rindes habe ich glatte Muskeln nicht auffinden können, selbst nicht an den stärksten Venen des Markes; ebensowenig gelang mir dies bei den Organen des Hundes, der Katze, der Ratte und einiger Vögel.

Ueber die Function der beschriebenen Muskelmassen wird zur Zeit keine Vermuthung auszusprechen sein, namentlich da dieselben in den Nebennieren der meisten Thiere nicht aufzufinden sind.

Bemerkungen über die orthogonalen Flächen.

Zweite Note.

Von

A. Enneper.

Auf Seite 226 der Nachrichten v. d. K. G. d. W. aus dem Jahre 1872 ist das Problem der Aufstellung der Bedingungsgleichung, dass eine Fläche einem orthogonalen System angehören kann, auf die Elimination einer Quantität zwischen zwei algebraischen Gleichungen reducirt.

Die Ausführung der Elimination ist nicht ohne Weitläufigkeit, eine weitere Untersuchung ergiebt, dass die Finalgleichung, in Folge der wenig symmetrischen Constitution ihrer einzelnen Terme, ziemlich mühsam zu bilden und nicht leicht übersichtlich ist. Es erscheint daher nicht ungerechtfertigt noch einen andern Weg anzugeben, welcher von analogen Betrachtungen ausgeht, wie die früher angewandten und eine wirkliche Ausführung der Bedingungsgleichung gestattet.

Ist $f(x, y, z) = 0$, oder kürzer $f = 0$, die Gleichung einer Fläche auf ein orthogonales Coordinatensystem bezogen, so mögen zur Vereinfachung folgende abkürzende Bezeichnungen stattfinden:

$$1)\quad \begin{cases} \dfrac{df}{dx} = p, & \dfrac{df}{dy} = q, & \dfrac{df}{dz} = r. \\ \dfrac{d^2f}{dx^2} = A, & \dfrac{d^2f}{dy^2} = A', & \dfrac{d^2f}{dz^2} = A'', \\ \dfrac{d^2f}{dx\,dy} = B'', & \dfrac{d^2f}{dx\,dz} = B', & \dfrac{d^2f}{dy\,dz} = B. \end{cases}$$

Mit Rücksicht auf diese Bezeichnungen setze man:

$$2)\quad \begin{cases} R = A + A' + A'', \\ S = AA' + AA'' + A'A'' - B^2 - B'^2 - B''^2, \\ T = \begin{vmatrix} A, & B'', & B' \\ B'', & A', & B \\ B', & B, & A'' \end{vmatrix}. \end{cases}$$

Es seien die drei Quantitäten L, M und N durch die folgenden Gleichungen bestimmt:

$$\begin{vmatrix} p, & q, & r \\ B', & t+A', & B \\ B, & B, & t+A'' \end{vmatrix} = L, \quad \begin{vmatrix} p, & q, & r \\ B', & B, & t+A'' \\ t+A, & B', & B' \end{vmatrix} = M$$

$$\begin{vmatrix} p, & q, & r \\ t+A, & B'', & B' \\ B'', & t+A', & B \end{vmatrix} = N,$$

oder kürzer:

$$3) \quad \begin{cases} L = pt^2 + l_1 t + l, \\ M = qt^2 + m_1 t + m, \\ N = rt^2 + n_1 t + n, \end{cases}$$

wo, mit Rücksicht auf 2) gesetzt ist:

$$4) \quad \begin{cases} l_1 = pR - (pA + qB'' + rB'), \\ m_1 = qR - (pB'' + qA' + rB), \\ n_1 = rR - (pB' + qB + rA''). \end{cases}$$

Man kann l, m, n einfach durch die folgenden Gleichungen definiren, statt ihre Werthe in Form von Determinanten hinzuschreiben:

$$5) \quad \begin{cases} lA + mB'' + nB' = pT, \\ lB'' + mA' + nB = qT, \\ lB' + mB + nA'' = rT. \end{cases}$$

Die Gleichungen 4) gehen, wenn $R = A + A' + A''$ gesetzt wird:

$$6) \quad \begin{cases} l_1 A + m_1 B'' + n_1 B' = pS - l, \\ l_1 B'' + m_1 A' + n_1 B = qS - m, \\ l_1 B' + m_1 B + n_1 A'' = rS - n. \end{cases}$$

Die Gleichungen 5) und 6) gestatten eine leichte Verification der folgenden Resultate. Es sei t durch die Gleichung bestimmt:

$$7) \qquad pL + qM + rN = 0,$$

oder:

$$8) \; (p^2+q^2+r^2)t^2+(pl_1+qm_1+rn_1)t+pl+qm+rn=0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichungen seien t' und t''. Dem Werthe $t = t'$ mögen die Werthe L', M', N' von L, M, N entsprechen, analog bezeichne man die linken Seiten der Gleichungen 3) für $t = t''$ durch L'', M'', N''.

Nach 8) ist:

$$9) \quad \begin{cases} \dfrac{pl_1 + qm_1 + rn_1}{p^2+q^2+m^2} = -(t'+t'') \\ \dfrac{pl + qm + rn}{p^2+q^2+r^2} = t't''. \end{cases}$$

Die Gleichungen 5) multiplicire man respective mit p, q, r und bilde die Summe der Producte, ebenso verfahre man mit den Gleichungen 6). Unter Berücksichtigung der Gleichungen 4) und 9) erhält man:

10)
$$\begin{cases} \dfrac{ll_1+mm_1+nn_1}{p^2+q^2+r^2} = Rt't''-T, \\ \dfrac{l_1^2+m_1^2+n_1^2}{p^2+q^2+r^2} = t't''-S-R(t'+t''). \end{cases}$$

Die Gleichungen 5) respective mit l_1, m_1, n_1 multiplicirt und addirt geben nach 6) und 9):

11)
$$\frac{l^2+m^2+n^2}{p^2+q^2+r^2} = St't''+T(t'+t'').$$

Mittelst der Gleichungen 9), 10) und 11) findet man leicht:

12)
$$L'L''+M'M''+N'N''=0.$$

Soll eine Fläche einem Systeme von drei orthogonalen Flächen angehören können, so muss jede der beiden totalen Differentialgleichungen:

13)
$$\begin{aligned} L'\,dx+M'\,dy+N'\,dz &= 0, \\ L''dx+M''dy+N''dz &= 0, \end{aligned}$$

integrabel sein. Die Bedingung für die erste Gleichung ist:

14)
$$N'\frac{dM'}{dx}-M'\frac{dN'}{dx}+L'\frac{dN'}{dy}-N'\frac{dL'}{dy} + M'\frac{dL'}{dz}-L'\frac{dM'}{dz}=0.$$

Man multiplicire den Ausdruck:

$$N'\frac{dM'}{dx} - M'\frac{dN'}{dx} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{dL'}{dx}, & \frac{dM'}{dx}, & \frac{dN'}{dx} \\ L', & M', & N' \end{vmatrix}$$

mit der Determinante:

$$I = \begin{vmatrix} p, & q, & r \\ L' & M' & N' \\ L'' & M'' & N'' \end{vmatrix},$$

man findet dann:

15) $$I(N'\frac{dM'}{dx} - M'\frac{dN'}{dx}) =$$

$$-p(L'^2+M'^2+N'^2)(L''\frac{dL'}{dx}+M''\frac{dM'}{dx}+N''\frac{dN'}{dx})$$

$$+L''(L'^2+M'^2+N'^2)(p\frac{dL'}{dx}+q\frac{dM'}{dx}+r\frac{dN'}{dx}).$$

Da nun nach 7):

$$pL'+qM'+rN'=0,$$

so ist nach 1), 3), 4), 5), und 6):

16) $$-(p\frac{dL'}{dx}+q\frac{dM'}{dx}+r\frac{dN'}{dx}) = AL'+B''M'+B'N'$$

$$= (pR-h)t'^2+(pS-l)t'+pT.$$

Aehnlich wie die Gleichung 15) bilde man die Gleichungen für:

$$I(L'\frac{dN'}{dy}-N'\frac{dL'}{dy}),\quad I(M\frac{dL'}{dz}-L'\frac{dM'}{dz}).$$

In den so erhaltenen Gleichungen bringe man die Factoren von:

$$M''(L'^2+M'^2+N'^2),\quad N''(L'^2+M'^2+N'^2)$$

nach der Gleichung 16) auf die Formen:

$$-(qR-m_1)t'^2-(qS-m)t'-qT,$$

$$-(rR-n_1)t'^2-(qS-n)t'-rT.$$

Es ist: $pL''+qM''+rN''=0$. Mittelst der Gleichungen 9) — 11) beweist man ferner: $t'(l_1L''+m_1M''+n_1N'')+lL''+mM''+nN''=0$, wo für L'', M'', N'' ihre Werthe zu substituiren sind. Multiplicirt man die Gleichung 14) mit der Determinante I, lässt den Factor $L'^2+M'^2+N'^2$ weg, so nimmt die Bedingung der Integrabilität folgende symmetrische Form an:

$$17)\quad \begin{cases} p(L''\frac{dL'}{dx}+M''\frac{dM'}{dx}+N''\frac{dN'}{dx}) \\ +q(L''\frac{dL'}{dy}+M''\frac{dM'}{dy}+N''\frac{dN'}{dy}) \\ +r(L''\frac{dL'}{dz}+M''\frac{dM'}{dz}+N''\frac{dN'}{dz})=0. \end{cases}$$

Vertauscht man L', M', N' mit L'', M'', N'' und

vice versa, so ergiebt sich die Bedingung der Integrabilität der zweiten Gleichung 13), welche Bedingung indess in Folge der Gleichung 12) gleichzeitig in der Gleichung 17) enthalten ist.

Mit Rücksicht auf die Werthe von L', M', N' ist:

$$18) \qquad L''\frac{dL'}{dx}+M''\frac{dM'}{dx}+N''\frac{dN'}{dx}=$$

$$L''\left[(2pt'+l_1)\frac{dt'}{dx}+At'^2+\frac{dl_1}{dx}t'+\frac{dl}{dx}\right]$$

$$+M''\left[(2qt'+m_1)\frac{dt'}{dx}+B''t'^2+\frac{dm_1}{dx}t'+\frac{dm}{dx}\right]$$

$$+N''\left[(2rt'+n_1)\frac{dt'}{dx}+B't'^2+\frac{dn_1}{dx}t'+\frac{dn}{dx}\right].$$

Setzt man für L'', M'', N'' ihre Werthe ein, so folgt mit Rücksicht auf die Gleichungen 9), 10) und 11):

$$pL''+qM''+rN''=0,$$

$$l_1L''+m_1M''+n_1N''=-(p^2+q^2+r^2)(t''^3$$

$$+Rt''^2+St''+T)$$

$$AL''+B''M''+B'N''=(pR-l_1)t''^2+$$

$$(pS-l)t''+pT.$$

Die letzte der vorstehenden Gleichungen folgt mittelst der Gleichungen 4), 5) und 6). Mit Rücksicht auf die Gleichungen 4), 5), 6) und 9) ist ferner:

$$p\frac{dl_1}{dx}+q\frac{dm_1}{dx}+r\frac{dn_1}{dx}=\frac{d(pl_1+qm_1+rn_1)}{dx})$$

$$-(Al_1+B''m_1+Bn_1)=-(p^2+q^2+r^2)\frac{d(t'+t'')}{dx}$$

$$-2(t'+t'')(pR-l_1)-(pS-l),$$

$$p\frac{dl}{dx}+q\frac{dm}{dx}+r\frac{dn}{dx}=\frac{d(pl+qm+rn)}{dx}$$

$$-(Al+B''m+B'n)=(p^2+q^2+r^2)\frac{dt't''}{dx}$$

$$+2(pR-l_1)t't''-pT.$$

Die Gleichung 18) nimmt hierdurch folgende Form an:

19) $$L'\frac{dL''}{dx}+M''\frac{dM'}{dx}+N''\frac{dN'}{dx}=$$

$$-(p^2+q^2+r^2)(t't''^2+Rt''^2+St''+T)\frac{dt'}{dx}$$

$$-t'^2t''^2(pR-l_1)+t't''(l_1\frac{dl_1}{dx}+m_1\frac{dm_1}{dx}+n_1\frac{dn_1}{dx})$$

$$+l\frac{dl}{dx}+m\frac{dm}{dx}+n\frac{dn}{dx}$$

$$+(t'-t''[(pS-l)t't''+p(t'+t'')T]$$

$$+t'(l\frac{dl_1}{dx}+m\frac{dm_1}{dx}+n\frac{dn_1}{dx})$$

$$+t''\left(l_1\frac{dl}{dx}+m_1\frac{dm}{dx}+n_1\frac{dn}{dx}\right).$$

Um die folgenden Formeln nicht zu sehr zu compliciren führe man folgende abkürzenden Bezeichnungen ein:

20) $$P_1=p\left(l\frac{dl_1}{dx}+m\frac{dm_1}{dx}+n\frac{dn_1}{dx}\right)$$
$$+q\left(l\frac{dl_1}{dy}+m\frac{dm_1}{dy}+n\frac{dn_1}{dy}\right)$$
$$+r\left(l\frac{dl_1}{dz}+m\frac{dm_1}{dz}+n\frac{dn_1}{dz}\right),$$

21) $$Q=p\left(l_1\frac{dl}{dx}+m_1\frac{dm}{dx}+n_1\frac{dn}{dx}\right)$$
$$+q\left(l_1\frac{dl}{dy}+m_1\frac{d}{dy}+n_1\frac{dn}{dy}\right)$$
$$+r\left(l_1\frac{dl}{dz}+m_1\frac{dm}{dz}+n_1\frac{dn}{dz}\right),$$

Aehnlich wie der Factor von p in 17) mittelst der Gleichung 19) dargestellt ist, lassen sich die Factoren von q und r darstellen. Man bilde nun die Gleichung 17) und leite aus derselben durch Vertauschung von t' und t'' eine neue Gleichung ab. Die Summe dieser Gleichungen verschwindet natürlich identisch, bildet man aber ihre Differenz, so nimmt die Bedingungsgleichung, dass die Fläche, bestimmt durch

die Gleichung $f = 0$, einem System orthogonaler Flächen angehören kann, folgende Form an:

$$22) \quad -(p^2+q^2+r^2)\left(p\frac{dt'}{dx}+q\frac{dt'}{dy}+r\frac{dt'}{dz}\right)h'$$

$$+(p^2+q^2+r^2)\left(p\frac{dt''}{dx}+q\frac{dt''}{dy}+r\frac{dt''}{dz}\right)h''$$

$$+2(p^2+q^2+r^2)(t'-t'')[(S-t't'')t't''+(t'+t'')T]$$

$$+(t'-t'')(P_1-Q_1)=0,$$

wo:

$$23) \quad h' = (t't''+S)t''+Rt''^2+T,$$

$$h'' = (t't''+S)t'+Rt'^2+T.$$

Die Gleichung 8) nach x differentiirt giebt:

$$[2(p^2+q^2+r^2)t+pl_1+qm_1+rn_1]\frac{dt}{dx}+$$

$$t\frac{d(pl_1+qm_1+rn_1)}{dx}+\frac{d(pl+qm+rn)}{dx}$$

$$+2(pR-l_1)t^2.$$

Der Factor von $\frac{dt}{dx}$ lässt sich nach 9) schreiben:

$$(p^2+q^2+r^2)(2t-t'-t'').$$

Setzt man also in 9) successive $t = t'$ und

$t = t''$, so ergeben sich die Werthe von $\frac{dt'}{dx}$ und $\frac{dt''}{dx}$. Es ist:

$$-(p^2+q^2+r^2)(t'-t'')\frac{dt'}{dx} = 2(pR-l_1)t'^2$$

$$+t'\frac{d(pl_1+qm_1+rn_1)}{dx}+\frac{d(pl+qm+rn)}{dx},$$

$$(p^2+q^2+r^2)(t'-t'')\frac{dt''}{dx} = 2(pR-l_1)t''^2$$

$$+t''\frac{d(pl_1+qm_1+rn_1)}{dx}+\frac{d(pl+qm+rn)}{dx}).$$

Multiplicirt man die Gleichung 22) mit $t'-t''$, so erhält man mit Hülfe der beiden letzten Gleichungen und von vier analogen Gleichungen durch Substitution der Werthe von h' und h'' aus 23):

$$24)\ [p\frac{d(pl_1+qm_1+rn_1)}{dx}+q\frac{d(pl_1+qm_1+rn_1)}{dy}$$

$$+r\frac{d(pl_1+qm_1+rn_1)}{dz}][2(t't''+S)t't''$$

$$+(t'+t'')(Rt't''+T)]$$

$$+[p\frac{d(pl+qm+rn)}{dx}+q\frac{d(pl+qm+rn)}{dy}$$

$$+r\frac{d(pl+qm+rn)}{dz}][(t'+t'')(t't''+S)$$

$$+R(t'^2+t''^2)+2T]$$

$$+2(p^2+q^2+r^2)(t'-t'')^2.\ [(S-t't'')t't''+(t'+t'')T]$$

$$+2(p^2+q^2+r^2)(R+t'+t'')[2Rt'^2t''^2$$

$$+(t't''+S)(t'+t'')t't''+(t'^2+t''^2)T]$$

$$+(t'-t'')^2(P_1-Q_1)=0.$$

Es lässt sich leicht nachweisen, dass die rechte Seite der Gleichung 19) durch Vertauschung von t' und t'' nur das Zeichen ändert. Mit Hülfe der Gleichungen 10) und 11) substituire man die Werthe von:

$$l_1\frac{dl_1}{dx}+m_1\frac{dm_1}{dx}+n_1\frac{dn_1}{dx},$$

$$l\frac{dl}{dx}+m\frac{dm}{dx}+n\frac{dn}{dx}.$$

Man subtrahire und addire auf der rechten Seite

$$t''(l\frac{dl_1}{dx}+m\frac{dm_1}{dx}+n\frac{dn_1}{dx})$$

und transformire den Factor von t'' in

$$t''.d.\frac{ll_1+mm_1+nn_1}{dx}$$

mittelst der ersten Gleichung 10). Es ergiebt sich dann die folgende Gleichung:

$$L''\frac{dL'}{dx}+M''\frac{dM'}{dx}+N''\frac{dN'}{dx}=$$

$$-\tfrac{1}{2}(p^2+q^2+r^2)(t't''^2+St''+Rt't''+T)\frac{dt'}{dx}$$

$$+\tfrac{1}{2}(p^2+p^2+r^2)(t'^2t''+St'+Rt't''+T)\frac{dt''}{dx}$$

$$+\tfrac{1}{2}(p^2+q^2+r^2)(t'-t'')\left(\frac{dT}{dx}-t't''\frac{dR}{dx}\right)$$

$$+(pR-l_1)(t'-t'')(T-Rt't'')$$

$$+(t'-t'')[(pS-l)t't''+p(t'+t'')T]$$

$$+(t'-t'')\left(l\frac{dl_1}{dx}+m\frac{dm_1}{dx}+n\frac{dn_1}{dx}\right).$$

An Stelle der Gleichung 22) tritt die folgende:

$$-\tfrac{1}{2}(p^2+q^2+r^2)\left(p\frac{dt'}{dx}+q\frac{dt'}{dy}+r\frac{dt'}{dz}\right)[Rt't''$$

$$+T+(S+t't'')t'']$$

$$\tfrac{1}{2}(p^2+q^2+r^2)\left(p\frac{dt''}{dx}+q\frac{dt''}{dy}+r\frac{dt''}{dz}\right)[Rt't''$$

$$+T+(S+t't'')t']$$

$$+\tfrac{1}{2}(p^2+q^2+r^2)(t'-t'')\left(p\frac{dT}{dx}+q\frac{dT}{dy}+r\frac{dT}{dz}\right)$$

$$-\tfrac{1}{2}(p^2+q^2+r^2)(t'-t'')t't''\left(p\frac{dR}{dx}+q\frac{dR}{dy}+r\frac{dR}{dz}\right)$$

$$+(p^2+q^2+r^2)(R+t'+t'')(t'-t'')(T-Rt't'')$$

$$+(p^2+q^2+r^2)(t'-t'')[(S-t't'')t't''+(t'+t'')T]$$

$$+(t'-t'')P_1 = 0.$$

Mit Hülfe der vorstehenden Gleichung lässt sich die Gleichung 24) so transformiren, dass die Quantität Q_1 in derselben nicht mehr vorkommt. Der Kürze halber soll diese transformirte Gleichung nicht weiter ausgeführt werden, da dieselbe nicht einfacher wie die ursprüngliche Gleichung in Beziehung auf die Anzahl der Terme ist.

Verzeichniss der bei der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangenen Druckschriften.

April 1873.

(Fortsetzung).

Bulletin de la Soc. Mathématique de France, publié par les secretaires. T. 1. Nr. 2. Paris. 1873. 8.

V. Jahresbericht der deutschen Seewarte für das Jahr 1872. Erstattet von W. von Freeden. Hamburg. 4.

Annales de l'Observatoire R. de Bruxelles. Bogen 12. 1872. Bogen 1 u. 2. 1873.

Mémoires de la Société des naturalistes de la Nouvelle-Russie. T. I. II. 1872. 73. 8. (In russischer Sprache).

Nature 181. 182.

Monumentorum Boicorum Collectio nova. Edidit Academia Scientiarum Boica Vol. XIV. Monachii. 2872. 4.
Cura di E. Teza, Catechismo dei Missionari cattolici. In Lingua Algonchina. Pisa 1872. 8.
Dr. K. v. Prantl, Gedächtnissrede auf Fr. A. Trendelenburg. Gelesen in d. öffentl. Sitzung d. k. b. Akad. d. Wiss. zu München. Ebds 1873. 4.
Abhandlungen, herausgeg. vom naturwiss. Vereine zu Bremen. Bd. III. Heft III. Mit 3 Tafeln. Bremen. 1873. 8.
Proceedings of the London mathematical Society. Nr. 50, 51. 52. 53. 8.

Mai und Juni 1873.

Nature 183. 184. 185. 186.
Denkschriften der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften zu Wien. Mathem.-naturw. Cl. Bd. 32. 1872. 4.
Dieselben philos.-histor. Classe. Bd. 21. 1872. 4.
Sitzungsberichte der K. Akad. der Wiss. zu Wien. Mathem.-naturwiss. Classe. Bd. 65. Heft 1—5. 1872. Abth. I.
Dieselben Bd. 65. Heft 1—5. Abth. II und Abth. III. Heft 1—5. 1872.
Dieselben philos.-histor. Classe. Bd. 70. Hft. 1—3. Bd. 71. Heft 1—4. 1872.
Register zu Bd. 61—64 der Sitzungsber. mathem.-naturwiss. Classe. VII. 1872.
Register zu Bd. 61—70 philos.-histor. Classe. VII. 1872
Almanach der k. Akademie der Wiss. Jahrg. 22. 1872.
Archiv für österreich. Geschichte. Bd. 48. 1. Hälfte. 1872.
Fontes rerum austriacarum. Abth. 2. Diplomataria et acta. Bd. 36.
Bullatin u. Mémoiren der K. Universität Kasan. In russischer Sprache. 4 Bände. 1870—72. 4.
Memorie del R. Istituto Lombardo. Cl. di scienze matem. e naturali. Vol. XII. Fasc. V.
Idem, Cl. di lettere e scienze morali e politiche. Vol. XII. Fasc. III. Milano 1872. 4.
R. Istituto Lombardo. Rendiconti. Serie II. Vol. V. Fasc. 1—14. 1872. 8.

(Fortsetzung folgt).

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

9. Juli. | № 17. | 1873.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Geschichtliche Notizen über das Dirichletsche Kugel- und Ellipsoid-Problem.

Von

C. A. Bjerknes.

In seinen Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen, die im Wintersemester 1855—56 in Göttingen gehalten wurden, trug Dirichlet sein bekanntes Problem vor über die Kugel in einer bewegten, unelastischen und unbegrenzten Flüssigkeit. Er äusserte gelegentlich, dass ebenso das entsprechende Problem von dem Ellipsoid sich lösen liesse; was er zwar auch früher angegeben hatte, indem er in seiner Mittheilung an die Berliner Akademie, im Anfange des Jahres 1852, »über einige Fälle, in welchen sich die Bewegung eines festen Körpers in einem incompressiblen, flüssigen Medium theoretisch bestimmen lässt«, als solche Fälle, wo ihm die Lösung gelungen war, bezeichnete: dass der

eingesenkte Körper eine Kugel oder ein Ellipsoid wäre. In diesem kleinen Aufsatze hat er sich doch allein auf die Behandlung des Problems für die Kugel beschränkt.

Die Lösung des Problems von dem Ellipsoid ist leider niemals von Dirichlet veröffentlicht worden. Doch hat er schon früh darüber Mittheilungen gemacht, — wie er auch später die Jüngern anzuregen suchte, indem er auf die Möglichkeit, das erweiterte Problem zu behandeln, ihre Aufmerksamkeit hingeleitet hat. In einer Abhandlung des Herrn Hoppe vom Widerstande der Flüssigkeiten gegen die Bewegung fester Körper, welche im Jahre 1854 in Poggendorfs Annalen erschien, kommt auch eine bezeichnende Bemerkung vor, die offenbar solche Mittheilungen in Beziehung auf die Lösung des genannten Problems voraussetzt: ist der starre Körper, sagt an der betreffenden Stelle der Verfasser, eine Kugel oder ein Ellipsoid, so würde die Bewegung eine beliebige sein können, da dessen Verhalten durch Dirichlets Berechnung bekannt ist.

Herr Hoppe hat die Güte gehabt, mir bestimmtere Nachrichten zu geben in Beziehung auf die Zeit, da solche Mittheilungen gegeben worden sind. In seinen schriftlichen Notizen hat er sodann gefunden, dass er, nachdem er die Lösung des Problems bereits nachgerechnet, auch die dreifache Integration des Ausdrucks der totalen lebendigen Kraft vollzogen hatte, am 5. December 1852 mit Dirichlet darüber gesprochen hat. Die Dirichletsche Mittheilung bestand übrigens darin, dass er das Geschwindigkeitspotential aufschrieb, worauf dann der nachträgliche Beweis der Richtigkeit und die vollständige Bestimmung der Bewegung keine Schwie-

rigkeit hatte. Dirichlet äusserte damals, dass er der Berechnung der lebendigen Kraft mittelst eines Kunstgriffs so vereinfacht hätte, dass sie sich auf einigen Zeilen vollenden liesse.

Jedenfalls hat also Dirichlet das Problem des Ellipsoids bis 1852 vollständig gelöst. Wenn er also, wird dann am Schluss, und wie ich glaube mit Recht, hinzugefügt, manchmal Andeutungen über die Lösung gegeben hat, so war man nicht berechtigt, daraus zu schliessen, die Ausführung habe ihm noch gefehlt; und diese Missdeutung scheint in der That obgewaltet zu zu haben.

Während Herr Hoppe in einer ganz anderen Richtung den neuen Dirichletschen Gedanken weiter verfolgt hat, indem er die Bewegung von Rotationskörpern nach der Richtung ihrer Rotationsaxen untersucht, — und wobei es ihm auch später gelungen ist, zum ersten Mal einen Specialfall der Bewegung von mehreren Körpern zu behandeln, indem er Oberflächen betrachtet, die sich in geschlossene Räume trennen, — haben zwei jüngere Mathematikern, völlig unabhängig von einander, und zum Theil in verschiedener Weise das Problem von dem Ellipsoid gelöst. Es waren dies die zwei späteren Göttinger Professoren, die Herren Clebsch und Schering.

Die schöne Abhandlung des Herrn Clebsch, des so früh hinweggegangenen, berühmten Geometers, ist datirt Danzig im August 1854; sie ist aber erst viel später erschienen; zwei Jahre nachher in dem zweiten Hefte von Crelles Journal für das Jahr 1856. Er untersucht darin unmittelaar die aus der Bewegung des elliptischen Körpers in einer ruhenden Flüssigkeit hervorgebrachten Zustände; was bei der Dirichletschen

Behandlungsweise des Kugelproblems als der zweite Fall anzusehen wäre, welcher auf einen andern zurückgeführt werden konnte: den ruhenden Körper in der bewegten Flüssigkeit. Dabei berücksichtigt er aber nicht bloss die translatorische Bewegung des Ellipsoids. Die mittelbare Bestimmung scheint auch dann in der That, weniger füglich zu sein; nnd um so mehr, weil ja eine Drehungsbewegung selbst keine Potentialbewegung sei, obwohl sich dadurch die Möglichkeit darbieten könne eine Potentialbewegung in der Flüssigkeit zu Stande zu bringen.

Was die Veranlassung der Abhandlung von Clebsch betrifft, so drückt sich der Verfasser in der Einleitung so aus, dass für die Bewegung einer Kugel in einer tropfbaren Flüssigkeit Dirichlet die hauptsächlichsten Resultate angegeben hat, und zugleich auf die Möglichkeit hingewiesen, das Entsprechende für ein Ellipsoid zu erreichen. Er hat daher versucht, nachdem er die allgemeinere Aufgabe in kurzen Umrissen angedeutet, im Speciellen die bei der Bewegung eines Ellipsoids eintretenden Verhältnisse näher zu untersuchen.

Von Clebsch unabhängig, hat Hr. Schering, der zusammen mit mir unter Dirichlet studirte, durch die Aeusserungen seines grossen Lehrers angeregt, die Lösung des Problems von dem Ellipsoid verfolgt, und auch glücklich gefunden. Das Kugelproblem hatte Dirichlet schon in der Mitte des genannten Wintersemesters 1855—56 vorgetragen; und nicht lange nachher, spätestens im Anfange des folgenden Semesters, wie es auch aus gewissen äusseren Kennzeichen hervorgeht, hat mir Hr. Schering seine Lösung des erweiterten Problems gezeigt. Die Abhandlung von Clebsch, von dessen Exi-

stenz ich erst aus späteren Zeiten Erinnerung habe, war allerdings damals abgefasst worden; wegen der eintretenden langen Verzögerung mit der Veröffentlichung war sie aber noch nicht erschienen; selbst nicht, als ich späterhin, in Erwiderung auf die mir von Herrn Schering mitgetheilte Lösung, ihm eine kleine, aus seinen übersichtlichen Formeln übrigens ganz einfach und natürlich hervorgehende Verallgemeinerung gezeigt hatte, wo die Anzahl der Variabeln statt 3 gleich n gesetzt war.

Im Gegensatz zu Herrn Clebsch, und in genauerem Anschluss zu dem bei der Behandlung des Kugelproblems eingeschlagenen Wege, hat ausserdem Schering das ruhende Ellipsoid in der bewegten Flüssigkeit betrachtet; was nach der Dirichletschen Verfahrungsweise als der erste Fall anzusehen wäre: die Auflösungen von Clebsch und Schering sind sodann eigentlich nur Lösungen von zwei complementären Problemen, nicht von zwei ganz identischen. Der Unterschied in dieser Beziehung würde übrigens stärker hervortreten, wenn man, wie ich auch später und in der oben genannten verallgemeinerten Weise beabsichtige, die sämmtlichen Bewegungen eines Ellipsoids untersuchen wollte, das heisst, nicht bloss die translatorische, sondern auch die rotatorische Bewegung und die, welche in Verbindung mit der Formveränderung steht.

Die von Schering gegebene Lösung ist niemals veröffentlicht worden. Weil sie aber den Ausgangspunkt für die folgende daraus so ganz unmittelbar gezogene Verallgemeinerung für n Variable bildet, so glaube ich hier wiedergeben zu müssen, was er mir in dieser Beziehung mitgetheilt hat. Ich füge doch schliesslich hinzu,

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{d^2\varphi}{dz^2}=-4\pi$$

und

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{d^2\varphi}{dz^2}=0$$

genügen. Die mir mitgetheilte Schering'sche Lösung habe ich aber, wie es aus meinen Aufzeichnungen hervorgeht, in dieser Beziehung mittelst eigener Nachrechnung verificirt; was ja von da aus selbstverständlich nur eine überflüssige Mühe gewesen wäre, als ich die bessere Dirichlet'sche Verification schon sorgfältig redigirt hatte. Die von Schering gegebene Lösung des Problems von dem Ellipsoid muss sodann, am spätesten, kurz nach Ostern gefunden sein; während die im zweiten Hefte des Journal von Crelle 1855 erscheinende Abhandlung von Clebsch wohl erst im Juli desselben Jahres für die Oeffentlichkeit vorlag.

In einigen kleineren Aufsätzen, in welchen ich mich übrigens allein bei dem am meisten Fundamentalen aufhalten werde, beabsichtige ich die Dirichlet'schen Probleme über dem Ellipsoid für eine beliebige Anzahl von Variabeln zu verallgemeinern.

In diesem Sinne versuche ich dann erst das Problem von dem ruhenden Ellipsoid in einer bewegten Flüssigkeit zu behandeln. Die hier gegebenen Resultate sind übrigens in der Hauptsache dieselben als die, welche ich früher Hrn. Schering mitgetheilt habe. Die Bezeichnungsweise und die vollständigere Ausführung ist doch zum Theil neu, wie auch eine kleine Aenderung

des Potentialausdrucks, damit die Zahl n, welche die Anzahl der Dimensionen oder Veränderlichen ausdrückt, auch den Werth 2 annehmen könne.

Weder in diesem noch in dem späteren Aufsatze, welcher sich auf den zweiten Dirichlet'schen Fall beziehen wird, werde ich irgend welche andere Methode benutzen, als eine einfache Integralbildung aus einem ursprünglich gebildeten Grundintegral. Wie dies in den verschiedenen Fällen geschieht, wird möglicherweise nicht mehr so zufällig erscheinen, wenn sie in genaueren Zusammenhang und mit erschöpfender Vollständigkeit behandelt werden. Ich stelle mich hierbei in so fern auf einen höheren Gesichtspunkt, als ich die Bewegungen nicht bloss als Translationen und Rotationen ansehe, oder aus solchen zusammengesetzt; ich werde sie in so viele Klassen vertheilen als es Klassen von Coefficienten giebt in der Gleichung des verallgemeinerten Ellipsoids, und in eben so viele partikulären Bewegungen als es in derselben wesentliche Konstanten enthalten sind.

Eine solche Verfahrungsweise mit der Bildung neuer Integralen, hat ja auch Dirichlet selbst benutzt, in dem Vortrage über sein Kugelproblem. Sie wäre wohl auch, wie es gewiss in Uebereinstimmung hiermit Hr. Schering gemacht hat, natürlich zu prüfen im Falle des Ellipsoids. Jedenfalls wird dadurch die Darstellung in hohem Grade vereinfacht werden, indem sich jetzt alles reducirt in eine leicht ausführbare Verification einiger Potentialausdrücke, bei dessen Aufstellung der leitende Gedanke nicht fern liegt.

Verallgemeinerung des Problems von dem ruhenden Ellipsoid in einer bewegten, unendlichen Flüssigkeit.

Von

C. A. Bjerknes.

Die von Herrn Schering aufgestellten Gleichungen (cfr. die frühere Abhandlung: Geschichtliche Notizen über das Dirichlet'sche Kugel- und Ellipsoin-Problem) lassen sich unmittelbar verallgemeinern, indem man die Anzahl der Veränderlichen statt 3 gleich n setzt. Der Werth 1 soll aber ausgeschlossen sein.

Um die Formeln abzukürzen, führen wir die folgenden Bezeichnungen ein. Es sei E_s oder

$$E = \sum_{1,n}^{m} \frac{x_m^{\,2}}{\alpha_m^{\,2}+s}$$

und D_s oder

$$D = \prod_{1,n}^{m} \sqrt{1+\frac{s}{\alpha_m^{\,2}}},$$

wo n die ganzen Werthe 2, 3, 4, . . n beigelegt werden soll; es sei weiter ψ_s oder

$$\text{I)} \qquad \psi = \int_s^c \frac{ds}{D} - \int_s^\infty E\frac{ds}{D},$$

wo s positiv ist, und c eine willkührliche positive Constante. Der Bequemlichkeit wegen schrei-

ben wir auch, im Anschluss an eine jetzt sehr häufig benutzte Bezeichnungsweise,

$$\sum_{1,n}^{m} \frac{d^2\varphi}{dx_m^2} = \Delta^2\varphi, \quad \sum_{1,n}^{m} \frac{d\varphi^2}{dx_m^2} = \Delta\varphi^2.$$

Dieses vorausgesetzt, wird man die folgenden Sätze beweisen können, welche für eine beliebige Anzahl von Variablen bestehen.

1. Der partiellen Differentialgleichung $\Delta^2\varphi = 0$ wird durch $\varphi = \psi_s$ genügt, wenn σ die positive Wurzel in der Gleichung $E_\sigma = 1$ ist.

2. Ebenso wird $\varphi = \psi_0$ der partiellen Differentialgleichung $\Delta^2\varphi = -4$ Genüge leisten.

3. Das hieraus abgeleitete neue Integral der ersten Differentialgleichung

$$\text{II)} \qquad \varphi = \sum_{1,n}^{m} \lambda_m \frac{d\psi_\sigma}{dx_m} + l_m \frac{d\psi_0}{dx_m}$$

genügt ausserdem für jedes System $x_1 x_2 .. x_n$, welches durch die verallgemeinerte Ellipsoidgleichung $E_0 = 1$ bestimmt ist, der Bedingung

$$\text{1)} \qquad \sum_{1,n}^{m} \frac{dE_0}{dx_m} \frac{d\varphi}{dx_m} = 0.$$

Zwischen λ_m und l_m besteht aber dann eine gewisse Relation.

1. Ehe wir versuchen, die oben genannt Sätze zu beweisen, bemerken wir erst, dass, a gesehen von einer veränderten Schreibweise, n insofern eine kleine Aenderung in den früher Herrn Schering mitgetheilten Resultaten ei geführt worden ist, als die Constante c in Stelle von ∞ als obere Gränze des ersten In grals gesetzt ist. Ohne dies würden die Fu tionen ψ_σ und ψ_0 für $n = 2$ unendlich werd und die Anzahl der n Variablen dürften soda nicht geringer sein als 3.

Wir setzen auch hier den aufgestellten neu Potentialausdruck in Verbindung mit dem ga zen System von verallgemeinerten hydrody mischen Gleichungen; damit die λ und 2 v ständig bestimmt werden können.

Wir fassen hierunter $E_0 = 1$ bildlich die Gleichung der Oberfläche eines ellipsoidisch Körpers auf, welcher sich in der Mitte einer wegten incompressibeln Flüssigkeit befindet, u dort festgehalten wird; $\frac{d\varphi}{dx_n}$ soll ebenso als Componente der Geschwindigkeit in einem Fl sigkeitspunkte $x_1\ x_2 \ldots x_n$ nach der Richtu der positiven Halbaxe x_n bezeichnet werden s. w. Wir übertragen also einfach die Bezei nungen, die für $n = 3$ gelten, auf den all meinsten Fall, wo n eine ganze, sonst beliebi absolute Zahl ist, grösser als 1.

2. Wir stellen zu Anfang einige sehr e fache Hülfsgleichungen auf, die uns auch s terhin von Nutzen werden.

Man wird sodann mit Leichtigkeit verifici können, dass

2) $$\frac{\Delta E^2}{E'} = -4;$$

wo dann E' die Derivirte in Beziehung auf s bezeichnen soll.

Weil nun weiter $\frac{dE_\sigma}{dx_m} = 0$, das heisst

$$\frac{dE_\sigma}{dx_m} + \frac{dE_\sigma}{d\sigma} \cdot \frac{d\sigma}{dx_m} = 0,$$

so leitet man, mit Hülfe der vorigen Gleichung, auch diese neue ab:

3_1) $$\sum_{1_1 n}^{m} \frac{dE_\sigma}{dx_m} \frac{d\sigma}{dx_m} = 4.$$

Setzt man σ gleich Null, so bekommt man hieraus schliesslich

3_2) $$\sum_{1_1 n}^{m} \frac{dE_0}{dx_m} \left(\frac{d\sigma}{dx_m}\right) = 4,$$

für solche Werthe von $x_1\ x_2 \ldots x_n$, die der Gleichung des verallgemeinerten Ellipsoids $E_0=1$ genügen.

Wenn man endlich die Function D logarithmisch differentiirt, und man das Resultat mit dem Werthe von $\Delta^2 E$ vergleicht, so kommt

$$4\frac{dD}{D} = \Delta^2 E\, ds.$$

Es wird hieraus ferner geschlossen, dass

$$4) \qquad \int_s^\infty \Delta^2 E \cdot \frac{ds}{D} = \frac{4}{D};$$

man findet folglich $\frac{4}{D_\sigma}$ oder, je nachdem man der unteren Gränze s den Werth σ oder 0 giebt.

3. Nach diesen Vorbereitungen lassen sich die genannter Sätze sehr einfach verificiren. Wir beweisen hier die zwei ersten.

Man findet, mit Berücksichtigung der Gleichung $E_\sigma = 1$, dass

$$III_1) \qquad \frac{d\psi_\sigma}{dx_m} = -\int_\sigma^\infty \frac{dE}{dx_m}\frac{ds}{D};$$

und hieraus wieder

$$\frac{d^2\psi_\sigma}{dx^2_m} = -\int_\sigma^\infty \frac{d^2E_\sigma}{dx^2_m}\frac{ds}{D} + \frac{dE_\sigma}{dx_m}\frac{d\sigma}{dx_m}\frac{1}{D_\sigma}$$

Es wird mithin 3_1)

$$5_1) \qquad \Delta^2\psi_\sigma = -\int_\sigma^\infty \Delta^2 E\,\frac{ds}{D} + \frac{4}{D_\sigma},$$

das heisst $\Delta^2\psi_\sigma = 0$.

Ebenso wird man auch bekommen

III$_2$) $$\frac{d\psi_0}{dx_m} = -\int_0^\infty \frac{dE}{dx_m}\,\frac{ds}{D},$$

$$\frac{d^2\psi_0}{dx_m^2} = -\int_0^\infty \frac{d^2E}{dx_m^2}\,\frac{ds}{D};$$

wovon geschlossen wird, dass

5$_2$) $$\Delta^2\psi_0 = -\int_0^\infty \Delta^2 E\,\frac{ds}{D},$$

und dass somit auch $\Delta^2\psi_0 = -4$.

Die zwei ersten Sätze sind somit bewiesen.

4. Um nun auch den letzten Satz zu verificiren, bemerken wir erst, dass φ aus zwei Theilen besteht $\varphi_\sigma^{(\lambda)}$ und $\varphi_0^{(l)}$, wo

6) $$\varphi_\sigma^{(\lambda)} = \sum_{1_1 n}^{m} \lambda_m \frac{d\psi_\sigma}{dx_m}, \quad \varphi_0^{(l)} = \sum_{1_1 n}^{m} l_m \frac{d\psi_0}{dx_m},$$

welche beide, wie man gleich sieht, der partiellen Differentialgleichung $\Delta^2\varphi = 0$ genügen; es ist also dasselbe auch der Fall mit φ.

Die linke Seite der Bedingungsgleichung 1), welche sich auf die Oberfläche $\sigma = 0$ bezieht, besteht ebenso aus zwei Theilen. Weil $\varphi_\sigma^{(\lambda)}$, wie leicht zu erkennen ist, von den x und σ abhängt, wobei ferner σ mit dem x variiren muss, so findet man, mit Hülfe der Gleichung 3$_1$), dass

$$\sum_{1,n}^{m} \frac{dE_0}{dx_m} \frac{d\varphi^{(\lambda)}}{dx_m} = \sum_{1,n}^{m} \frac{dE_0}{dx_m} \frac{d\varphi^{(\lambda)}}{dx_m} + 4 \frac{d\varphi^{(\lambda)}}{d\sigma},$$

sofern σ gleich Nul gesetzt wird. Die genannte Bedingungsgleichung geht sodann in die folgende über:

$$0 = \sum_{1,n}^{m} \frac{dE_0}{dx_m} \frac{d\varphi_0^{(\lambda)}}{dx_m} + 4 \left(\frac{d\varphi^{(\lambda)}}{d\sigma}\right)_0$$

$$+ \sum_{1,n}^{m} \frac{dE_0}{dx_m} \frac{d\varphi_0^{(l)}}{dx_m};$$

wo selbstverständlich

7) $$\varphi_0^{(\lambda)} = \sum_{1,n}^{m} \lambda_m \frac{d\psi_0}{dx_m}.$$

Es wird nun offenbar

$$\left(\frac{d\varphi_\sigma^{\lambda}}{d\sigma}\right)_0 = \sum_{1,n}^{m} \frac{dE_0}{dx_m} \lambda_m,$$

und es müssen folglich zwischen dem λ und l die n Relationen bestehen:

IV) $$2\lambda_m - (\lambda_m + l_m \int_0^{\varphi} \frac{ds}{(a^2_m + s)D} = 0.$$

Und umgekehrt, wenn diese Relationen bestehen, wird die gegebene Bedingungsgleichung für $\sigma = 0$ erfüllt.

Der dritte Satz ist somit auch bewiesen, und die zwischen den Coefficienten λ und l bestehenden Verbindungen zugleich bestimmt.

5. Es bleibt noch unter den $2n$ Constanten, oder von der Zeit t allein abhängigen Coefficienten, λ und l, eine Anzahl von n willkührlichen zurück; und um diese zu bestimmen, betrachten wir schliesslich die Gleichung des Druckes. Stellen wir aber erst das ganze System von verallgemeinerten hydrodynamischen Gleichungen auf; aus welchen übrigens die wesentlichsten, wie es sich dann zeigen wird, schon in dem Vorigen in Anwendung gebracht worden sind.

Eine unmittelbare Generalisation führt uns zu den folgenden n Gleichungen:

$$8) \qquad \frac{1}{q}\frac{dp}{dx_k} = \chi_k - \sum_{1,n}^{m} u_m \frac{du_k}{dx_m} - \frac{du_k}{dt},$$

wo $k = 1, 2, 3, \ldots n$. Uebrigens hat man auch die Continuitätsgleichung:

$$9) \qquad \sum_{1,n}^{m} \frac{du_m}{dx_m} = 0;$$

und, indem man $F_0(x_1, x_2, \ldots x_n, t) = 0$, nach der hier benutzten uneigentlichen Ausdrucksweise, als die Gleichung der Oberfläche eines mit der Zeit veränderlichen Körpers ansieht, muss endlich für jeden Punkt dieser Oberfläche

10) $$\sum_{1,n}^{m} \frac{dF}{dx_m} u_m = -\frac{dF}{dt}.$$

Wenn man die Flüssigkeit als unbegrenzt annimmt, soll hier der Druck p, wie gewöhnlich, in unendlicher Ferne gegen eine nur von der Zeit abhängige Gränze convergiren.

u_m ist selbstverständlich als die Geschwindigkeitscomponente nach der Richtung der positiven Halbaxe x_m anzusehen; ebenso ist x_m die entsprechende Componente der beschleunigenden Kraft in dem Flüssigkeitspunkte $(x_1\ x_2 \ldots x_n)$; q ist endlich die Dichtigkeit, und muss ebensowohl als p eine positive Grösse sein.

Wir nehmen aber jetzt an, dass die beschleunigende Kraft durch n Componenten bestimmt sei, welche partielle Derivirte in Beziehung auf die x sind, und aus derselben einzigen Function abgeleitet werden können. Wir denken uns weiter, dass im Anfange der Zeit überall in der Flüssigkeit die Geschwindigkeit Null gewesen ist. — Die Geschwindigkeitscomponenten werden nun für die folgenden Zeiten durch $\frac{d\varphi}{dx}$ ausgedrückt; und die Druckgleichung nimmt die einfache Form an

8[1]) $$\frac{p}{q} = T + V - \tfrac{1}{2}\Delta\varphi^2 - \frac{d\varphi}{dt};$$

ganz wie im gewöhnlichen Falle, wo man n den Werth 3 zu geben habe. T wird dann von der Zeit allein abhängig sein; und was V betrifft, so soll es besonders angenommen werden, dass

$$V = \sum_{1,n}^{m} \gamma_m \, x_m;$$

wo übrigens auch die γ nur mit der Zeit variiren müssen. — Man wird dann ferner finden, dass die Kontinuitätsgleichung 9) jetzt in die folgende übergeht

$$9^1) \qquad \Delta^2 \varphi = 0,$$

welche die bekannte in unseren Untersuchungen zu Grunde gelegte Fundamentalgleichung ist — In dem vorliegenden Falle des ruhenden und unveränderlichen verallgemeinerten Ellipsoids $E_0 = 1$ wird endlich die Bedingungsgleichung für die Oberfläche 10)

$$10^1) \qquad \sum_{1,n}^{m} \frac{dE_0}{dx_m} \frac{d\varphi}{dx_m} = 0;$$

was mit der Bedingung 1) zusammenfällt.

6. Wir haben also noch aus der Gleichung des Druckes einige Folgerungen zu ziehen, um die Bestimmung der Coefficienten zu vollenden. Wir betrachten somit erstens den Werth von $\frac{d\psi_\sigma}{dx_m}$ in unendlicher Ferne; aus welchem dann geschlossen wird, dass $\varphi_\sigma^{(\lambda)}$ als eine Grösse von der Ordnung $n-1$ gegen Null konvergiren wird.

Die Funktionen $\frac{d\psi_\sigma}{dx_m}$, und folglich auch $\varphi_\sigma^{(\lambda)}$ müssen nämlich von derselben Ordnung sein wie

$$\int_{\sigma}^{\infty} x_m \cdot \frac{ds}{s^{\frac{n+1}{2}}},$$

mithin von derselben Ordnung wie $\frac{x_m}{\sigma^{\frac{n}{2}}}$. Wenn aber in der Gleichung $E_\sigma = 1 x_m$ unendlich von erster Ordnung gesetzt wird, so wird σ von zweiter Ordnung werden, und die gegebene Function also von der Ordnung $n-1$.

$n=1$ bildet hier einen Ausnahmefall; dieser Werth von n ist aber früher ausgeschlossen.

Was andererseits $\frac{d\psi_0}{dx_m}$ betrifft, so wird diese Function selbstverständlich unendlich werden von der Ordnung 1; mithin auch $\varphi_0^{(l)}$.

In der Gleichung, welche p bestimmt, wird sodann das Quadrat der Geschwindigkeit $\Delta\varphi^2$ überall unendliche Werthe erhalten; nur $\frac{d\varphi}{dt}$ nimmt zuletzt unendliche Werthe an, die übrigens nur von der ersten Ordnung sein müssen. Der Theil derselben Function, welcher diese Eigenschaft besitzt, ist offenbar, in Folge des früher Entwickelten, in der Summe

$$\sum_{1,n}^{m} \frac{dl_m}{dt} \frac{d\varphi_0}{dx_m}$$

enthalten. Damit also der Druck p nicht nega-

tiv werden werden soll, ist es erforderlich, dass die γ der Bedingung genügen

$$\gamma_m + 2\frac{dl_m}{dt}\int_0^\infty \frac{ds}{(\alpha_m^2+s)D} = 0.$$

Und aus dieser Gleichung wird dann endlich l_m durch Integration völlig bestimmt, weil γ_m, wie früher angeführt, nur von der Zeit abhängt, und weil andererseits als Anfangszustand die Ruhe angenommen worden ist.

7. Führt man die Rechnungen aus, so findet man zuletzt für die l und λ:

$$l_m = -\frac{1}{2\int_0^\infty \frac{ds}{(\alpha_m^2+s)D}} \cdot \int_0^t \gamma_m\, dt,$$

V)

$$\lambda_m = -\frac{1}{4-2\int_0^\infty \frac{ds}{(\alpha_m^2+s)D}} \cdot \int_0^t \gamma_m\, dt;$$

und das gesuchte Geschwindigkeitspotential im Falle des verallgemeinerten in der Flüssigkeit ruhenden Ellipsoids ist somit auch, was die Werthe der Coefficienten betrifft, gefunden.

Eine letzte Frage steht doch zurück zu entledigen. Es muss gezeigt werden, dass die Werthe von λ nicht unendlich werden. Um dies zu beweisen, führen wir statt 4 (nr. 4) die Integralsumme

$$2\sum_{1,n}^{m}\int_0^\infty \frac{ds}{(\alpha_m^2+s)D}$$

ein. Es ergiebt sich hieraus, dass in der Gleichung, welche λ_m bestimmt, der Nenner nur dann den Werth Null annehmen werde, wenn man n den ausgeschlossenen Werth 1 giebt; in allen übrigen Fällen wird er stets positiv sein, und von Null verschieden.

Nachtrag zur Methode der Parallaxenbestimmung durch Radianten (S. Nr. 13)

Von

W. Klinkerfues.

Als ich vor Kurzem die Parallaxe des Sirius aus der gut bekannten von Wega nach der Methode der Radianten zu 0″,3097 berechnete, war mir nicht bekannt, dass aus den directen Messungen von Henderson der Werth 0″,27 für dieselbe abgeleitet worden ist. Dass Gyldén unter Zuziehung von Maclear's Beobachtungen das verhältnissmässig stark abweichende Resultat 0″,193 gefunden hat, ist wohl Folge des Versuches einer Ausgleichung zwischen dem von Maclear durch eine spätere Beobachtungsreihe erhaltenen Werth 0″,15 und den früheren 0″,27 und 0″,23. Es fehlt aber nicht an Beispielen, dass ein Instrument durch häufigen Gebrauch sich unbemerkt verschlechtert und dann später bei sehr feinen Untersuchungen Unzulässiges liefert. Beispielsweise bestimmte Johnson am berühmten Oxforder Heliometer die Parallaxe von 61 Cygni in der ersten 11 Monaten der Beobachtungsreihe zu 0″,526, aus den letzten 7 Monaten aber zu 0″,192. Man weiss jetzt, dass ersterer Werth äusserst nahe richtig, der letztere aber auszu-

schliessen ist. Auch bei dem Sirius scheinen mir die ersten Bestimmungen eines grösseren Vertrauens werth, und die letzte auszuschliessen. Der Unterschied zwischen dem beobachteten und dem nach der Methode der Radianten berechneten Werthe der Sirius-Parallaxe wird dann so gering, dass er in der nicht vollkommenen Kenntniss der Parallaxe der bei Wega und bei dem Sirius angewandten Vergleich-Sterne eine ungesuchte Erklärung findet; denn die Gleichungen der Radianten-Methode beziehen sich immer auf absolute Parallaxen. Wird die Differenz auf die gemessene Parallaxe von Wega so mitvertheilt, dass der letzteren ihrer grösseren Genauigkeit wegen das vierfache Gewicht gegeben wird, so erhält man:

Parallaxe von Wega = 0″,159
» » Sirius = 0″,274.

Nachträglich mache ich die Bemerkung, dass eine Stelle in dem Aufsatz von Nr. 13 leicht missdeutet werden kann. Die Aufgabe, zu bestimmen, wieviel die einzelnen Positionswinkel von einem gemeinsamen Durchschnitte abweichen, der Individualitäten in der Richtung der Eigenbewegung also, führt auf dieselben Rechnungsformen, wie die der Bestimmung des wahrscheinlichen Fehlers in der Lage des Radianten. In der Beziehung macht es keinen Unterschied, ob man die hervortretenden Individualitäten als reelle, oder als scheinbare ansieht. Ein gemeinschaftlicher Radiant bedeutet nun aber für die Bewegungen im Raum an und für sich nur Parallelismus, nicht Gleichheit; aus dem Parallelismus allein jedoch würde eine Vergleichung der Parallaxen nicht zu gewinnen sein. Zu letzterer Rechnung sind eben weitere Schlüsse nöthig, die so formulirt werden können: je ge-

nauer der Parallelismus vorhanden zu sein sch
desto geringer die Wahrscheinlichkeit zufäll
Uebereinstimmung, desto grösser also die e
Causal-Nexus, der hier mit der Existenz e
Partial-Systems zusammenfällt.

In genanntem Aufsatze hatte ich die
muthung ausgesprochen, dass vielleicht die le
tenden Theilchen einer Geissler'schen Rö
wenn der Inductionsstrom eine in die Gesic
linie fallende Componente hat, nicht als ru
bei der Vergleichung von Spectren angese
werden dürfen. Der Versuch, an dem auch
Herren Prof. Riecke, Dr. Neesen und an
Beobachter Theil nahmen, hat seitdem gez
dass die Bewegung jener Theilchen sicher
gering ist, da, obgleich der wahrscheinliche
ler der beobachteten Verschiebung der Was
stofflinie $H\beta$ oder F jetzt kaum $\frac{1}{150}$ des In
valls der beiden D-Linien beträgt, dennoch n
mehr als eine blosse Andeutung einer Beweg
hat erhalten werden können. Die Beobach
gen werden noch weiter geführt. Die Richt
des Stromes kann also Huggins Messungen
sehr wenig beeinflusst haben. Das Uebergew
der Annäherungsbewegungen über die flie
den, wenn es nicht einfach in der noch ge
gen Zahl der untersuchten Sterne seinen Gr
hat, ist vielleicht auf einen Schätzungsfehler,
Art persönlicher Gleichung, zurückzuführen
Folge deren das Sternspectrum gegen das d
zu vergleichende der Geissler'schen Röhre
schoben erscheint. Beobachtungen des Plan
Venus wären sehr wünschenswerth, um die F
nach dem constanten Fehler der Messungen
erledigen.

Göttingen den 2ten Juli 1873.

ROYAL COLLEGE OF MUSIC

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

16. Juli. **№ 18.** 1873.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Beiträge zur Topographie von Athen.

Von

H. G. Lolling,

mit einigen Bemerkungen

von

Fr. Wieseler.

Die nachstehenden Untersuchungen beruhen auf wiederholten eifrigen und sorgfältigen Localstudien. Es hat mir zu besonderer Freude gereicht mich davon bei Gelegenheit meines Aufenthalts in Athen zu überzeugen, so dass ich zugleich die Garantie für die Richtigkeit der meisten einzelnen den Untersuchungen zu Grunde gelegten Data, unter denen manche ganz neu ermittelte sich befinden, übernehmen kann. In der Behandlung einiger Schriftstellen, welche in dem Aufsatze über die Pnyx zur Besprechung

kommen, kann ich dem Verfasser nicht beist
men. Ich habe mir erlaubt, dieses in den
len, in welchen ich etwas Richtigeres bieten
können glaubte, in Anmerkungen, die mit Kl
mern ([ ]) versehen sind, anzudeuten. Du
die von mir gegebene abweichende Erklär
der betreffenden Stellen geschieht übrigens
topographischen Darlegungen des Verfassers
nigstens in den Hauptsachen meist kein wes
licher Eintrag. Einmal finden dieselben dadu
sogar eine neue Bestätigung. Nur hinsicht
des Bema auf der Pnyx und des Zuhörerpla
glaubte ich der Annahme Hrn. Lollings du
weiter gehende Auseinandersetzungen entge
treten zu müssen.

A. Die Pnyx.

Die Lage des alten Versammlungspla
Athens, der durch die Erinnerung an die gr
ten Redner des Alterthums für uns Nachlebe
ebenso wie *θεῶν χρησμοῖς* für die alten A
ner geheiligten Pnyx, definitiv festzustellen,
von den neueren namentlich deutschen Topo
phen mit besonderem Eifer versucht. Zu
war es der Engländer Dr. Chandler (Travels
c. 13), der vor etwa 100 Jahren den Hügel
schen dem Museion und dem sog. Nympher
gel für die alte Pnyx erklärte. Diese Ans
ist der Mittelpunct der ganzen Pnyxfrage ge
den, man hat sich wesentlich nur mit Bek
pfung und Vertheidigung derselben beschäf
Es unterliegt nun keinem Zweifel, dass die
theidiger derselben besonders aus dem Gru
alle dagegen vorgebrachten Bedenken abzusch

chen oder zu beseitigen suchen, weil es bisher noch nicht gelungen ist, eine auch nur einigermassen wahrscheinliche passendere Stelle für den alten Versammlungsort nachzuweisen. Die beiden Gelehrten, die sich am eingehendsten damit befassten, Welcker und E. Curtius, riethen auf das Museion. Auch C. Wachsmuth glaubt im Rh. Mus. XXIII (1868) S. 10, dass die Pnyx »in der südlichen Hügelgegend« zu suchen sei. Ebd. Bd. XXIV, S. 41, A. 4 erklärt W., dass er nach reiflicher und langer Erwägung aller Bedenklichkeiten nur seine entschiedene Zustimmung zu dem von Curtius gefundenen Resultate bekennen könne. Es ist nun meine Hauptaufgabe, mit Hülfe der gegebenen Terrainverhältnisse eine möglichst unbefangene Prüfung der Zeugnisse vorzunehmen, die uns aus dem Alterthume über die Lage und die Beschaffenheit der Pnyx erhalten sind. Hinzuzunehmen werden diejenigen sein, welche uns über die angrenzenden Striche in topographischer Hinsicht Belehrung bieten.

Es wird sich dabei nicht vermeiden lassen, dass ich über einige Puncte rasch hinwegeile, die an und für sich noch einer eingehenden Untersuchung bedürfen, namentlich über den Markthügel und den innern Kerameikos.

I.

Die Lage der Pnyx.

1.

Die wichtigste Stelle für die Ansetzung der Pnyx ist Plat. Crit., p. 112. Platon denkt sich hier die um die jetzige und damalige Akropolis

herumliegenden Hügel mit ihr zugleich als B
stücke einer vorzeitigen Akropolis. Die
und Ausdehnung derselben, wie sie Plato
aussetzt, kann man sich dadurch klar ma
dass man die zwischen den Hügeln liege
Thäler und Abdachungen mit Erde ausg
denkt. Dann wird eine solche Akropolis
der Südseite bis zum Ilissos und Eridanos, au
Nordseite bis zu den Abdachungen des Lyk
tos und auf der gegenüber liegenden Seit
sog. Nymphenhügels herabgehen, die Ostg
ist durch den Lykabettos, die Westseite
die beiden schon genannten Endpuncte, Il
bett und Nymphenhügel, fixirt. Es ver
sich von selbst, dass in dieser Linie, der
grenze, das Museion einbegriffen ist; Plato k
dieses darum nicht noch besonders nennen.
klare Darstellung dieser vorzeitlichen Ver
nisse giebt Plato nun mit den Worten: *πρ
μὲν τὸ τῆς ἀκροπόλεως εἶχε τότε οὐχ ὡς τ
ἔχει. νῦν μὲν γὰρ μία γενομένη νὺξ ὑγρὰ
φερόντως γῆς αὐτὴν ψιλὴν περιτήξασα πεπ
σεισμῶν ἅμα καὶ πρὸ τῆς ἐπὶ Δευκαλίωνος
ρᾶς τρίτου πρότερον ὕδατος ἐξαισίου γενομ
τὸ δὲ πρὶν ἐν ἑτέρῳ χρόνῳ μέγεθος μὲν ἦν
τὸν Ἠρίδανὸν καὶ τὸν Ἰλισὸν ἀποβεβηκυῖα
περιειληφυῖα ἐντὸς τὴν Πύκνα καὶ τὸν Λυκ
τὸν ὄρον ἐκ τοῦ κατωτικρὺ τῆς Πυκνὸς ἔχ
γεώδης δ' ἦν πᾶσα καὶ πλὴν ὀλίγων ἐπί
ἄνωθεν.*

Die Worte *ἐκ τοῦ κατωτικρὺ τῆς Πυκνός*
ben die Veranlassung, dass man den sog. N
phenhügel Lykabettos genannt hat, bis F
hammer in dem »Brief aus Athen« S. 8 es
sprach, dass die nach dieser Annahme zu
struirende Akropolis eine sehr verschobene
stalt erhalten würde und Plato, wenn er a

Westgrenze derselben noch einen andern Punct nennen wollte, wohl lieber das weit über die »Pnyx« sich erhebende Museion genannt hätte, als diesen Lykabettos. Ich habe nun schon bemerkt, dass Plato nur den nördlichen Punct der Westgrenze zu nennen brauchte, da der südlichste Punct derselben durch den Ilissos gegeben war. Eine Erwähnung des Museion würde das so klar vorgezeichnete Bild nur verwirren oder zum Theil zerstören. Plato macht hier offenbar die Grenzen der damaligen Stadt Athen zu Grenzen seiner idealen Akropolis. Wenn, wie E. Curtius »Erläut. Text« S. 6 mit hinreichender Sicherheit festgestellt zu haben glaubt, der Name Pnyx dem Philopapposgipfel zukäme, fiele damit das ganze Terrain der jetzigen Stadt vom Lykabettos bis zu dem *ἐκ τοῦ καταντικρύ* desselben liegenden sogenannten Nymphenhügel weg. Da dies aber nach der oben gegebenen Erklärung (und, wer in Athen die Stelle liest, kann sie unmöglich anders erklären) unzulässig ist, der sog. Nymphenhügel aber, an dem sich die Spuren der grossen Flut noch am greifbarsten zeigen, jedenfalls von Plato genannt werden musste, kann man nur diesen Hügel für die alte Pnyx erklären*).

2.

An zweiter Stelle mag hier die fast nicht

*) [Schon C. Bursian schloss im Philologus IX, S. 642 bei Gelegenheit der Besprechung der Stelle Platons, »dass schon zu Platons Zeit der Name Pnyx für den ganzen Hügel« — zwischen dem Museion und dem sogenannten Nymphenhügel — »und vielleicht auch den sog. Nymphenhügel, der nur durch eine unbedeutende Einsattelung von ihm getrennt ist, in Gebrauch war«].

minder wichtige Stelle bei Lucian im bis
cap. 9 behandelt werden. Dike ist von Her
auf den Areshügel geführt, nachdem ihr (ca
Zeus befohlen: *καθεζομένη παρὰ τὰς σεμνὰς*
ἀποκλήρου τὰς δίκας καὶ ἐπισκόπει τοὺς δικά
τας. Wegen ihrer langen Abwesenheit ist
mit der Oertlichkeit nicht mehr genau vertr
weshalb Hermes ihr genau angeben muss,
hin sie sich zu setzen hat. Er sagt also: *ἐ*
περ καταβεβήκαμεν, αὐτὴ μὲν ἐνταῦθά που
τοῦ πάγου κάθησο ἐς τὴν Πνύκα ὁρῶσα καὶ
ριμένουσα ἔστ' ἂν κηρύξω τὰ παρὰ τοῦ Διός,
δὲ ἐς τὴν ἀκρόπολιν ἀναβὰς ὄψομαι οὕτως ἄ
τας ἐκ τοῦ ἐπηκόου προσκαλέσομαι. Die
soll sich also auf eine Stelle des Areopags
tzen, die wie die Fortsetzung der Erzähl
zeigt, dem Paneion gegenüber lag. Pan ko
nämlich aus seiner *σκοπή* (cap. 11), von der
er tagtäglich die Streithändel am Areopag
seinem Ueberdruss anhören muss. Hermes
nun von einem Puncte der Burg aus die A
ner zusammen. Gewiss wendet er seinen
namentlich nach der Seite des Marktes hin,
sich hier die Athener am meisten zusamm
drängten und streitende Parteien auf dem Ma
immer zu finden waren. Die Dike schaut
terdess nach der Pnyx oder nach der Geg
des Marktes, welche an die Pnyx stiess.
der jetzt trotz Forchhammer's letzter Ereifer
im Phil. Bd. 33 gesicherten Lage des Mar
im Norden von Areopag und einem Theile
Akropolis (Hermes stellt sich gewiss dahin,
wo er den ganzen Markt vor sich sah) wär
nun lächerlich, wenn die Dike von Hermes
gewiesen würde, nach der jetzt sogenannten P
oder gar dem Museion oder allgemeiner au
drückt der südwestlichen Abtheilung der S

zu sehen, da sie hiermit dem Marktplatze den Rücken kehren würde. Nimmt sie nun gar ihren Platz gerade über dem Adyton der Eumeniden, so kann sie sogar weder von der sog. Pnyx noch dem Museion irgend etwas erblicken. Dagegen fällt einem auf dem Rande des Areopags über jenem Adyton oder den Ruinen, die man der Kirche des Dionysios Areopagita zuschreibt, Sitzenden der Felsenknollen des Nymphenhügels besonders ins Auge. Die oben aus cap. 5 angeführten Worte drängen aber dazu hin, dass man den Sitz der Dike etwa an der bezeichneten Stelle sucht, von der aus man bequem die Pansgrotte sieht, wie die Dike (cap. 11).

3.

Eine dritte für die Bestimmung der Lage der Pnyx ebenfalls wichtige Stelle, die aber manche kritische Bedenken erregt, ist das Schol. zu Arist. Vög. Vs. 997. Der erste Theil des Scholion gibt erstens die Angabe des Kallistratos, der von einem *ἀνάθημα ἀστρολογικόν* des Meton *ἐν Κολωνῷ*, und die des Philochoros, der von dem *ἡλιοτρόπιον* des Meton *ἐν τῇ νῦν οὔσῃ ἐκκλησίᾳ, πρὸς τῷ τείχει τῷ ἐν τῇ Πνυκί* berichtet hatte, zweitens den Versuch gewisser Grammatiker, beide Angaben zu vereinigen. Letzteres geschieht in den Worten: *Μήποτε οὖν τὸ χωρίον, φασί τινες, ἐκεῖνο ἐπάνω, ᾧ περιλαμβάνεται* (bei Forchhammer Kiel. phil. St. S. 343 steht noch *παραλαμβάνεται*) *καὶ ἡ Πνύξ, Κολωνός ἐστιν ὁ ἕτερος ὁ Μίσθιος λεγόμενος· οὕτως μέρος τι νῦν σύνηθες γέγονε τὸ Κολωνὸν καλεῖν, τὸ ὄπισθεν τῆς μακρᾶς στοᾶς· ἀλλ' οὐκ ἔστιν· Μελίτη γὰρ ἅπαν ἐκεῖνο, ὡς ἐν τοῖς ὁρισμοῖς γέγραπται τῆς πόλεως.* Zu den Worten jener combinirenden Grammati-

ker sind hier die des Referenten hinzugefü
Er nimmt an, dass neben dem Heliotropion
der Pnyxwand ein astrologisches Anathema
Meton auf dem Kolonos Agoraios gewesen s
könne, weist aber mit Heranziehung der ὁρισ
τῆς πόλεως die ungebührliche Ausdehnung
Kolonos über den Pnyxberg hinaus entschied
zurück. Die Pnyx ist so gut wie der Kolo
ein Theil von Melite, war aber offenbar d
Kolonos so nahe, dass man auf den Gedank
kommen konnte, beides unter einem Namen
sammenzufassen. Der Kolonos Agoraios ist n
ohne Zweifel der »Theseionhügel«, der die Gre
zwischen Melite und dem inneren Kerameik
bildete. Aus der Periegese des Pausanias erh
nämlich, dass das Hephaisteion auf dem Kolo
an der Westseite des Marktes lag, während
ihm benachbarte Eurysakeion schon zu Me
gehörte, wie aus Harpokration in Εὐρυσάκε
hervorgeht.

Das Hephaisteion ist uns nun wahrscheinli
noch erhalten, da die topographischen Zeugni
wenigstens nicht hindern (indem wir wissen, d
es etwa auf der Grenzscheide von Melite u
Kerameikos lag), die erhaltenen Bildwerke
aber wahrscheinlich machen, dass das These
das alte Hephaisteion war[1]). Gelänge es d

1) Der Deutung, die neuerdings von C. Wachsm
(Rh. Mus. XXIII S. 11. XXIV, S. 44 fg.) und E. Cur
(Erl. Text S. 36. 53) gegeben ist, kann ich schon
dem topographischen Grunde nicht beistimmen, weil
höchst unwahrscheinlich wäre, dass jenes ἐπιφανέστ
ἱερόν, in dem der Hauptcult Melites concentrirt war,
auf den äussersten Rand dieses Demos vorgeschoben w
den. Jedenfalls müsste die Frontseite nicht so auffall
von Melite abgewandt und dem Kerameikos zugek
sein. Ausserdem scheint mir die Verehrung des Hera
als Gottes zu stark von Wachsmuth betont zu werd

zu entscheiden, so wäre es ganz sicher, dass der sog. Theseionhügel der Kolonos Agoraios gewesen, wie es ja auch der Meister der attischen Topographie, Ernst Curtius, aus andern Gründen angenommen hat. Von dem Kolonos nun heisst es im Scholion, dass es Gebrauch geworden, den Theil hinter der *Μακρὰ Στοά* mit dem Namen Kolonos zu bezeichnen. Es kann nun zweifelhaft erscheinen, ob diese Worte dem Scholiasten, der uns diese Vermuthung jener Grammatiker mittheilt, oder diesen zuzuschreiben sind. Ich glaube, wie z. B. Krüger, Untersuchungen über das Leben Thukydides S. 46, A. 137, das Erstere annehmen zu müssen und zwar so, dass die Worte *οὕτως — στοᾶς* als Parenthese ausser der grammatischen Construction stehen, in dem mit *Μελίτη γὰρ* u. s. w. der Grund folgt, weshalb jene Grammatiker Unrecht hatten. Wie ein Theil jener obern Gegend nach den combinirenden Grammatikern fälschlich den Namen Kolonos trug, indem sie auch die Pnyx mit hereinziehen zu müssen glaubten, so trug auch nach dem genaue Ortskenntniss verrathenden Referenten nur ein Theil des eigentlichen Kolonos diesen Namen, obgleich natürlich der ganze Hügel ursprünglich den Namen hatte. Der Theil des Kolonos, auf den der Name des ganzen übergegangen war, lag hinter der langen Stoa. Diese wird ausser dieser Stelle nur noch einmal erwähnt, nämlich im Philistor II, S. 141

a. a. O. S. 45, A. 13. Jenes *ἱερόν* halte ich für ein Heroon. Wenn Her. auch wirklich *θεός* genannt wird, so kann das ein gut gemeintes aber eigentlich zu viel sagendes Prädicat sein. Vgl. Ross, Thes. S. 29 fg. In den Metopen am sog. Theseion ist Herakles offenbar nur als Heros aufgefasst. Die grösste Wahrscheinlichkeit ist für das Hephaisteion.

licher Weise verlegt haben[1]). Man könnte n
vermuthen, dass Plutarch die *τριάκοντα* nenn
aber eigentlich von der Zeit der ersten Tyra
nen, der Pisistratiden überliefert worden s
dass damals der Volksversammlungsplatz (z
gleich mit dem Markte?) verlegt worden (v
Thuk. VI, 54: — *ἀποφανῶ οὔτε τοὺς ἄλλο
οὔτε αὐτοὺς Ἀθηναίους περὶ τῶν σφετέρων τ
ράννων οὐδὲ περὶ τοῦ γενομένου ἀκριβὲς οὐδ
λέγοντας*, und das schon zu Thukydides Zeit
Dass das athenische Volk sich einmal an eine
andern Platz berathen habe, darf man wohl a
der Stelle des Thuk. II, 15, wo die Altstadt sü
lich von der Akropolis angesetzt wird, schl
ssen. Wenn hier die älteste Stadt war, war hi
wohl auch ein Versammlungsplatz. Der Na
dafür ist unbekannt und existirte wohl gar nic
denn von einer alten und neuen Pnyx wie v
einem alten und neuen Markte zu reden,
durch nichts geboten oder gerathen[2]). Die V

1) Wenn C. Gracchus (vit. c. 5) eine der Umdreh
der Bema ähnliche Massregel traf, so lagen die Verh
nisse doch ganz anders. Möglicherweise hat dies Ere
niss den Plutarch zu der falschen Darstellung veranla
[Göttling, Ges. Abh. I, S. 85].

2) Uebrigens schliesse ich mich der Deutung des N
mens Pnyx an, wie sie E. Curtius Att. Stud. I, S. 51
Erl. T. S. 8 annimmt. Pnyx bezeichnete ursprüngli
nur den Hügel (Welcker nennt Felsaltar S. 277 (13) d
Nymphenhügel einen »ungeschickten Klumpe
ein »Felshaupt«, Ross Pnyx u. Pel. S. 3 »eine nack
zerrissene, nach allen Seiten abschüssige Steinmass
»πνύξ« aber erklärt E. Curtius Att. Stud. I, 5 du
»eine geballte compacte Felsmasse«), an dess
Abhang später die seitdem nach ihm benannte Vol
versammlung stattfand. Diese sass früher gewiss ande
wo (nach meiner und Anderer — vgl. Wieseler, de lo
quo a. th. B. l. Ath. n. s. l. sc., p. 16, a. 50 — Verm
thung am Burgabhang).

sammlung selbst hiess *ἀγορά*, wie wir aus Apollodor bei Harpocr. s. r. *Πάνδημος Ἀφροδίτη* wissen*). Der Annahme, dass sich an den Versammlungsplatz der Kaufmarkt angeschlossen, steht nichts entgegen. Da das Heiligthum der *Πάνδημος* nach Pausanias' Angabe der Heiligthümer an der Südseite der Akropolis etwa über dem Odeión der Regilla angesetzt werden darf, kann man annehmen, dass dies Gebäude an der Stelle stehe, wo die frühsten Bewohner Athens ihre *ἀγοράς* hatten. Zu der Zeit, als die Felsenstrasse zwischen Museion und Pnyx noch die Hauptader des Verkehrs mit der See war und das Phaleron der Haupthafen Athens, war dies einer der geeignetsten Puncte für Marktverkehr.

Die Lage passt vortrefflich. Plutarch sagt in der ausgeschriebenen Stelle ausdrücklich, dass das Bema einmal dem Meere zugekehrt war. Das gilt aber nicht für den Redner, der vielmehr den Zuhörern das Angesicht zukehrte, sondern die Zuhörer schauten über das Bema nach dem Meere hin. Ein solcher Versammlungsplatz nun lässt sich mit Wahrscheinlichkeit nur an den Südabhang der Akropolis verlegen, von der man jedenfalls den freiesten Blick auf die See und den Phaleronhafen hat.

Weiter geht aus der Stelle des Plutarch hervor, dass man zu seiner Zeit von dem Versammlungsplatze der Pnyx aus das Meer nicht sah. Dieses kann man mit grosser Wahrschein-

*) [Auch das Versammlungslocal hatte den Namen *ἀγορά*, wie Apollodor ausdrücklich angiebt, indem er als Platz der *ἀγοραὶ* geheissenen Volksversammlungen die *ἀρχαία ἀγορὰ* bezeichnet. Hatte dieser Platz noch einen anderen Namen als *ἀγορὰ* (im engsten Sinne), so könnte man etwa vermuthen, derselbe sei gewesen *ἐκκλησία*, obgleich dieses Wort für das Local erst bei Lucian vorkommt].

lichkeit auch aus Aesch. d. f. leg. p. 253 sc
ssen: *ἀνισιάμενοι οἱ ῥήτορες ἀποβλέπει*
τὰ προπύλαια τῆς ἀκροπόλεως ἐκέλευον ἡμᾶς
τῆς ἐν Σαλαμῖνι πρὸς τὸν Πέρσην ναυμα
μεμνῆσθαι, obgleich es hier nicht ausgem
ist, ob mit *ἀποβλέπειν* und *μεμνῆσθαι* ein
gensatz ausgedrückt werden sollte. Wen
aber von der Pnyx bei Poll. i. Onom. VIII,
heisst: *Πνὺξ δὲ ἦν χωρίον πρὸς τῇ ἀκροπόλε*
kann dieses der Akropolis nahe gegenüber
findliche *χωρίον**) nur so belegen gewesen
dass man von ihm das Meer nicht erbli
Das lehren die Terrainverhältnisse der A
chungen sämmtlicher der Akropolis nach We
nahe gegenüber liegender Hügel. Ferner e
ren wir aus der Plutarchischen Stelle, dass
βῆμα der Pnyx *πρὸς τὴν χώραν* gerichtet
Dieser Ausdruck wird am besten durch die Anna
erklärt, dass das *βῆμα* mit dem Zuhörerr
davor in einer nach dem *πεδίον* orientirten
gend lag**). Das bestätigt trotz Welcker

*) [Das »nahe« passt nicht eben gut auf den
phenhügel. Bursian, mit welchem der Verfasser hin
lich der Deutung des *πρὸς* mit dem Dativ durch
genüber» übereinstimmt, fühlt sich im Philol. IX, S
fg. selbst hinsichtlich seiner Ansetzung der Pnyx z
Bemerkung veranlasst »bei Poll. VIII, 132 ist nicht
mal die leichte Aenderung des Dativs in den Accu
nöthig, da *πρὸς* öfter nicht die unmittelbare Näh
zeichnet; bei Thuk. III, 78, 2 sind *οἱ πρὸς τοῖς K*
ραίοις die den Kerkyräern in der Seeschlacht gegen
stehenden Peloponneser«. Sollte es nicht das Gera
ste sein, bei Pollux das Wort *ἀκρόπολις* von dem g
höher gelegenen Theile der Stadt zu verstehen?
Göttling Ges. Abhandl. I, S. 73].

**) [Natürlich sind die obigen Worte des V
sers nicht so zu verstehen, als meine derselbe, das
wohl die Vorderseite des Bema als auch die der
nach dem Lande hingerichtet gewesen sei. In di

Mus. N. F. X, S. 41 auch Aristoph. Acharn. Vs. 32, wo Dikäopolis auf der Pnyx sitzt, und, während er das Geschwätz der sich auf dem Markte Herumtreibenden anhört, *ἀποβλέπεις τὸν ἀγρόν* *).

Falle hätten ja die Zuhörenden dem Sprechenden den Rücken zugekehrt. Wenn Plutarch, wie Hr. Lolling mit Recht annimmt, angiebt, das Bema sei zuerst so angelegt worden, dass die Zuhörer über dasselbe hin auf das Meer schauten, so muss die von ihm berichtete spätere Umänderung seiner Meinung nach darin bestanden haben, dass seitdem die Zuhörer über das Bema hin auf das Land schauten. Früher stand nach Plutarch das Bema auf der dem Meere, später auf der dem Lande zugekehrten Seite des Versammlungslocals. Früher hatte der Redner das Meer, später das Land im Rücken. Der natürlich nicht auf die Zuhörer, sondern auf das *βῆμα* bezügliche Ausdruck *ἀποβλέπειν* ist entschieden nicht so zu verstehen, als sei die Fronte der Rednerbühne nach dem Meere hin gerichtet gewesen].

*) [Unzweifelhaft folgt aus Aristophanes nur, dass man von den Sitzbänken der Pnyx aus auf das Land hinsehen konnte, und zwar, da Dikäopolis aller Wahrscheinlichkeit nach auf Acharnae hinschaut, auf das Land im Norden der Stadt Athen. Hienach scheint es doch zunächst, als hätte das auf der Pnyx versammelte Volk das Gesicht nach jener Richtung hin gewandt; oder man müsste denn annehmen wollen, dass Dikäopolis so lange als er allein war, eben um nach dem Lande hinschauen zu können, sich so gesetzt hatte, dass ihm dieses möglich war. Wer dieses nicht annehmen will, muss voraussetzen, dass der Redner auf dem *βῆμα* das Gesicht nicht in derselben Richtung dem Lande zugekehrt habe. — Dass Dikäopolis das Geschwätz der sich auf dem Markte Herumtreibenden anhöre, ist eine ohne allen Zweifel irrige Annahme. Dikäopolis sieht nicht einmal auf den Markt hin. Dass dieser in den scenischen Decorationen nicht zur Darstellung gebracht war, leuchtet von selbst ein. Was Dikäopolis über das Treiben auf dem Markt sagt, beruht auf früherer Kunde von dem, was hier so häufig vorging, ebenso wie das, was er Vs. 23 fg. über die Prytanen sagt. Selbst der von Hrn. Lolling unten S. 484 fg., Abschn. II, 1, wie wir glauben, mit Recht behauptete Umstand, dass die Pnyx unmittelbar über dem Markte lag, lässt

Das ἀποβλέπειν in der oben angeführten S
des Aeschines scheint anzudeuten, dass das
seine Blicke gewöhnlich anders wohin als
den Propyläen richtete; der Redner indess,
wie weiter unten gezeigt wird, über der
sammlung stand, erblickte offenbar die Pr
läen, wenn er ohne sich umzukehren, seine
cke über seine herrliche Vaterstadt gehen lie
Für alle diese Puncte finden wir eine zutreff
ungezwungene Erklärung nur durch die Annal
dass der Versammlungsort an der alten
nördlich oder nordwestlich von der Felsz
der Hagia Marina lag. Wir haben hiermi
nen neuen Beweis dafür, dass der sog. Nymp
hügel die alte Pnyx war.

Auf eine weitere Folgerung, die aus der
handelten Stelle des Plutarch zu ziehen ist,
ich unten eingehen.

5.

Zunächst und zuletzt in diesem Absch
muss ich die Beschreibung des Kleidemos
der Amazonenschlacht zu erläutern suchen.

sich nicht so ohne Weiteres aus der ganzen Stell
Acharner von Vs. 19 an entnehmen, sondern nur m
bar aus dem Hergange mit dem σχοινίον μεμιλτω
(Vs. 22) schliessen, wofür Schömann Griech. Alter
S. 394 fg. der zw. Ausg. die besten Fingerzeige geg
hat].

*) [Das Volk richtete seine Blicke doch wohl auf
Redner, zumal wenn er zu sprechen anfing. Ob d
wenn er, dem Volke zugekehrt, sprach, gerade i
Richtung der Propyläen hinschaute, ist sehr die F
Aus der Stelle des Aeschines lässt sich offenbar kei
derer Schluss mit Sicherheit ziehen als der, dass di
hörer auf der Pnyx mit oder ohne Seitenwendung, sc
lich aber nur indem sie den Körper vollständig um
ten, die Propyläen sehen konnten].

halte mich allein an die Worte des Plutarch und des Kleidemos. Sie lauten (c. XXVII im Theseus; in dem vorgehenden cap. ist von der *πρόφασις* zum Amazonenkriege die Rede): *Πρόφασιν μὲν οἶν ταύτην ὁ τῶν Ἀμαζόνων πόλεμος ἔσχε· φαίνεται δὲ μὴ φαῦλον αὐτοῦ μηδὲ γυναικεῖον γενέσθαι τὸ ἔργον. Οὐ γὰρ ἂν ἐν ἄστει κατεστρατοπέδευσαν οὐδὲ τὴν μάχην συνῆψαν ἐν χρῷ περὶ τὴν Πνύκα καὶ τὸ Μουσεῖον, εἰ μὴ κρατοῦσαι τῆς χώρας ἀδεῶς τῇ πόλει προσεμίξαν. Εἰ μὲν οὖν, ὡς Ἑλλάνικος ἱστόρηκε, τῷ Κιμμερικῷ Βοσπόρῳ παγέντι διαβᾶσαι περιῆλθον, ἔργον ἐστὶ πιστεῦσαι· τὸ δὲ ἐν τῇ πόλει σχεδὸν αὐτὰς ἐνστρατοπεδεῦσαι μαρτυρεῖται καὶ τοῖς ὀνόμασι τῶν τόπων καὶ ταῖς θήκαις τῶν πεσόντων. Πολὺν δὲ χρόνον ὄκνος ἦν καὶ μέλλησις ἀμφοτέροις τῆς ἐπιχειρήσεως· τέλος δὲ Θησεὺς κατά τι λόγιον τῷ Φόβῳ σφαγιασάμενος συνῆψεν αὐταῖς. Ἡ μὲν οὖν μάχη Βοηδρομιῶνος ἐγένετο μηνὸς ἐφ' ᾗ τὰ Βοηδρόμια μέχρι νῦν Ἀθηναῖοι θύουσιν. Ἱστορεῖ δὲ Κλείδημος, ἐξακριβοῦν τὰ καθ' ἕκαστα βουλόμενος, τὸ μὲν εὐώνυμον τῶν Ἀμαζόνων κέρας ἐπιστρέφειν πρὸς τὸ νῦν καλούμενον Ἀμαζόνειον, τῷ δὲ δεξιῷ πρὸς τὴν Πνύκα κατὰ τὴν Χρύσαν ἥκειν. Μάχεσθαι δὲ πρὸς τοῦτο τοὺς Ἀθηναίους ἀπὸ τοῦ Μουσείου ταῖς Ἀμαζόσι συμπεσόντας, καὶ τάφους τῶν πεσόντων περὶ τὴν πλατεῖαν εἶναι τὴν φέρουσαν ἐπὶ τὰς πύλας παρὰ τὸ Χαλκώδοντος ἡρῷον, ἃς νῦν Πειραϊκὰς ὀνομάζουσι. Καὶ ταύτῃ μὲν ἐκβιασθῆναι μέχρι τῶν Εὐμενίδων καὶ ὑποχωρῆσαι ταῖς γυναιξίν, ἀπὸ δὲ Παλλαδίου καὶ Ἀρδηττοῦ καὶ Λυκείου προσβαλόντας ὥσασθαι τὸ δεξιὸν αὐτῶν μέχρι τοῦ στρατοπέδου καὶ πολλὰς καταβαλεῖν. Τετάρτῳ δὲ μηνὶ συνθήκας γενέσθαι διὰ τῆς Ἱππολύτης.* Statt der Hippolyte nannten andere die Antiope, vielleicht desshalb, weil deren *στήλη* beim Eintritt ins itonische Thor stand,

ihre Streitmacht also vor ihrem Lager an
pag mit Ausdehnung nach Süden und
aufgestellt. Die Schlacht fand da statt, w
später die Gräber der Gefallenen ansetz
der Strasse, die zum piräischen Thore
Die Lage dieser Strasse findet man z.
Taf. II. von E. Curtius Att. Stud. Es
sich neben diesem Wege eine Reihe vo
bern, wenn auch, so viel mir bekannt ge
nur aus späterer Zeit. Die Erwähnung d
seion aber, zugleich mit dem piräischen
das nördlich vom sog. Nymphenhügel an
werden darf, führt zu der Annahme, da
an dem Barathron vorbei nach dem Iliss
rende Strasse gemeint ist. Hier breitet si
ein grosses freies Feld aus, zwischen de
lichen Abdachungen des Museion auf der
des Nymphenhügels auf der anderen Seite.
ist der *χῶρος περὶ τὴν Πνύκα καὶ τὸ M*
also anzusetzen, unter Pnyx kann dan
nur der sog. Nymphenhügel verstanden
Bei dieser Annahme erhält man etwa fol
Bild von der Schlacht.

Nachdem Theseus seine Athener (wen
zum grössten Theil, ein Theil musste de
besetzt halten) vom Museion in das eben
bezeichnete Thal herabgeführt, um der
Zögerung ein Ende zu machen, rücken au
Amazonen von ihrer Stellung zwischen
neion und Pnyx (Nymphenhügel) herab
Schlacht entscheidet sich zuerst für die
nen, deren rechter an der Pnyx *κατὰ τὴ*
σαν stehender Flügel den Athenern erfo
widerstand. Während hier nun der Kam
mer heftiger wurde, liessen die Amazone
linken Flügel näher und um die Th
herum heranziehen. So waren die Athen

rechts und links bedrängt und sogar in Gefahr umzingelt zu werden. Darum mussten sie sich endlich nach der Stadt zurückziehen, und dies geschah in der Richtung nach den Eumeniden am Areopag zu. Nach links aber, etwa dem Dipylon zu, wichen sie nicht vor den nachdrängenden Amazonen, weil es ihnen darum zu thun sein musste, die Stadt zu behaupten, namentlich auch, um jeden etwaigen Angriff der Amazonen gegen die Burg lahm zu legen. Warum nun bei der ganzen Erzählung von der Burg nirgends die Rede ist, bleibt freilich noch dunkel; dunkel bliebe aber auch, wenn in den alten Sagen die Burg mit in diese Erzählung hinein gezogen worden (wie es Curtius Att. St. II, S. 68 thut), warum bei dem schliesslichen Entsatz der Athener durch den Zuzug aus der Ilissosgegend kein Ausfall aus der Burg gemacht wurde; davon ist aber nicht die Rede, und gewiss sind wir eben so wenig zu fragen berechtigt, warum ein auf alte Sagen zurückgehender Erklärungsversuch diesen oder jenen wichtigen Punct übergeht, vgl. aber Wachsm. Rh. Mus. XXIII, S. 175. Man kann auch annehmen, dass Theseus ausser Landes war, als die Amazonen einbrachen, bei deren Heranrücken die Attiker sich in der Burg verschanzten. Wir dürfen also die Burg selbst wohl ausser Spiel lassen. Auch hebt Plutarch die weite Ausbreitung der Amazonen über das Gebiet der *κάτω πόλις* und die *χώρα* ausdrücklich hervor. Den sonst bekannten Angriff der Amazonen auf die Burg darf man nicht hereinziehen.

Das bei jener Schlacht und ihrer Vorbereitung in Betracht kommende Terrain hat seinen Abschluss nach Osten in der Gegend des Areshügels. Hier stand nun das Lager der Amazonen und die Lage der zurückgedrängten Athe-

ner war bedenklich. In diesem bedrängten
genblicke erschien ein Ersatzherr aus der
westlichen Gegend der Stadt. Dieser Zuzug
schied die Niederlage der Landesfeinde;
Feier dieser Hülfe feierte man darum späte
Βοηδρόμια.

Zu einer vielleicht ähnlichen Erklärung
Beschreibung des Kleidemos ist der Ref. im
Centralbl. 1863, S. 712 (Bursian, vgl. de
Ath. p. 10, 1) gekommen, nach dem, wie
aus Curtius' Att. Stud. II, S. 69 sehe, »die
Kleidemos gemeinte Pnyx eine ziemliche St
nördlich vom Museion, also auf dem gewöh
so genannten Hügel oder am Nymphenhüg
suchen ist« *).

II.

Die Beschaffenheit der Pnyx.

1.

Der Pnyxberg und der Versammlungsplatz.

Es ist bereits oben ausgeführt worden,
man vom Markte zur Pnyx hinaufstieg.

*) [Bursian hat die betreffende Ansicht, wie ob
467, Anm. bemerkt ist, schon früher ausgesprochen,
auf Kleidemos Rücksicht zu nehmen. Im litter. Cen
a. a. O. berücksichtigt er auch diesen, um Curtiu
sicht hinsichtlich der Ansetzung der Pnyx auf den
seion zu widerlegen, nimmt inzwischen mit diese
»der Schauplatz des Kampfes könne kein anderer
sen sein, als die Niederung zwischen dem Areopag,
seion, Nymphenhügel und der Pnyx (dem Welcker
und Curtius'schen Altarhügel), also eben jene
Strasse (*πλατεῖα*), die nach dem piräischen Thore
an welchem nach Kleidemos die Gräber der in d
Kampfe gefallenen Athener sich befanden«].

die Pnyx unmittelbar über dem Markte lag, darf man auch aus Arist. Arch. Vs. 19—42 entnehmen; die von Ross, Theseion S. 60 versuchte Aushülfe ist wenigstens sehr unbehülflich. Wie der Hügel selbst ein *πάγος ὑψηλός*, ein *λόφος* genannt wird (Schol. Aesch. c. Tim. p. 24 Dind.), so lag auch der Versammlungsplatz hoch über der Agora. Es ist von einem Aufsteigen und Obensitzen die Rede (Ross, Pn. u. Pel. S. 1).

Bei Plato, de republ. VI, p. 492 b, hat Welcker a. a. O. S. 328 (64), dem auch E. Curtius (Att. Stud. I, S. 53) beistimmt, einen Bezug auf die Lage der athenischen Volksversammlung (an der Pnyx) mit Recht angenommen. Plato spricht hier von dem Widerhall, welchen das Geschrei der Versammlungen in Felsen und Theaterwänden findet: *ὅταν συγκαθεζόμενοι ἀθρόοι πολλοὶ εἰς ἐκκλησίας ἢ εἰς δικαστήρια ἢ θέατρα ἢ στρατόπεδα ἤ τινα ἄλλον κοινὸν πλήθους ξύλλογον, ξὺν πολλῷ θορύβῳ τὰ μὲν ψέγουσι τῶν λεγομένων ἢ πραττομένων, τὰ δὲ ἐπαινῶσι, ὑπερβαλλόντως ἑκάτερα καὶ ἐκβοῶντες καὶ κροτοῦντες· πρὸς δ' αὐτοῖς αἵ τε πέτραι καὶ ὁ τόπος ἐν ᾧ ἂν ὦσιν ἐπηχοῦντες διπλάσιον θόρυβον παρέχωσι τοῦ ψόγοντε καὶ ἐπαίνου.* Aus dieser Stelle schliesst Welcker mit grosser Wahrscheinlichkeit, dass der Versammlungsplatz an der Pnyx zwischen (hohen) Felsabhängen gelegen gewesen. Es ist nun völlig unbegreiflich, wie man bei dieser Annahme jenen Platz an dem Museion, das höchst überflüssiger Weise einen zweiten Namen bekommen soll, suchen kann, da ein Blick z. B. von der Akropolis aus lehrt, dass ein solcher Platz, zumal auf der *πρὸς τῇ ἀκροπόλει* liegenden Seite nirgends vorhanden ist. Diese Bedingung wird ganz allein durch den von mir bestimmten Versammlungsplatz erfüllt, den im We-

sten die Felswand der Pnyxhöhe, im Süde
der Hagia Marina einfasst. Dies ist zugleicl
Platz, der einen grossen Theil des Tage
Schatten liegt. Die ihn im Westen begrenz
Felswand des Nymphenhügels ist durch grö
und kleinere Höhlen zerklüftet. Nun schl
ich aus Aristoph. Eccl. Vs. 103 ff., dass
unmittelbar unter dem Bema sitzen konnte.
bindet man hiermit die weiter unten, wo
die Lage derselben die Rede sein wird, z
handelnden Stellen des Arist., so schliesst
dass das ὑπὸ τὸ λίθῳ in den Eccl. wörtlicl
nommen werden muss. Dies muss zugleich
Stelle sein, an welcher Frauen sitzen kou
ohne in der Verkleidung erkannt zu we
Darum nehme ich an, dass die τῶν πρυτα
κατανικρύ befindlichen Sitze in der Felsklü
unmittelbar unter jener weiter unten ange
nen Stelle anzusetzen sind, an welcher das
stand*). 5 — 10 Schritt weiter unten sta

*) [Wer die Stelle in den Ekklesiazusen Vs. 86
denn um diese handelt es sich wesentlich — gen
wägt, wird zu einem Resultat kommen, welches den
im Texte dargelegten Ansichten so gut wie diametr
gegensteht. Das Weib *H* soll »Sitze einnehmen unt
des λίθος gegenüber den Prytanen«, welche ihren
auf dem πρῶτον ξύλον hatten, weil es allerhand G
stände bei sich hat, um während der Verhandlunge
νειν zu können. Es kömmt offenbar nicht darau
dass das Weib den Blicken der in der Volksversam
befindlichen Männer möglichst entzogen werde, so
darauf, dass dasselbe einen Platz erhalte, der ihn
nöthigen freien Raum für seine Sachen und seine T
keit biete. Ein gewöhnlicher Sitz inmitten des den
handlungen zuhörenden Volks genügte dazu nicht;
halb soll das Weib Sitze in der Mehrzahl an jener
einnehmen. Diese bot eben zwischen dem πρῶτον
und dem λίθος oder genauer den ἕδραι unterhalb
ben den für jene Thätigkeit nöthigen Raum. Dass

dann die Sitze der Prytanen. Von ihnen (*περὶ πρώτου ξύλου*) sagt Dikaeopolis Acharn. Vs. 24 f., dass die Prytanen sich darum stossen werden. Eine jener Felswände, vermuthlich die der Hagia Marina, ist unter jenem *τεῖχος* (»eine von der Natur aufgebaute Mauer«, wie Paus. I, 22, 4, vgl. Welcker, d. Felsaltar S. 313 (49), Rh. Mus. X, S. 41), zu verstehen, an welchem Metons Heliotropion aufgestellt war. Sollte dies rund gewesen sein, so möchte man annehmen, dass die runde Kapelle der H. M. an seine Stelle getreten sei. Keine andere athenische Kapelle hat diese Gestalt, auch ist der Eingang an der Nordseite ungewöhnlich*).

Von dem davorliegenden Platze gilt noch jetzt wie im Alterthum, dass er von dem Treiben der darunter liegenden Stadt abgelegen ist, wenn auch die Nähe des Thors und des Marktes den Contrast damals grösser machte. Ein sehr deutliches Bild dieses Gegensatzes der zwei Theile einer und derselben Stadtgegend giebt das oben angeführte Stück des Aristophanes,

καταλαβεῖν ἕδρας nicht im Allgemeinen von dem Sichniederlassen an einem Ort, der hiezu die Möglichkeit bot, sondern von dem Einnehmen wirklich vorhandener eigentlicher Sitze zu verstehen hat, bedarf wohl keines weiteren Nachweises in sprachlicher Hinsicht; in sachlicher aber lässt sich die Bestimmung solcher Sitze auch bald errathen. Sie dienten sicherlich für diejenigen Personen, welche während der Verhandlungen dem Redner und den Vorsitzenden zur Hand sein oder sonst Dienste leisten mussten. Dahin gehören namentlich der Grammateus und der Keryx und die Lexiarchen. Einen entsprechenden Platz nahmen die Rhabduchen im Theater ein, vgl. Denkm. des Bühnenwes. Taf. XI, n. 2 nebst Text].

*) [Die Unzulässigkeit der obigen Auffassung der Worte *πρὸς τῷ τείχει τῷ ἐν τῇ Πυκνὶ* erhellt schon aus dem Umstande, dass es zwei solcher natürlichen Felswände auf der Pnyx gab, wie der Verfasser selbst bemerkt].

die Acharner Vs. 19—23. Beim Schol. zu A
a. a. O. heisst es ausdrücklich von der
dass sie belegen sei *ἐν ἐρήμῳ τόπῳ*. Die u
herumliegenden Wohnungen waren zum Thei
lassen und verfallen (vgl. Ross a. a. O. S.
denen meist nur liederliche Frauenzimmer
aufhielten. Dafür liefert eine viel bespro
aber doch noch dunkele Stelle des Aeschin
Tim. §. 81 Bekker einen unzweifelhaften Be
In den Ausgaben lesen wir: *τῆς γὰρ βουλῆ
ἐν Ἀρείῳ πάγῳ πρόσοδον ποιουμένης πρὸς
δῆμον κατὰ τὸ ψήφισμα τὸ τούτου, ὃ οὗτος
κει περὶ τῶν οἰκήσεων τῶν ἐν τῇ Πυκνί, ἣν
λόγον λέγων ἐκ τῶν Ἀρεοπαγιτῶν Αὐτόλυκος
λῶς . . . . βεβιωκώς· ἐπειδὴ δέ που προῖοντο
λόγου εἶπεν, ὅτι τὸ εἰσήγημα τὸ Τιμάρχου ἀπο
μάζει ἡ βουλή, καὶ περὶ τῆς ἐρημίας ταύτη
τοῦ τόπου τοῦ ἐν τῇ Πυκνὶ μὴ θαυμάσητ
Ἀθηναῖοι, εἰ Τίμαρχος ἐμπειροτέρως ἔχει τῆς
λῆς τῆς ἐξ Ἀρείου πάγου, ἀνεθορυβήσατε ὑμεῖ
θαῦτα καὶ ἔφατε τὸν Αὐτόλυκον ἀληθῆ λ
εἶναι γὰρ αὐτὸν ἔμπειρον τούτων· ἀγνοήσας δ'
τὸν θόρυβον ὁ Αὐτόλυκος, μέλα σκυθρωπ
καὶ διαλιπὼν εἶπεν, ἡμεῖς τοι, ὦ Ἀθηναῖ
Ἀρεοπαγῖται οὔτε κατηγοροῦμεν Τιμάρχου
ἀπολογούμεθα (οὐ γὰρ ἡμῖν πάτριόν ἐστιν),
μεν δὲ τοιαύτην τινὰ συγγνώμην Τιμάρχῳ·
ἴσως, ἔφη, ᾠήθη ἐν τῇ ἡσυχίᾳ ταύτῃ μικρὸν
(Bekk. ὑμῶν) ἑκάστῳ ἀνάλωμα γνίεσθαι<,
πάλιν ἐπὶ τῇ ἡσυχίᾳ καὶ τῷ μικρῷ ἀναλ
μείζων ἀπήντα παρ' ὑμῶν μετὰ γέλωτος θόρ
ὡς δ' ἐπεμνήσθη τῶν οἰκοπέδων καὶ τῶν λα
οὐδ' ἀναλαβεῖν αὐτοὺς ἐδύνασθε.*

Ich habe diese Stelle dunkel genannt,
es nicht bekannt ist, worin der von Ti
gemachte und dem Areopag überwiesene
schlag eigentlich bestand. Wir wissen nur,

es sich um Wohnungen auf oder an der Pnyx handelte[1]). Forchhammer hat Topogr. S. 17 die Vermuthung aufgestellt, dass Timarch in der Gegend der Pnyx einem Theil der Areopagiten Wohnungen, die weniger kosteten, angewiesen haben wollte. Göttling sagt Ges. Abh. I, S. 90: »Timarchus hatte einen Vorschlag zu irgend einem öffentlichen Bau in der Gegend der Pnyx gemacht, welcher, weil dort keine Häuser waren (das darf Göttling aber nicht auf die ganze Pnyx ausdehnen), die vorher hätten angekauft werden müssen, um Raum zu gewinnen, den Athenern noch wohlfeiler zu stehen gekommen sein würde; es ist aber nicht davon die Rede, etwa den ärmern Areopagiten Wohnungen zu verschaffen, sondern die Areopagiten sind über T.'s Vorschlag als Oberbaubehörde gehört worden«. Welcker Felsaltar S. 327 (63) fg. entscheidet sich für keinen dieser beiden Erklärungsversuche. Da von einer *συγγνώμη* die Rede ist, die Areopagiten ferner den Timarch weder anklagen noch vertheidigen wollen, weil das nicht ihre Sache sei, ihnen dergleichen von altersher nicht zukomme, muss in dem Vorschlag des Timarch etwas (für die Athener oder die Areopagiten) Verletzendes, Beleidigendes, Anstössiges gelegen habe. In dem *ψήφισμα* oder *εἰσήγημα* wäre dabei *περὶ τῆς ἐρημίας ταύτης καὶ τοῦ τόπου τοῦ ἐν τῇ Πυκνὶ* die Rede, wenn nämlich diese Worte richtig sein könnten. Das kann ich aber nicht glauben. Erstens könnte der *τόπος* nur der Platz der Volksversammlung sein

1) Ich sehe keinen berechtigten Grund dagegen, warum hier der Areopag nicht als Oberbaubehörde fungiren könne, wenn dies auch dem Character des hohen Rathes wenig zuzusagen scheint. Es könnte auch noch immerhin angenommen werden, dass irgend welche religiöse Bedenken gegen den Vorschlag des Tim. vorlagen.

und das war doch keine berüchtigte Gegend,
deren Erwähnung den Athenern die Sittenlosig
des Timarch einfallen konnte; zweitens sieht
nicht ein, warum Timarch den Platz der Vo
versammlung besser kennen sollte als die A
pagiten oder weshalb er darin mehr ἔμπ
sein sollte als jeder Athener. Darum muss
τόπον ein Wort eingesetzt werden, das we
seiner Zweideutigkeit als ein Schlag gegen
march betrachtet werden kann.

Da nun Autolykos an zweiter Stelle von
ἡσυχία und d. ἀνάλωμα spricht, wovon jenes
κρὸν wesentlich durch die an erster Stelle
nannte ἐρημία bedingt ist (siehe das Schol
der Ausgabe von Ferdinand Schultz bei Teul
in L. MDCCCLXV. S. 269. 83), so vermuthe
dass auch statt τόπος ein dem μικρὸν ἀνάλ
in ähnlicher Weise correspondirender Begriff
zusetzen sein wird. Wahrscheinlich hatte
march gesagt, dass ein solches μικρὸν ἀνάλω
ein kleines Anlagecapital, an der Pnyx hohe
sen tragen könne. Darum schlage ich vor τ
zu lesen, dessen Zweideutigkeit in die Au
springt, ohne dass ich es näher auseinan
setze *).

Hiermit habe ich zugleich die Gründe
einandergesetzt, warum ich Welcker nicht
stimmen kann, wenn es die Aeschinesstelle
zu denen rechnet (Felsaltar 330 (66), in wel
von einem τόπος die Rede ist, der für die Vo

*) [Die obige Conjectur wird schwerlich gebilligt
den. Indessen scheint die Annahme einer Verderbni
den Worten καὶ τοῦ τόπου τοῦ ἐν τῇ Πνυκὶ richtig zu
Die leichteste Veränderung ist ohne Zweifel: αὐτὰ
τόπον τὸν ἐν τῇ Π. Dass von dem zuerst weiter
zur Rede kommenden ἀνάλωμα schon hier gespro
sei, hat durchaus keine Wahrscheinlichkeit].

versammlung an der Pnyx diente. Zu derselben Stelle habe ich nur noch die Bemerkung hinzuzufügen, dass man den Ausdruck *περὶ τῶν οἰκήσεων τῶν ἐν τῇ Πυκνί* doch gewiss am besten durch: »über die an der Pnyx befindlichen Wohnungen« wiedergibt, und dass also die Göttlingsche Erklärung unwahrscheinlich ist, bei der von der Anlage eines öffentlichen Gebäudes die Rede ist.

Von den Wohnungen in der Stadtgegend der Pnyx ist übrigens so oft die Rede gewesen, dass ich kein weiteres Wort darüber verliere. Die Stellen, welche von jenem *τόπος* sprechen, findet man bei Welcker am a. O. Die Pnyx selbst wird ein *τόπος πετρώδης* genannt (Schol. Aesch. a. a. O.) und von dem Volke gesagt, dass es hart auf Steinen lagere (Arist. Ri. 783); vgl. Welcker a. a. O. S. 333 (69) fg. Eine viel besprochene Stelle ist Poll. Onom. *Π*, 132: *Πνὺξ δὲ ἦν χωρίον πρὸς τῇ ἀκροπόλει, κατεσκευασμένον κατὰ τὴν παλαίαν ἁπλότητα, οὐκ εἰς θεάτρου πολυπραγμοσύνην.* Dies bezieht sich auf den Versammlungsplatz, insofern er jeder baulichen Ausrüstung, die über das Nothwendige hinausging, entbehrte. So hatte früher, als die dramatische Kunst sich zu entwickeln anfing, der Sprechende auf einem erhöhten Platz über der Versammlung gestanden, die ringum auf dem Boden stand oder sass oder lag. So war es nach der Stelle der Pollux auch in der Pnyx, wenn auch in den Felsen gehauen oder künstlich aufgesetzte Sitze hinzugekommen sein mochten. Vgl. übrigens Welcker a. a. O. S. 331 (67). In den Wesp. Vs. 31—33 gibt uns Sosias aus seinem Traume eine originelle Ansicht:

ἔδοξέ μοι περὶ πρῶτον ὕπνον ἐν τῇ Πυκνὶ
ἐκκλησιάζειν πρόβατα συγκαθήμενα,

βακτηρίας ἔχοντα καὶ τριβώνια.
Das weiter in Vs. 43 folgende *χαμαὶ κ*
bezieht sich nicht auf den Platz der V
sammlung, obgleich dies allgemeine A
ist. Auch darüber scheint man einig, das
der Schol. zu Arist. Ach. 20 *πνὺξ παρὰ*
λίθων πυκνότητα herleitet, an den Pl
Volksversammlung (Welcker a. a. O. S.
oder einen Theil derselben zu denken ist
findet (a. a. O. S. 11), dass in den Wo
Schol. eine Hindeutung auf die Strei
liege. Es ist aber klar, dass der *λόφο*
gemeint ist, und dass der Scholiast zu je
klärung kommen konnte, davon überze
besten der Anblick des Nymphenhüge
vom Areopag aus. Ob eine Begränzu
Raumes durch irgend welche Bearbeitu
Felsbodens vorhanden gewesen, wissen wi
eben so wenig, ob regelrecht geordnete
sitze (*βάθρα* Schol. zu Arist. Equ. 784)
pen, Durchgänge dawaren. Auf die letzt
ten könnte man vielleicht aus Thesmo
657 schliessen wollen *).

Ich erwähne schliesslich noch einige
deren Vorhandensein in oder am Versam
platze mit Recht oder Wahrscheinlichkei
nommen wird. Zunächst das Heliotrop
Meton. Eine dafür passende Stelle habe

*) [Der Schluss wäre aber durchaus nicht
Mit demselben Rechte hätte man auch *τὰς σκη*
che Aristophanes a. a. O. erwähnt, für die Pn
nehmen. Die Versammlung in den Thesmoph
hat gar nicht auf der Pnyx, sondern in dem
phorion statt und der Ausdruck *τὴν πνῦκα*, ü
dessen auch die Gelehrten, welche sich mit der
der Thesmophoriazusen beschäftigt haben, sehr
thum sind, bedeutet nichts Anderes als Versamm
überhaupt].

reits oben genannt. Ferner stützt sich die im Eingange des Aufsatzes erwähnte Heiligung der Pnyx auf die von Ross a. a. O. S. 12 ff. angeführten Zeugnisse. Sowohl Ross als Welcker a. a. O. S. (333) 69 nehmen an, dass eine Bildsäule des Zeus Agoraios gewiss nicht gefehlt habe. Das Schol. zu Arist. Equ. 410: *ἀγοραῖος Ζεὺς ἵδρυται ἐν τῇ ἀγορᾷ καὶ ἐν τῇ ἐκκλησίᾳ* sagt dies ja ausdrücklich. Es ist nun ein günstiger Zufall, dass wir den Platz seines *βωμός* und seiner Statue noch nachweisen können, wenn anders der Inhalt dieses Aufsatzes richtig ist. Die alte Horosinschrift auf dem Felsen der Hagia Marina bezeichnet jene Stelle, der *ὅρος Διός* ist soviel wie *χῶρος ἱερὸς Διός*. (Vgl. Curtius, zur Geschichte des Wegebaues bei den Griechen S. 37, Böckh, Monatsber. der Akademie d. W. 1854. S. 328). Es ist jedenfalls der Zeus Agoräos gemeint, wie auch schon Göttling, Ges. Abh. I, S. 89, A. 1 vermuthete, indem er wie jene alten combinirenden Grammatiker den Nymphenhügel für den Kolonos Agoräos hielt. Wenn Aesch. Eum. Vs. 997 *ἵκταρ ἥμενοι Διός* zu lesen ist, wird man gewiss an dieselbe Bildsäule des Zeus denken*). Man hat nun auch wohl einen Cult der Asklepios in der Nähe der Bema annehmen wollen. Weil es aber unbekannt ist, ob der in der vita Dem. in d. V. X. or. genannte Asklepios wegen der geringen Entfernung seines Hieron vom Bema oder von dem Theater angerufen wurde, bemerke ich nur, dass man vielleicht

*) [An der Richtigkeit jener Worte ist sicherlich nicht zu zweifeln; entschieden aber an der Zulässigkeit der Auffassungsweise des Verfassers. Dass das Wort *ἥμενοι* sich auf den *δῆμος πυκνίτης* beziehe, hat auch nicht die geringste Wahrscheinlichkeit. Der Ausdruck *ἵκταρ ἧσθαι* ist wesentlich bildlich zu nehmen].

auch wegen des Gebrauchs des Rutschs
und des bekannten Cultes der Hagia Mari
solches ἱερόν voraussetzen könnte. Doch
besser, gleich zu einer Inschrift überzug
auf die ich mich zugleich als topographi
Anhaltspunct stützen darf. Dies ist die
vom Eingange in die Sternwarte in den
eingegrabene (Gr. d. B. 0,09—0,10):

HIEPON
NYMΦ(
ΔEMO

Da die Anfangsbuchstaben der 3 Wörter
einander stehen, kann an eine Ergänzun
dem 3ten, wie Bursian Phil. IX, 639 Anm.
nicht gedacht werden. Diese Inschrift un
noch grösserem Rechte jene Horosinschrif
man gewiss vor die Zeit der τριάκοντα
für deren Zeit Plutarchs Geschichtchen ein
legung der Pnyx anzudeuten schien. E
wenig hindern mich die Ansichten Anderer
die Nympheninschrift daran, aus ihr den S
auf unmittelbare Nähe der Volksvers
lung zu machen.

2.

Das Bema.

Die Stellen der Alten, in denen das
der Pnyx ein λίθος genannt wird, sind bek
einige »schlagende« bei Ross a. a. O. S. 9.
Altar auf der sog. Pnyx nennt Welcker
(44) mit Recht zu gross und zu stolz für
λίθος ἐν Πνυκί. Ueber den λίθος ἐν τῇ
den Leake als Merkzeichen der Pnyx her
verweise ich auf E. Curtius Att. Stud. II,
Anm. Derselbe schliesst das. I, S. 56,
auch viele Andere gethan, aus den früh

sprochenen Worten des Plutarch auf die Möglichkeit, dass das *βῆμα* beweglich war. Am besten nimmt man wohl gleich an, dass es rund war. Für die Lage des *βῆμα* sind ausser der angeführten Stelle der Ecclesiazusen noch folgende wichtig. Erstens Equ. 311—314:

ΧΟΡ. — ὅσους ἡμῶν τὰς' Ἀθήνας ἐκκεκώφηκας βοῶν
κἀπὸ τῶν πετρῶν ἄνωθεν τοὺς φόρους ὑννοσκοπῶν.
ΚΛ. οἶδ' ἐγὼ τὸ πράγμα τοὔθ' ὅθεν πάλαι κατ-
τύεται.

Aus dieser Stelle hat Ross a. a. O. S. 1 schliessen wollen, dass das versammelte Volk von den Steinen der Pnyx von oben herab nach den Staatseinkünften spähe wie nach Thunfischen, nach deren Ankunft man von felsigen Vorgebirgen oder von hohen Warten herab am Strande aussah. Gegen diese Erklärung habe ich nichts weiter einzuwenden, als dass nicht vom Volke sondern vom Redner die Rede sein muss, dessen *βῆμα* hoch über der Volksversammlung schwebte. Welcker a. a. O. S. 326 (64) fg. sagt mit Beziehung auf dieselbe Stelle: »Man konnte vom Rednerstuhl aus auf die Zolleingänge (Welcker liest *πόρους*), also doch wohl auf das Piräische Thor (und das vom Museion aus?) hinausspähen. — Das *ἄνωθεν*, bezüglich auf die Zölle unten, wie das nicht selten vorkommende *ἀναβαίνειν εἰς τὴν ἐκκλησίαν*, oder bei Demosthenes *πᾶς ὁ δῆμος ἄνω καθῆτο*, gibt keine Bestimmung ab. Denn in dem obern Theil der Stadt war jedenfalls die Pnyx belegen, seitdem entweder Enge des Raumes oder der Lärm und Handelsverkehr des Marktes, die wohl in gleichem Verhältniss mit der Geschäftsthätigkeit der Bürgerversammlung zugenommen hatten, nach Solon, vielleicht unter Klisthenes, sie in den stilleren Stadttheil überzusiedeln veranlasst

hatten, und Oberstadt und Unterstadt wa
gewöhnliche Unterscheidung«. Sowohl in sp
licher als in sachlicher Beziehung ist es rat
die oben gegebene Erklärung dem künstl
Erklärungsversuche vorzuziehen. Das hü
frische Bild des Dichters verlöre alle I
wenn man Welckers Erklärung annehmen m
Die andern findet, wenn sie deren noch l
fen sollte, eine passende Erläuterung dur
nige andere Stellen des Arist., ebenfalls i
Equ. Auf dem Siegel des Kleonymos steht
Agorakritos Vs. 956 sagt: *λάρος κεχηνὼ*
πέτρας δημηγορῶν. Es ist sehr nachlässig,
Ross a. a. O. aus Vergleichung mit Vs
schliesst, dass hier das Volk auf der Pny
einer Raubmöve verglichen werde, die mi
gesperrtem Schnabel auf einem Felsen sitze
ist ja ganz bestimmt von dem albernes
dem Volke vorschwatzenden Redner gespro

Um zu zeigen, dass der Redner übe
Volksversammlung stand, benutze ich dr
Arist. Vesp. Vs. 34 ff., wo ein solcher *δημη*
mit einer *φάλαινα πανδοκεύτρια, ἔχουσα*
ἐμπεπρημένης ὑός verglichen wird. Das,
von der Stimme Kleons gesagt ist, erinne
die Uebungen, die Demosthenes zur Kräft
seiner Stimme vornahm, um, wie schon
hervorhob (Top. Ath. 2. A. D. Uebers.
zum Sprechen in der Pnyx tauglich zu w
Man kann ja glauben, dass die Stelle des
ners besser unter den ansteigenden Sitze
Zuhörer angesetzt werde; ganz unbestreitb
aber die Thatsache, dass man von dem
meiner Pnyx (s. u.) sehr verständlich und
zu grosse Anstrengung zu dem unten lage
Volke sprechen konnte. Gegen diese That
muss das theoretische Räsonnement aufge

werden. Die Aristophanischen Stellen lassen die hohe Lage klar hervortreten. Alle drei Vergleiche wären ohne Witz, wenn man an ein unter dem Volksversammlungsraume befindliches Bema denken müsste, erhalten aber erst ihre rechte Wirkung, wenn man die Stelle des Bema über der Volksversammlung ins Auge fasst. Diese ist auf dem Ostrande des sog. Nymphenhügels gerade über dem von mir der Volksversammlung angewiesenen Platze unzweideutig erhalten. 25 Meter von der nächst liegenden nordwestlichen Ecke der Sternwarte unterwärts ist auf dem Rande des Hügels eine becken- oder wannenförmige Aushöhlung im Felsen. Eine dem darin Stehenden und nach dem Platze 9 Meter darunter Schauenden z. R. in den Felsen eingehauene Rinne (br. 0,20) hatte offenbar die Bestimmung, eine Abgrenzung, vielleicht aus Holz, zu tragen. Der Durchmesser dieser sorgfältig ausgehauenen Höhlung beträgt etwa 2,20, die Tiefe von der Rinne gerechnet 1,60. Hier stand nach meiner Ansicht der λίθος, von dem Demosthenes zum Volke sprach, begeistert von seiner Liebe zur Freiheit, begeistert aber auch von der Schönheit seines Landes, auf welches er von jener Stelle aus mit dem gerechten Stolz der Hellenen hinweisen konnte. Denn vor ihm lag die Ebene und die Stadt mit ihren ewigen Denkmalen und ewig denkwürdigen Sitzen der Gottesfurcht und der Gerechtigkeit, hinter ihm das Meer mit Salamis, dem Zeugen hellenischer Tapferkeit und Entschlossenheit*).

*) [So sehr ich mich dahin neige, der Lollingschen Ansetzung der Pnyx vor den bisherigen den Vorzug zu geben — die Nachweisung einer künstlichen Mauer auf dem Nymphenhügel, welche der Verfasser nach dem oben S. 487, Anm. von mir Bemerkten schuldig geblieben ist,

B. Die Apollogrotte der Akropolis vo

Mit Recht bemerkt Göttling in sei
handlung: »Die Apollogrotte der Akrop

macht, so viel ich sehe, keine Schwierigkeit —
wenig kann ich mich mit dem oben im Text
Bema und die Orientirung der Sitzreihen G
befreunden. Die Stellen des Aristophanes (v
wir die aus den Wespen nebst dem darüber
lieber wegwünschten) haben auch nicht die min
weiskraft für den Umstand, »dass der Redner
der Volksversammlung schwebte«. Dieser stan
τρῶν ἄνωθεν und ἐπὶ πέτρας auch wenn er unte
Volksversammlung seinen Platz hatte, insofern
λίθος, auf welchem er stand, doch immer auf
gelegenen Pnyxfelsen sich befand. Wenn die
des βῆμα oberhalb der Volksversammlung uns
Betreff der früher sogenannten Pnyx befremde
der beredten Auseinandersetzung von Bursian
a. a. O. S. 633 fg., so nehmen wir an ihr hi
des Platzes auf dem Nymphenhügel noch mehr
Sie widerspricht aller Analogie und ist deshalb
vornherein unwahrscheinlich. Dass die Stelle
Acharnern Vs. 32 zunächst zu der Annahme führ
derjenige, welcher sich auf der Pnyx niederliess
Redner zu hören, habe das Gesicht wesentlich d
zugekehrt, ist schon oben S. 477, Anm. an
Dasselbe folgt aus der Stelle Plutarchs im Th
C. XIX, wenn unsere Besprechung derselben S. 476
im Wesentlichen das Richtige trifft. Wenn
Lolling im Obigen sich den Gelehrten anschliess
aus dieser Stelle den Schluss zogen, dass das
weglich gewesen sei, so ist mir das nach de
Auffassung der Stelle Plutarchs durchaus
lich. Es konnte sich mit nichten um ein
Umdrehen des an der früheren Stelle stehen bl
Bema, sondern es musste sich um ein vollständi
setzen des Bema handeln, wobei selbstverständl
der Zuhörerraum eine andere Orientirung
musste. Dass der Ausdruck ἀπαστρέφειν eine s
deutung haben kann, bedarf keines Beweises. W
möchte ich hinsichtlich der angenommenen B

Athen« (Ges. Abh. Bd. I. S. 100 ff.), dass die

keit des Bema bemerken, dass es mir wenigstens auch an den nöthigen Analogien und an der Einsicht in die Nothwendigkeit, ja selbst in die Zweckmässigkeit derselben gebricht. So wankt der Grund, auf welchen der Verfasser zunächst seine Ansicht baut, dass das Bema rund gewesen sei. So viel ich weiss, fehlt es auch dafür an Analogien, welche vielmehr für eine quadratarische Form, namentlich für die eines Oblongum sprechen. Auf ein solches führt auch die weitere Betrachtung der oben S. 485, Anm. berücksichtigten Stelle in Aristophanes' Ekklesiazusen. Die Sitze, welche das Weib *H* einnehmen soll, hat man sich ohne Zweifel nicht als einen nach dem Bema hin offenen Halbkreis ausmachend, sondern, wenn sie einen Halbkreis bildeten, als nach dem *πρῶτον ξύλον* orientirt, am allerwahrscheinlichsten aber als in einer graden Linie liegend zu denken. Eine solche Reihe von Sitzen, dicht an die Vorderwand des Bema gestellt, schliesst sich demselben unmittelbar und, so zu sagen, organisch an. Der Sitze waren aber mehrere als ein Paar: nach unserer obigen Berechnung wenigstens 8. So viel braucht allerdings das Weib *H* nicht; es soll aber auch nur einige von den Sitzen (*ἕδρας*), nicht alle (*τὰς ἕδρας*) einnehmen. So ergiebt sich eine nicht unbeträchtliche Breitendimension des Bema. Dass dieses aber auch in der That von ziemlich bedeutender Ausdehnung gewesen sein muss, hat schon Bursian im Philol. S. 634 fg. durchaus wahrscheinlich gemacht. Wie wenig Hrn. Lollings Annahme hinsichtlich des Bema auch in anderen Beziehungen zu der Stelle in den Ekklesiazusen passt (deren Wichtigkeit für die betreffende Frage auch von seinen Vorgängern, so viel mir bekannt, ganz übersehen ist), bedarf nach dem oben S. 486 fg., Anm. Bemerkten keiner weiteren Auseinandersetzung. Auch die Stelle des Aeschines de fals. legat. p. 260 steht entgegen; wie konnten die *πρόεδροι* leicht *ἐπὶ τὸ βῆμα* gelangen, wenn dieses an dem Platze lag, welchen der Verf. ihm anweis't? Endlich, auch angenommen, dass dass *βῆμα* rund und drehbar gewesen wäre — welche beiden Umstände ohne Zweifel nicht statthatten —, so leuchtet doch nicht ein, warum es gerade jener becken- oder wannenförmigen Aushöhlung für dasselbe bedurfte. Somit bleibt das *βῆμα* noch nachzuweisen. Es würde sehr erwünscht sein, wenn die archäologische Gesellschaft zu Athen, die sich schon

genannte Grotte »von besonderem heilige
teresse für die Athener gewesen, zugleich
auch »für einige Bestimmungen der To
phie des alten Athens« wichtig sei. Au
sen Gründen hätte dieser interessante
eine genauere Untersuchung nöthig gehal
ihm bis jetzt zu Theil geworden ist. G
ist eigentlich der Einzige, der sich ernstli
dieser Frage beschäftigt hat, und doch
man auch ihn nicht von jeder Ungena
freisprechen, wie sich unten ergeben wird

Bevor ich zu der eigentlichen Untersu
übergehe, muss eine Vorfrage erledigt w
Wenn nämlich die zuletzt von Bursian (
v. Griech. I. S. 294) ausgesprochene A
richtig wäre, dass die Apollogrotte m
Pansgrotte identisch sei, wären wir jed
tersuchung überhoben, da Niemand dara
feln kann, dass die Pansgrotte die hochge
Grotte, an d. NW.-Ecke der Akropolis i
ren Wände ganz bis oben mit kleinere
grösseren Nischen für Votivplatten a
sind. Diese Ansicht stützt sich aber,
ich weiss, nur auf eine verderbte Ste
Pausanias, bei dem I, XXVIII, 4 in de
ten: *καταβᾶσι δὲ οὐκ ἐς τὴν κάτω πόλι
ὅσον ὑπὸ τὰ προπύλαια, πηγή τε ὕδατός
πλησίον Ἀπόλλωνος ἱερὸν ἐν σπηλαίῳ.
δὲ Θυγατρὶ Ἐρεχθέως Ἀπόλλωνα ἐνταῦθα
νέσθαι νομίζουσι*, Musurus nach *ἐν σπηλα*
einen Zusammenhang mit dem Folgende

so manichfache Verdienste erworben hat, an
Hrn. Lolling den Plätzen für das versammelte
gewiesenen Stelle eine Ausgrabung veranstalte
zumal da dieselbe, allem Anschein nach, ohne zu
Aufwand zu erfordern, ein Resultat irgendwel
ergeben würde].

zustellen, die Worte *καὶ Πανός* eingeschoben hat. Wie die nach *νομίζουσι* in den Handschriften befindliche Lücke auszufüllen sei, muss dahin gestellt bleiben; dem Sinne nach richtig ergänzt Göttling: *ἐγγὺς δὲ τὸ τοῦ Πανὸς ἄντρον.* Er nimmt also an, dass zuerst die Klepsydra, dann die Apollogrotte, an dritter Stelle das Paneion erwähnt werde. Vielleicht aber hat Bursian die flache Aushöhlung vor dem Eingang zur Klepsydra nicht für passend erachtet als Geburtsstätte des Ion betrachtet zu werden, und sich darum nach einer tieferen umgesehen, ohne eine andere als die Pansgrotte zu finden. Dass aber die Pansgrotte von der des Apollon verschieden ist, geht aus den unten angeführten Stellen des euripideischen Ion hervor. Das hat schon C. Böttticher im Phil., Bd. XXII, Hft. I, S. 70 Anm. bemerkt.

Abgesehen von der Stelle des Pausanias ist das genannte Drama des Euripides unsere einzige Quelle. In Betreff der Geburt des Ion steht Vs. 16 (Kirchh. *τεκοῦσ' ἐν οἴκοις*) in Widerspruch mit Vs. 949. Darin schwankte die Sage wohl nicht, dass Ion in der Grotte ausgesetzt worden, wie Eur. Vs. 17, 31, 37, 350, 492 ff. 958, 963, 1400 angiebt. Die Grotte lag an der Nordseite der Akropolis, wie aus Vs. 11 ffg. [1]) u. 936 ffg., vgl. auch 492 — 506, unbestreitbar hervorgeht. Die Grotte muss selbstverständlich eine verhältnissmässige Tiefe gehabt haben und ihr Inneres den Augen der Vorübergehenden verborgen gewesen sein. Mit dieser Ueberzeugung wird ein unbefangener Leser die Erzählung der Kreusa in deren Monolog (Vs. 859 ffg.), nament-

1) Von dieser Stelle handelt Usener im Rh. Mus. XXIII (1868), S. 151 fg.

lich Vs. 873 fg. *εἰς ἄντρου κοίτας . . . .*
verstehen. Dasselbe lässt sich aber mit
Gewissheit aus Stellen, wie Vs. 348, 505,
schliessen, in denen die Grotte zu einem Sch
winkel für wilde Thiere (*θῆρες*) gemacht
Zugleich aber darf die Grotte nicht zu tief
wie daraus hervorgeht, dass die Kreusa
die Raubvögel fürchtet, die das Kind zerflei
könnten (Vs. 504).

Ferner deuten die Beiworte *πετρηρεφεῖς*
1400) und *μυχώδεσι* (494, nach Tyrwhitts
tiger Conjectur), welche den *Μακραῖς* ge
werden, auf schroff überhangende Felsen.
bei ist vorausgesetzt, dass *Μακραί* der
der Grotte war, wie man Vs. 11 ffg. vers
muss, ohne Euripides einer Ungenauigke
beschuldigen. Endlich muss die Apollo
in der Nähe der Paneion gelegen haben
zwar von diesem aus in der Richtung nach
Agraulion hin. Darum werden die *στάδια χ*
πρὸ Παλλάδος ναῶν erwähnt (Vs. 497 fg.).
Lage der Paneion in der Nähe der *M*
giebt V. 938 mit bestimmten Worten an.

Die hiermit vollendete Zusammenstellun
einzelnen topographischen Andeutungen
uns zur Auffindung der Grotte leiten.
Ungenauigkeit in ihrer Benutzung konnt
der jetzt herrschenden Annahme führen, w
man seit Göttling, aber nicht mit Göttlin
Apollogrotte in der flachen Felsnische am
gange der Klepsydra wieder erkennt.

Diese Grotte liegt 1. nicht an der Nor
der Akropolis, sondern an ihrer Westseite.
hat nun freilich gemeint, dass die Grot
den Nordfelsen der Akropolis läge. Ob
einige Stellen des Ion zu der Annahme
ten zu können scheinen, dass die Nordseit

Akropolis *Μακραί* geheissen habe, und obgleich diese offenbar die Frontseite des Burgfelsens ist, darf man dieser Annahme doch nicht beipflichten. Einmal wird in jenen Stellen nur von der Grotte und ihrer nächsten Umgebung gesprochen, und zweitens begreift man auch, trotz der versuchten Erklärungen, nicht, wie Göttling bemerkt hat, »warum gerade diese nördliche Seite die langen Felsen genannt werden soll, da die südliche Felsenseite wenigstens eben so lang, eigentlich noch länger, von Westen nach Osten sich hinzieht«. Die Bezeichnung einer Seite der Akropolis durch »lange Felsen« kann ich durchaus nicht treffend finden. Aber auch angenommen, dass die Nordseite der Akropolis *Μακραί* geheissen habe, so dürfte man diese Bezeichnung jedenfalls nicht von dem NOpuncte bis etwa zur Pansgrotte ausdehnen, weil bereits eine ziemliche Strecke vor dieser die Nordseite der Akropolis nach SW. einbiegt[1]), der übrige Theil des Burgfelsens an dieser Seite aber sehr zerklüftet ist. 2. hat die vermeintliche Apollogrotte eine so geringe Tiefe, dass die obigen Bestimmungen durchaus nicht zutreffen. Freilich hat C. Bötticher einen Ausweg gefunden, indem er a. a O. S. 84 ff. zu einer bildlich-allegorischen Erklärung seine Zuflucht nimmt. Der erwähnte Aufenthalt der *θῆρες* in der Grotte

1) Hier auf dieser Ecke stiegen, wie ich annehme, der Aglaurosgrotte gegenüber, nach Herodot *θ*, 53 die Perser auf die Burg. Hier endete auch wohl das Pelasgikon, das sich weiterhin unter dem Paneion hinzog. Gewiss ist es auch die Stelle, welche Leake, Topogr. v. A. S. 193, im Sinne hatte, obgleich die Ansetzung des Agraulion gerade hier dagegen zu sprechen scheint. Die Ersteigung ist sehr schwer.

fordert nicht weniger als der Mythos, die
Gestalt einer *φωλεά* zu vindiciren.

Endlich liegt die Böttichersche Apoll
(über Göttling's Ansicht wird weiter un
Rede sein) zwar in der Nähe der Pan
aber nicht in der Richtung nach dem Ag
hin, wie ich wegen der oben angeführte
des Euripides annehme.

Ich habe soeben die Ansicht, dass die
Felsennische bei der Klepsydra die Apoll
sei, Bötticher zugeschrieben. Göttling
nämlich erstens, weil diese Grotte nach
schaut, zweitens, weil sie sehr flach ist
nommen, dass »nach Euripides Zeit we
Namens der Apollogrotte die Scene z
Apollo und Kreusa dahin versetzt sei u
ser veränderten Sage Pausanias gefolgt
scheine«. Darum versetzt G. die *σννο*
die Aglaurosgrotte, die kaum 30 Schri
der Pansgrotte entfernt und sehr dun
Diese münde auf die Akropolis. Ihre M
oder Oeffnung meine auch Aristoph. Lys.
wo er die Lysistrate sagen lasse, dass e
Frauen, welche sich von der Akropolis
stehlen wollen, von ihr betroffen worde

διαλέγουσαν τὴν ὀπὴν
ἣ τοῦ Πανός ἐσιι ταὐλίον.

Darin hat Göttling wohl Recht, dass di
zur (wahren) Apollogrotte gehörte, aber
ist doch die Zumuthung, dass wir an di
von Paneion und Aglaurion glauben
Und durch welches Mittel sucht Göttli
Wunder zu bewirken? Durch die Versic
dass die Entfernung »kaum dreissig S
betrage. Hätte Göttling eine Karte de
polis darauf hin angesehen, wenn sein G
niss ihm einen solchen Streich spielen kon

würde er diese Angabe, auf welche z. Th. seine Vermuthung gebaut ist, leicht haben berichtigen können. In Wirklichkeit beträgt die Entfernung etwa 70 Meter, wie Bursian, a. a. O. S. 294 angiebt. Aber auch bei einer Entfernung von 30 Schritten hätte Aristophanes gewiss nicht den angeführten Ausdruck gebraucht. Die Oeffnung des für das Aglaurion erklärten Felsenspaltes liegt bedeutend hinter den Propyläen, die Pansgrotte aber vor derselben. Ich kann hier auf die für die Frage, wie der alte Aufgang der Akropolis gewesen, so sehr wichtige Stelle nicht näher eingehen. Es wird sich unten zeigen, dass die *ὀπή*, welche Aristophanes erwähnt, sich wirklich bei dem Paneion befand.

C. Bötticher a. a. O. hat nun einen Theil der Göttlingschen Abhandlung, nämlich die Identificirung der auch auf Michaelis' Plane angegebenen Grotte beim Eingang der Klepsydra mit der Grotte des Apollon herausgegriffen und ihre Lage mit den oben angeführten topographischen Andeutungen in Einklang zu bringen gesucht. Wie wenig ihm dies gelungen ist, geht bereits aus dem Gesagten hervor. Leider haben auch Wachsmuth, Rh. Mus. Bd. XXIII (1868) S. 26, und E. Curtius Erl. 7. S. 24 ohne weiteres auf (Göttling und) Bötticher verwiesen, »durch deren Untersuchungen (nach Wachsmuth) mit vollständiger Sicherheit die Apollogrotte in der Höhle erkannt sei, die an der westlichen Ecke des nördlichen Felsabhanges der Burg gelegen selbst nach Westen schaue«. Wachsmuth geht a. a. O. S. 56 noch einen Schritt weiter, indem er dieser Grotte den Namen *Πύθιον* giebt und sie in der Frage über den panathenäischen Festzug heranzieht. Da ich darauf nicht weiter eingehen kann und die richtige Bestimmung

des von den Alten *Πύθιον* genannten
thums einer eingehenderen Untersuchu
darf, beschränke ich mich auf die Beme
dass die Angabe der Hafenstation des P
näenschiffes beim Areopag nach dem
muth'schen neuen Pythion unerklärlich is
wiss wäre, wenn jene Station nach ein
liebigen Orte an der Akropolis bestimmt
sollte, die Klepsydra mehr dazu geeignet,
aus dem Grunde, weil sie dem Areopag
liegt. Aus dem Culte aber kann doc
Grund hergenommen werden, weshalb Phi
v. soph. II, 5 lieber die Grotte als di
psydra nannte. Uebrigens verstehe ich die
κομιζομένην ὑπ. τ. Π. wie u. A. Bursi
Mus. XXIII. S. 300.

Ich schliesse hiermit den negativen Th
Untersuchung und gehe jetzt zur Besti
der wirklichen Lage der Apollogrotte üb
ist oben die Ansicht Göttlings in der vo
ticher modificirten Form namentlich a
Gründen gemisbilligt, welche bereits G
gegen die Ansetzung des Apolloheiligth
der Felsnische beim Eingange der Kl
geltend machte. Nun findet sich, freilic
vorgewälzte Steinblöcke verschlossen und
schwer, aber doch nicht minder sicher e
bar, eine solche Höhle in den nördlichen
der Akropolis, kaum 8 Meter von der
Pansgrotte entfernt. Die Felsenwand,
cher sich diese befindet, stösst mit der
der Höhle, welche für die des Apollon
werden muss, ung. rechtwinklicht zus
Sie befindet sich in einem etwas vorspri
Felsen der Akropolis. Man sieht, wie
der euripideische Ausdruck (Ion, vs 49
wo von einer den *δακτύλματα Πανὸς πα*

ζουσα πέτρα die Rede ist. Der Eingang ist, wie gesagt, durch die vorgewälzten Felsenstücke verschlossen, und man kann jetzt nur in die Höhle gelangen, indem man sich durch eine 0,80 Meter hohe, 1,30 Meter breite, gewiss neuere Oeffnung hineinzwängt. Dass dieses Loch für den Eingang zu einem Heiligthume zu klein ist, leuchtet von selbst ein. In unserer Zeit benutzt es nur die athenische Jugend, die sich noch jetzt gern in dieser nicht sehr grossen Höhle versteckt, wie ich mehrmals zu beobachten Gelegenheit hatte. Der alte Eingang war von der Ostseite. Vor ihm sind noch wenigstens 4 Nischen für Votivreliefs im anstossenden Felsen erhalten. Drei davon liegen neben einander, das 4te unter dem 3ten. Die erste Nische ist 0,28 Meter breit, 0,14 lang, die 2te hat einen Durchmesser von 0,15, die dritte ist 0,50 lang, 0,32 breit, die vierte darunter 0,13 l. u. br. In den Wänden ferner, die den in alter Zeit von der Ostseite Eintretenden zu beiden Seiten lagen und eben den Eingang bildeten, sind noch jetzt ebenfalls solche Nischen erhalten. Die halbdunkele Höhle wird durch einen mächtigen unten immer breiter (hier 4—5 Meter) werdenden, wie durch Poseidons des Erderschütterers Dreizack entstandenen Felsenspalt gebildet, der oben durch aufgemauerte Stein- und Marmorstücke verschlossen ist, dort also nicht mehr eine ὀπή hat, wie Aristophanes eine neben dem Πάνειον erwähnt. Die Höhe des Felsenspaltes oder der Grotte beträgt 8 — 10 Meter. Da sie unten nur etwa 4—5 Meter breit ist, kann ihre Gestalt nicht besser bezeichnet werden, als durch die Bezeichnung: lange Felsen. Die Länge (Höhe) dieser Wände tritt nämlich um so deutlicher hervor, als die Breite

der Höhle nur verhältnissmässig gering ist.
angeführten Votivnischen beweisen, dass
an diese Höhle in der alten Zeit ein Cult kn
Es ist auch nach dem Obigen klar, dass
Apollogrotte sein muss. Sie allein erfüll
Bedingungen, die wir oben stellen mu
Dem im Alterthume von der Burg herabst
den Reisenden fiel dieser Fels nach der
psydra zuerst in die Augen, dann das Pa
In dieser Reihenfolge zählte sie darum
Pausanias auf [1]). In der vor *καθὸ* anzune
den Lücke bei Pausanias kann übrigen
sagt worden sein, dass das Paneion »wie
der Areopag« von der Apollogrotte nach W
hin lag.

Wie steht es nun zum Schluss mit den
staben *ΠΟΛ*, die Göttling in der vermeint
Apollogrotte gefunden? Ich habe nicht
eine solche Nische dort gefunden. Gö
Phantasie sah hier also mehr als er wusst
rade so wie auf der sog. Pnyx (*ΠΝΥΞ*)

C. Die Lage des Metroon in Athen

Bei dem grossen Schwanken, das sich
ziehung auf die Anordnung der Marktge
in den topographischen Arbeiten bis
neuere Zeit hinein findet, kann es nicht
der nehmen, dass auch das Metroon bald
hin bald dorthin gerückt wird. Jenes Sc

1) An der östlichen Seite der Pansgrotte hat
in geringer Entfernung 8 in den Felsen gehauen
entdeckt, die nach seiner Meinung einen alten
zur Akropolis andeuten könnten, welcher vor der
tung der Propyläen durch Pericles hier gewes
(Stuart u. Rev. D. Alterthümer von Athen, d
Ausg. I. S. 247).

ken rührt besonders daher, weil die Grenzen der athenischen Agora noch immer nicht sicher fixirt sind. Neulich hat sogar ein um die athenische Topographie wohlverdienter Mann, P. W. Forchhammer in Kiel, seine in der Topographie Athens ausgesprochene Ansicht von der Lage des Marktes, welche man längst beseitigt glaubte, zu wiederholen gewagt und die Ansetzung der neuen Agora nördlich vom Areshügel als blosse Erfindung zurückgewiesen. Das ist sie nun keineswegs, sie gründet sich vielmehr auf sichere Indicien, deren Zusammenstellung man freilich nirgends findet. Für das Metroon aber im Besondern ist eine genaue Fixirung noch nicht versucht worden. Die zum Theil sehr zweifelhaften Funde von Inschriften bei der Kapelle Hypapanti gestatten keinen sichern Schluss auf den ursprünglichen Aufstellungs- und Aufbewahrungsort derselben; andererseits darf man aber doch als wahrscheinlich annehmen, dass das in ihnen erwähnte Buleuterion, mit dem nach Pausanias nahe liegendem Metroon und der Tholos, ferner die gleichfalls erwähnte Zeushalle in nicht zu grosser Entfernung, also gewiss nördlich vom Areopag gelegen habe.

Es ist dies aber, wie gesagt, kein unanfechtbares Zeugniss, weil jene Inschriftsteine jedenfalls verschleppt sind und durchaus nicht ausgemacht werden kann, ob aus geringerer oder grösserer Ferne, wenn man für Ersteres vielleicht auch geltend machen darf, dass die Inschriften aus zusammenliegenden Gebäuden stammen. Dieses zweifelhafte Moment können wir indess auch auf sich beruhen lassen, weil es bessere Beweismittel giebt.

Am klarsten zeigt die Formation des Terrains, welches sich am Fusse der bisher Nymphenhü-

gel genannten Pnyx ausdehnt, wo in der
zeit Athens der Markt gelegen habe. Die
tigste Stelle für die Annahme, dass de
Theseionhügel der Kolonos Agoraios sei,
in meinem Aufsatze über die Pnyx beha
nämlich das Schol. zu Aristoph. Av. vs.

Ferner kann Pausanias seine Stadtbe
bung nur von einem nördlich vom Nymp
gel gelegenen Thore ausgehen lassen, w
vom Thor (durch Melite) in den Kera
führenden Säulenhallen, wie das felsige,
sene Terrain zeigt, weder in der Senkun
schen Museion und Altarhügel noch an de
seite der Felszunge der Hagia Marina ges
haben können. Da nun die von dem n
von der Pnyx gelegenen Thor ausge
Säulenhallen nicht durch die Enge zw
Areopag und dem Ausläufer der Pnyx g
haben können, weil erstens dieselben ein
unglaubliche Länge erhielten und zweiten
Himerios orat. III, 12 der zwischen den
laufende Weg herunterlief [1]), mussten si
nach dem sog. Theseionhügel gerichtet g
sein. Sie liefen aber dem Markte zu.

1) Die neulich (Phil. XXXIII, Heft I, S. 2
Forchhammer wieder vorgebrachte Ansicht, das
Stelle des Himerios die *καταβασις* des Weges
die Senkung desselben von der Burg herab bezie
den Worten des Schriftstellers Gewalt an.
spricht nur von dem Theile des Weges, soweit
dem Thore aus (*ἄνωθεν*) die *παραπεταμένας στοὰς*
schneidet. Dann, fügt er hinzu, wird das Pep
zum Burgfelsen der Pallas hinaufgebracht. Ob
das *σκάφος* über den Markt gegangen, brauchte
ausdrücklich zu bemerken. Die dem *δρόμος* ge
Prädicate *λεῖος καὶ εὐθυτενὴς καταβαίνων* kön
möglich dem steil abfallenden Aufgang zur Bur
passt werden.

Nicht so günstig wie für die Westgrenze sind die Zeugnisse für die Ostgrenze der Agora. Für die Feststellung derselben giebt es nur einen unbestreitbaren Anhaltspunkt, nämlich die Lage der Orchestra mit den Statuen der Tyrannenmörder. Arrian de exp. Alex. III, 16 sagt von ihnen: *νῦν κεῖνται Ἀθήνησιν ἐν Κεραμεικῷ, ᾗ ἄνιμεν ἐς πόλιν* (d. h. *ἀκρόπολιν*), *καταντικρὺ μάλιστα τοῦ Μητρῴου, οὐ μακρὰν τῶν Εὐδανέμων τοῦ βωμοῦ.* Sie befanden sich also im Kerameikos da, wo man zur Burg aufsteigt. Es kann nun nicht der geringste Zweifel entstehen, wo dieser Aufgang zur Burg gewesen sei. Es ist ganz ausgemacht, dass zur Zeit des Schriftstellers die Stadt Athen wesentlich im Norden von Areopag und Akropolis lag. Wenn nun von einem Aufgange zur Burg gesprochen wird, so ist ja offenbar der gewöhnliche gemeint, und dieser führte doch sicher aus dem Folaki genannten Stadttheile zwischen Areopag und Akropolis zur letzteren hinauf. Auf diesem Wege also kam man nahe an den Tyrannenmördern vorbei. Diese standen, wie Arrian sagt, im Kerameikos. Dass sie, genauer genommen, zum Markte gehörten, wissen wir aus andern Zeugnissen (Arist. Eccles. 681, Arist. Rhet. I, 9, 38, Lucian Parasit. 48). Um nun dem Markt keine zu ungebührliche Länge (und Grösse) zu geben, hat U. Köhler im Herm. VI. S. 95 angenommen, dass die Worte des Arrian zuerst im Allgemeinen das Südende der Agora, dann genauer die Lage der Orchestra durch die nahe und gegenüber liegenden Bauten angeben sollen. Weil er nun sah, dass weder Metroon noch Eudanemenaltar genau fixirt worden sei, liess er sich durch die Terrainverhältnisse leiten und identificirte die Athanasiosterrasse mit der alten

Orchestra, weil sie zum Vergleich mit dem
platz des Chors im Theater gleichsam
fordere. Dass auf dieser Orchestra jemal
chöre getanzt hätten, leugnet Köhler
gegen Wieseler (De loco, quo ante th.
Athenis a. s. l. sc.), dem sich Bursian
Curtius angeschlossen hatten, und zwar a
Grunde, weil davon in der Literatur etwa
liefert sein müsste. Ohne diese Frage er
den zu wollen, bemerke ich nur, dass je
rasse für Evolutionen grösserer Chöre
Raum genug bietet, die vorauszusetzend
schauer aber schwerlich sehr zahlreich g
sein könnten. Aus beiden Gründen mü
befremden, wenn man wirklich wegen ei
bekannten Ursache die Athanasiosterra
jenen Zweck gewählt hätte. Entscheiden
ist die Lage derselben. Die Worte ἢ ἄν
πόλιν sehen nicht danach aus, dass sie
Südende des Marktes bezeichnen sollen
Erklärung, dass sie vom Aufgang zur B
verstehen sind, muss allen als die ung
gendste gelten. Es ist nun schon oben be
dass der aus der Nordstadt hinauffü
(Haupt-)Weg gemeint ist. Es ist dies o
der Weg, den wenigstens zum Theil die
triere ging.

In der Nähe dieses Weges standen
rannenmörder auf der Orchestra. An de
nasiosterrasse aber kann jener Weg nicht
gegangen sein, die in den Worten κα
μάλιστα angedeutete Ungenauigkeit in
stimmung der Orchestra unmöglich als s
angenommen werden, dass man sich
250 Schritten beruhigen könnte, wel
Athanasiosterrasse von dem Burgaufgang
entfernt ist. Die Entfernung bleibt no

mer zu gross, wenn man auch als wahrscheinlich annehmen darf, dass der Weg vom Fusse des Einschnitts zwischen Akropolis und Areopag etwas nach dem sog. Theseionhügel oder Kolonos Misthios umbog. — Die Ungenauigkeit im Ausdrucke Arrians, die Erwähnung des auch nach E. Curtius, Att. Stud. II. S. 22, durch einen geräumigen Zwischenraum von der Orchestra getrennten Metroon liesse sich am leichtesten erklären, wenn wir Metroon und Tyrannenmörder auf zwei durch einen Zwischenraum getrennten, durch die Formation des Terrains aber doch als zusammengehörig erkennbaren Terrassen ansetzen dürften. Dazu aber sind wir, wie ich glaube, sehr wohl berechtigt. —

Für die Statuen des Harmodios und Aristogiton ist es die gewöhnliche Annahme, dass sie von den andern getrennt auch durch die Erhöhung des Terrains sich über ihre Umgebung, namentlich den davorliegenden Markt erhoben. Vgl. E. Curtius, Att. Stud. II, 22, U. Köhler, a. a. O. S. 93. Ueber die Lage des Metroon aber giebt es einige Andeutungen in den darauf bezüglichen Schriftquellen. Auch hier kommen wir am besten aus, wenn wir dasselbe auf eine Felsterrasse setzen. Dass nämlich Metroon, Buleuterion und Tholos »am Rande einer ansteigenden Gegend lagen, folgt« wie E. Curtius a. a. O. S. 21 bemerkt, »daraus, dass oberhalb derselben die Standbilder der Heroen standen, nach welchen die attischen Bürgerstämme benannt waren«. Diese Bemerkung geht auf die Periegese des Pausanias, der hier, wie ohne Bedenken angenommen werden darf, die auf der Nordseite des Areopags gelegenen Werke und Bauten durchgeht. Unter diesen darf man den Arestempel unbedenklich auf die lange, ausge-

dehnte Nordterrasse des Areopags setzen,
muthungsweise in die Nähe des Mavro
Diese Terrasse steigt von der Athanasiosk
an bis zu den Trümmern, die von der K
des Dionysios Areogagita herrühren sollen.
den Anfang dieser breiten Terrasse, deren
wand, die Nordseite des Areshügels, name
in der Strecke von der genannten Kapell
zu der bekannten Treppe neben dem Fels
mit Nischen von Votivbildern, die nach
andern Seite noch jenseits der Kapelle zu
den, reich versehen ist, dürfen wir das Me
setzen. Zu diesem nämlich geht Pausanias
πλησίον u. dgl., von ihm aber zu den
(d. h. weiterhin auf der ansteigenden Ter
aber nicht *ὄπισθεν*) gelegenen Eponymen.

Ferner hat E. Curtius a. a. O. S. 23, wi
scheint, mit vollem Rechte aus dem ältere
rathron oder Chasma geschlossen, dass da
troon, welches jenes *χάσμα τε φρεατῶδε*
σκοτεινόν des Suid. s. v. *βάραθρον* (vgl.
und Phot. s. v. *μητραγύρτης*) in späterer Ze
oder verdeckte, auf Felsgrund stand. Ich
mich indessen nicht dazu verstehen, dies C
als eine Felskluft oder -spalte anzusehen
Curtius will. Ein entschiedener Irrthum
ist es, wenn Ross im Theseion S. 44, A
an den Felsspalt der Semnä denkt. Nac
vorhandenen Andeutungen giebt nach
Meinung C. Bursian in der Abhandlung d
Ath. p. 8 die beste Vermuthung über das
sehen des älteren Barathron. Er hält
χάσμα φρεατῶδες für den gewiss wie di
phorenförmigen Behälter in den Hügeln
zu denkenden *πίθος* in den Worten *ὁ*
Μητρῴῳ πίθος, den Diogenes in den Somm
naten als Nachtquartier benutzt haben

(Diog. Laert. V, 2, 23). Es ist durchaus annehmbar, dass einer jener grossen Behälter als Gefängniss gedient habe. Wenn wir der Volks- oder Gelehrtensage glauben wollten, hätten wir am Gefängnisse des Sokrates am Museion eine passende Parallele. Ist es nun ein Spiel des Zufalls oder nicht vielmehr eine glückliche Bestätigung der bis jetzt entwickelten und begründeten Ansichten, dass gerade an jenem Anfange der Terrasse des Areopags ein solcher grosser fast ganz zugeschütteter πίθος erhalten ist? Derselbe liegt unmittelbar hinter der Kapelle des Hagios Athanasios, deren Platz im Alterthume danach also vielleicht das Metroon einnahm. Vor demselben haben wir uns dann bis zum Markte eine irgendwie eingefasste Fläche zu denken.

Metroon, Rathhaus und Tholos umfasste wie Bursian a. a. O. aus Aesch. in Ctes. § 187 entnahm und auch schon C. O. Müller, Attika S. 236, vermuthete, ein Peribolos. Dem Metroon gegenüber, etwa da, wo sich die Terrasse unweit der erwähnten Felsentreppe stark erhebt, standen dann die Tyrannenmörder. Ein wenig nordöstlich davon mag der vom Markte zur Akropolis führende Weg zu der letzteren allmählich abgebogen haben. — In der Fläche, die sich vor der kleinen Erhebung der Athanasioskapelle ausdehnte, stand gewiss der Altar, zu dem der von Timarchus und Genossen mishandelte Pittalacus floh. Hierin liegt eine neue Bestätigung für die Richtigkeit der obigen Ansetzung des Metroon, auf welche ich zum Schlusse mit einigen Worten hinweise.

Aus Aesch. in Timarch. § 60, 61 darf geschlossen werden, dass das Metroon, zu dem jener Altar gehörte, unweit des Aufgangs zur

Pnyx war. Timarch und seine Genossen
teten nämlich, dass das zur Ecclesia drä
Volk ihren Frevel erfahre. Das hat
Sinn, wenn nicht Metroon und Pnyx so
bart waren, dass die zur Pnyx eilende
menge an jenem vorbei kam, oder vielm
der Pnyx herab den Schutzflehenden im
des Metroon erblicken konnte. Da n
über dem Markte liegende sog. Nymph
die alte Pnyx gewesen sein muss, ist
setzung des Metroon auf der Erhebu
Athanasioskapelle vortrefflich geeignet
sorgniss des Timarch zu rechtfertigen.

So weit Herr Lolling für dieses M
wird denjenigen, welche an den Fors
über die Topographie von Athen Anthe
men, genehm sein zu erfahren, dass unse
fortarbeitender Landsmann laut eines
den er nach meiner Abreise von Athen a
gerichtet hat, zunächst die Lage des Pyt
bestimmen, dann nachzuweisen suche
mit welcher Ansiedlung die in Aeschyl
meniden Vs 690 fg. Dind. erwähnten Befes
werke auf der früher sogenannten Pnyx
menhängen. Es würde jedenfalls mir, v
lich aber auch Anderen erwünscht sein
er zugleich seine oben S. 470 angedeute
sichten über das sogenannte Theseion
darlegen wollte, zumal da Adler seine
der archäologischen Gesellschaft zu Be
Winckelmannsfeste des vorigen Jahres ge
Vortrag entwickelte Ansicht, dass es
ein Doppelheiligthum des Herakles und
sens handle, in der Sitzung der archäol

Gesellschaft vom 4ten Februar des laufenden Jahres motivirt wiederholt hat.

Fr. Wieseler.

Verzeichniss der bei der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangenen Druckschriften.

Mai und Juni 1873.

(Fortsetzung).

Annalen der Sternwarte in Leiden. Bd. I. u. II. 1868 1870. 4.

The transit of Venus in 1874. P. II. Washington. 1872. 4.

Giebel, Zeitschrift für die gesammt. Naturwiss. 1872. Bd. V. u. VI.

Monatsbericht der Berliner Akademie. Januar. 1873.

M. Drossbach, über die verschiedenen Grade der Intelligenz und der Sittlichkeit in der Natur. Berlin. 1873. 8.

Société des Sciences phys. et natur. de Bordeaux. Extrait des Procès-verbaux.

Borchardt, Untersuchungen über Elasticität unter Berücksicht. von Wärme. 1873. 8.

Derselbe über die Transformation der Elasticitätsgleichungen in allgemeine orthogonale Coordinaten. Berlin. 1873. 4.

Bulletin de la Soc. mathématique. T. I. Nr. 3. Paris. 1873.

Bulletin de l'Acad. roy. des Sciences de Belgique. T. 35. Nr. 4. Bruxelles. 1873.

Archiv des Vereins für Siebenbürgische Landeskunde. Bd. X. Hft. 2 u. 3.

Jahresbericht des Vereins für 1871—72.

Programm des Gymnasiums zu Hermannstadt. 1872. 4.

Programm des Gymnasiums in Schässburg. 1872. 4.

Verhandlungen der k. k. zoologisch-botanischen Gesellschaft. Bd. XXII. Wien 1872.

Sitzungsberichte der k. böhm. Gesellsch. d. W
1873. Nr. 2.
Bulletin de la Commission centrale de Statistique.
Bruxelles 1872. 4.
Archiv des histor. Vereins von Unterfranken u.
fenburg. Bd. 22. Hft. I.
Wirtembergische Franken. Zeitschrift des hist
eins. Bd. 8. Hft. 3. Weinsberg. 1870. 8.
Transactions of the Zoological Society of Londo
VIII. P. 3. London. 1872. 4.
Proceedings of the Scientific Meetings of the Zoo
1872. P. II.
H. Wild, Annalen des physik. Central-Observa
Jahrg. 1871. Petersburg. 1873. 4.
Abhandlungen der k. Böhmischen Gesellschaft d
von 1871–1872. Bd. V. Prag. 1872. 4.
Sitzungsberichte derselben. Jahrg. 1871, Jan.—D
Jan.—Juni.
Verhandelingen van het Bataviaasch Genootsch
Kunsten en Wetenschappen. Deel XXXIII u.
Batavia. 1870. 4.
Notulen van de algemeene en bestuurs — Verga
van het Bataviaasch Genootschap. Deel. VII
Batavia. 1871. 8.
K. F. Holle, het schrijven van Soendaasch m
sche letter. Ebd. 8.
Tidschrift voor indische Taal-, Land- en Volk
Deel XVIII u. XX. Ebd. 1871. 8.
Centième Anniversaire de fondation de l'Acadé
des Sciencès etc. de Belgique, T. I. u. T. II
1872) Bruxelles. 1872. 8.
J. H. Bormans, ouddietsche fragmenten
Parthonopeus van Bloys. Bruxelles. 1871. 8.
—, Speghel der Wijsheit of Leeringhe der Zalich
Jan Praet. Ebd. 1872. 8.
Mémoires de l'Académie roy. des Sciences etc.
gique. T. XXXIX. Ebd. 1872. 4.
Mémoires couronnés et autres mémoires. T. XX
A. Wauters table chronologique des chartes et
imprimés concernant l'histoire de la Belgique.
(1191–1225). Ebd. 1871. 4.
Annuaire de l'Acad. roy. de Belgique. 1872
Bruxelles. 8.

(Fortsetzung folgt).

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

23. Juli. **№ 19.** 1873.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 5. Juli.

Benfey, ásmṛitadhrû Rigveda X. 61. 4.
Wieseler, Ueber einige im Orient erworbene Bildwerke und Alterthümer.
Riecke, Ueber das Weber'sche Grundgesetz der electr. Wechselwirkung in seiner Anwendung auf die unitarische Hypothese.
Voss, Zur Geometrie der Plücker'schen Liniengebilde (vorgelegt von Stern).
v. Brunn, Zur Lehre von der Knorpel-Verknöcherung (vorgel. von Henle).

ásmṛitadhrû Rigveda X. 61. 4.

Von

Th. Benfey.

Dieser Nominativ Dualis erscheint nur einmal im Veda und auch kein andrer Casus, welcher sich regelrecht an diesen Casus schlösse. Das Petersburger Wörterbuch unter 2. *dhru* (Bd.

III, S. 1001), erklärt *-dhrû* aus einem
dhru und dieses aus *dhvar;* es übersetzt da
Wort durch »das Verlangen-Sehnen nic
schend«, augenscheinlich indem es *dhru* mi
in *varunadhrút* Rv. VII. 60, 9 identificirt
mell lässt sich diese Identification vertheidi
in den Veden das *t*, welches der Regel na
Auslaut des Thema bilden müsste, mehrfa
(vgl. z. B. *mita-dru, raghu-dru, çata-dru;*
pari-jri), Allein die Auffassung von *sn*
der Bedeutung »Verlangen, Sehnen« sche
bedenklich und dieser Beisatz der *Açvin*
Vedensprache viel zu sentimental. Au
Original Sanskrit Texts IV², 39 u. 86 ers
dass Sâyana, dessen Commentar zu diese
in der M. Müller'schen Ausgabe noch nic
öffentlicht ist, das Wort durch *asmrita*
mayi droham asmarantau glossirt, d. h.
digung vergessen habend, Beleidigung
zug auf mich nicht gedenkend«
scheinlich im Sinne von »vergessend,
böses gethan (gesündigt) habe«. Dieser
ist in der That so angemessen, dass w
grammatisch gerechtfertigt zu werden
er augenscheinlich vor der Auffassung
tersburger Wörterbuchs den Vorzug v
Die Stelle lautet im Original

krishnâ yád góshu aruṇíshu śídad divó
Açvinâ huve v
vitám me yajnám â gatam me ánnam vav
ná ísham âsmrita

»Wenn die schwarze (d. h. Nacht) un
lichten Rindern (d. h. den Morgenwolke
(d. h. im Zwielicht, der Dämmerung), da
ich euch, o Açvins! die Sprossen des H
eilet zu meinem Opfer, kommt zu meine
gleich wie nach Labung verlangende,

Vergehen uneingedenk (d. h. sie verziehen habend«).

Lässt sich diese Form *-dhrû* nun grammatisch rechtfertigen? Ich glaube vollständig. Ich habe schon an anderen Stellen Fälle genug angeführt, in denen die Veden im Nominativ Singularis noch antretendes *s* bei Themen zeigen, bei denen im classischen Sanskrit im Allgemeinen dieser Antritt verboten ist, in einzelnen Fällen aber der vedische Gebrauch auch in ihm sich erhalten hat (vgl. z. B. *avayâs* Nom. von *avayâj* ved. und classisch, eben so *purodâs* von *purodâç*). Dieses ist auch der Fall für ein Thema auf *h* nämlich *çvetavâh* (vgl. Pân. 3. 2. 71. 72 und Vârt. so wie 8. 2. 67 u. Vârt.), dessen Nominativ und Vokativ *çvetavâs* lautet. Nach diesen Analogien hätte das Thema von *druh* m. Beleidiger f. Beleidigung, im Nominativ mit dem regelrechten Uebertritt des *h* als Aspiration auf *d* *-dhrus* gebildet.

Es ist aber nichts häufiger, insbesondre in alten Phasen von Sprachen, als dass durch häufig gebrauchte oder wegen ihrer Bedeutung prominirende Casusformen Heteroklisie herbeigeführt wird; so bewirkt der Nominat. *ἔρις*, wegen seiner Uebereinstimmung mit dem der Themen auf *ι*, dass im Accusativ *ἔριν* neben *ἔριδα* gebildet wird; eben so der Nominativ *Σαρπηδών*, wegen seiner Uebereinstimmung mit dem der Themen auf *ον*, dass neben Genetiv *οντος* u. s. w. auch *ονος* u. s. w. erscheint, während es doch keinem Zweifel zu unterwerfen, dass der Mann nur einen Namen führte. Aehnliches erscheint häufig und ist ganz natürlich, da der Nominativ nicht bloss ein sehr häufig gebrauchter, sondern auch der prominirendste, gewissermassen prototypische Casus ist.

So sehen wir, dass in derselben We
Nominative *avayâs, purodâç* und *çvetavâs,*
ihrer Uebereinstimmung mit Nominativ
Themen auf *as*, bewirken, dass auch a
ihnen gehörige Casus so gebildet werden,
das Thema nicht *avayâj, purodâç, çvetavâ*
sondern als ob es *avayâs, purodâs, ç*
lautete, z. B. *çvetavo-bhyâm*, wie von
mano-bhyâm.

Ganz eben so konnte der Nominativ *
wegen seiner Uebereinstimmung mit d
Themen auf *u*, kaum umhin, auf das Sp
wusstsein den Eindruck zu machen, als
Thema auf *u* auslaute und in Folge dav
in Rigv. X. 61. 4 erscheinenden nach A
dieser Themen gebildeten Nom. Du. *ásm*
herbeizuführen.

Ueber einige im Orient erworb
Bildwerke und Alterthümer.

Von

Fr. Wieseler.

Die betreffenden Werke sind wesentl
durch von Belang, dass sie dem Bereich
chischer Kunstübung angehören oder do
Gegenden ursprünglich Griechischer Cultu
men. Alle, selbst die roh ausgeführten,
in gegenständlicher Hinsicht Interesse.
kommt, dass sie sämmtlich ganz unbekan

An erster Stelle sind die Sculpturen i
mor oder anderem Stein aufzuführen.

Unter ihnen zeichnet sich in künstl
Beziehung besonders aus ein weiblicher

aus Parischem Marmor unter Lebensgrösse (er ist mit dem wohlerhaltenen Halse 0,14 hoch), der, wie ein in die untere Fläche des Halses eingebohrtes Loch zeigt, dem Torso einer Statue eingefügt war. Die Beschädigungen, welche leider namentlich auch das Gesicht betreffen, lassen die ursprüngliche Schönheit zur Genüge gewahren. Das Werk gehört sicherlich der jüngeren Attischen Kunstschule, allem Anschein nach noch der zweiten Hälfte des fünften Jahrhunderts v. Chr. an und dürfte zunächst auf Aphrodite zu beziehen sein. Das von einer Tänia zusammengehaltene, ursprünglich hinten, wie es scheint, in einen Knauf aufgebundene Haar ist einfach angeordnet. Das Gesicht hat einen keuschen, edlen Ausdruck.

An zweiter Stelle ist der oberste, nicht weit unterhalb des Halses in schräger Richtung abgebrochene Theil einer Statuette der Hera aus weisslichem Marmor von 0,184 Höhe zu erwähnen, welcher auf Kreta ausgegraben ist. Die Göttin trägt den nach hinten vom Haupte herabfallenden Schleier und ist mit der Stephane geschmückt. Von dem mit einem Saum versehenden, gefältelten, fast bis zum Halse hinaufreichenden Untergewande ist namentlich an der linken Vorderseite der Figur noch zur Genüge zu sehen. Der wohlerhaltene Hals zeigt die für Hera charakteristische Bildung; das etwas nach links gewandte Gesicht, an welchem nur die Nasenspitze angesetzt und am Kinn etwas ausgebessert ist, mit den etwas nach oben gerichteten Augen macht entschieden den Eindruck von Stolz und Hoheit. Die Rückseite, an welcher man unterhalb des Schleiers eine Andeutung des Knaufs gewahrt, in den man sich am Hinterkopfe das

Haar zusammengebunden denken soll,
brigen nur wenig ausgearbeitet.

Dann verdient unter den mitgebrac
chen noch ein ohne den ganz abgebroch
0,07 hohes aus Asien stammendes von
Marmor, welches ursprünglich einer
eines Kriegers gehörte, besondere E
Das breite, volle bartlose Gesicht mit
viereckiger zurückliegender Stirn, etwa
Nase, welcher die mehr breiten als
Augen auffallend nahe stehen, und gross
ist das eines Barbaren. Die Kopfbede
steht in einem eng anliegenden Hel
rückgeschlagenem Visir in Form eine

Auch bei den beiden letzterwähnt
sind die Augensterne nicht im Marmor

Endlich darf unter den Rundwe
eine Statuette der dreigestaltigen H
weissem Marmor nicht übergangen w
gleich es sich nur um eine ganz ordi
aus der Kaiserzeit von sehr geringen
nen (0,135 Höhe) handelt, welche,
von anderen unbedeutenderen Beschi
durch das Abbrechen der drei Köpfe (
inzwischen die nach vorn herabfallen
flechten erhalten sind) und des oberst
des in der Mitte der drei Gestalten b
Stammes verstümmelt ist (wie sich
sonst mehrfach findet, vgl. Stephani
hende Herakles S. 273, n. 8 und 9, u
Die ant. Bildwerke im Theseion zu
106, 110, 174, um nur die zunächs
Beispiele zu erwähnen). Als Attrib
sich bei den drei Gestalten (deren G
wie regelmässig, alterthümlich geor
bei der einen nicht ganz dieselbe ist
den beiden anderen) erkennen: bei der

ovale fruchtähnliche Gegenstand in der rechten auf die Brust gelegten Hand, bei der zweiten die dicke Fackel im linken Arm, bei der dritten das nur selten, z. B. bei Stephani a. a. O. n. 8 und Taf. V, n. 3, vorkommende Gefäss zum Eingiessen in der Hand des herabhängenden rechten Arms.

Zunächst sind dann drei kleine Steinreliefs zu erwähnen, welche in die Kategorie der Votivreliefs gehören.

Unter ihnen gebührt hinsichtlich des Materials, der Arbeit (obgleich diese auch nur angelegt, nicht sorgsam im Detail ausgeführt ist), hauptsächlich aber des dargestellten Gegenstandes die erste Stelle einem 0,215 breiten und 0,188 hohen aus gutem Marmor gearbeiteten, welches durch die bogenförmige Einfassung an der oberen Seite sowie an der rechts und links vom Beschauer als das Innere einer Grotte darstellend unverkennbar bezeichnet ist. Etwa in der Mitte dieser Grotte gewahrt man einen unten abgeplatteten Felsen, auf dessen oberen Steinen Pan oder ein Pan sitzt, bartlos, in sehr jugendlicher, knabenhafter Bildung, ohne sichtbare Hörner, der, indem er dem Beschauer den Rücken zukehrt und sich mit dem linken Arm auf einen Stein stützt, das Gesicht aber im Profil nach rechts hin wendet (wohin auch das ebenfalls im Profil dargestellte rechte allein sichtbare Bocksbein gerichtet ist), in der Hand des ausgestreckten rechten Arms nach derselben Richtung hin einen Gegenstand hält, welcher schwerlich etwas Anderes sein kann, als jener blattförmige Fächer, der auf den Denkmälern der Griechisch-Römischen Kunst mehrfach zu finden ist (O. Jahn Arch. Beiträge S. 285, A. 83, Wieseler Denkm. d. alt. Kunst II, 54, 691; 56, 714 und

besonders 61, 784). Hier sitzt auf rohe
sitze und an den Felsen gelehnt in b
Haltung, die übereinandergeschlagenen B
eine aus passenden Steinen hergestellte
Fussbank setzend, ein anscheinend bis
über den unteren Theil des Körpers ge
nes Himation nacktes oder höchstens mi
durchsichtigen Chiton angethanes Weib,
in der auf das rechte Knie gelegten Rech
flache Patera hält und mit der Linken
scheint, einen Zipfel des Himation em
Der Kopf der betreffenden Figur ist e
schädigt. Indessen kann es keinem Zw
terliegen, dass sie Aphrodite darstellen s
beiden Seiten der sitzenden Figur
man je ein niedriges Altärchen und zume
rechts einen Krater am Boden stehend
schen diesem und dem einen der Altär
scheint ein ungeflügelter nackter Kna
sich nach der Aphrodite hinwendend, in d
des ausgestreckten rechten Arms einen
stand, der am meisten Aehnlichkeit m
Salbgefäss hat, und in der des linken,
linke Seite angelegten einen undeutlic
genstand hält. Endlich gewahrt man
entgegengesetzten Seite zumeist nach li
Gruppe von zwei nackten etwas grösser
ben, einem ungeflügelten und einem ge
von welchen der erstere, der mit seine
Hand eine auf seiner linken Achsel lieg
ten spitz zulaufende Amphora gefasst h
dem rechten Arm den anderen, dessen H
einer Tänia geschmückt ist, zu umfas
der Aphrodite zuzuführen scheint, wobei
flügelte den linken Arm ausstreckt und d
ten hängen lässt, indem er nach Aphro

blickt, die ihrerseits ebenfalls ihr Gesicht nach der Knabengruppe hinwendet.

Der Aphrodite Verbindung mit Pan ist zur Genüge bekannt; aber nicht eben von Bildwerken der Gattung des in Rede stehenden her. Ebenso bekannt sind Pansgrotten. Allein es sieht keinesweges so aus, als handle es sich hier um eine solche. Der Pan ist doch gewiss nur eine Nebenfigur, und es hat ganz den Anschein, dass eine Grotte der Aphrodite gemeint war. Als Höhlengöttin kennen wir nun freilich Aphrodite durch Schriftstellerzeugnisse (namentlich unter dem Beinamen *Ζηρυνθία*, vgl. sonst etwa auch Avienus Ora maritima bei Wernsdorf Poët. lat. min. 5, S. 1220, Vs. 315 fg., den Engel Kypros II, S. 536, Anm. 297 anführt); aber in dem Kreise der Bildwerke tritt uns die Göttin als in einer Höhle befindlich zuerst hier entgegen. Um welche Aphrodite handelt es sich nun hier? Das Relief stammt aus keiner der Gegenden, für welche der Cult der *Ἀ. Ζηρυνθία* bezeugt wird. Dagegen können der Krater am Boden und die Amphora auf der Achsel des einen Eros auf eine, so zu sagen, Dionysische Aphrodite führen. Und was soll die Gesammtdarstellung eigentlich bedeuten? Die ungeflügelten Knaben sind doch sicherlich als Eroten zu fassen. Soll nun der geflügelte auch ein Wesen ganz gleicher Art sein oder nicht? Nimmt man jenes, was nach der öfters vorkommenden Praxis auf späteren Reliefs jedenfalls zunächst liegt, an, so bleibt selbst unter der Voraussetzung, dass die Beflügelung doch nicht ganz unbedeutsam sein soll, das Verhältniss des betreffenden geflügelten Knaben zu Aphrodite ein Räthsel. Hinsichtlich dieses sei nur noch bemerkt, dass er den Eindruck eines Bedrückten macht,

der ungern vor die Göttin geführt wi
aber zweifelsohne nicht an die jetzt zur
aus späteren Bildwerken bekannte Be
Eros' durch Aphrodite (Hinck Annali
1866, p. 91 fg., Trendelenburg Bullett.
1871, p. 181) gedacht werden kann. Ab
wenn der geflügelte Knabe einen And
den oder einen Eros darstellen sollte, wü
so viel wir sehen, mit den jetzt zu Ge
henden Mitteln keine genügende Erklä
ben lassen.

Die zweite Stelle geben wir einen
welches auf einem oblongen Steine v
Breite und 0,255 Höhe ausgeführt ist,
ten und auf den beiden schmäleren S
erhöhter Rand umgiebt, während ders
der oberen Seite fehlt, aber möglicherw
in Folge einer Beschädigung. Dasselb
zwiefacher Beziehung Interesse: einmal
dass es, obgleich aus einer Gegend blü
Kunstübung herrührend, mit ganz ausse
licher Rohheit ausgeführt ist; dann na
in sofern, als die Darstellung eine zwis
und weiblichen Wesen vor sich gehend
lung betrifft, welche auf drei andere
bekannten Reliefs berücksichtigt wor
Das eine dieser Reliefs, welches wir nur
Abbildung in dem Werke Monumenti d
Grimani pubblicati nel anno 1831, in
t. XXII, kennen, ist auch ein Votivr
das hier zur Betrachtung kommende und
dem unteren Rande eine leider unleser
schrift. Man sieht links einen viereckige
gerecht ausgeführten Altar mit einem
daran. Ihn umgeben zwei Weiber, v
das eine links von dem Altare, das an
ter demselben steht, und Pan, von der

lichen Bildung mit Bocksbeinen, in dem linken Arm ein Pedum, in der Hand der erhobenen Rechten eine Syrinx haltend. Weiter nach rechts steht Dionysos. Pan will sich von den Weibern nach rechts hin entfernen, wird aber von dem Weibe links vom Altar an dem Zipfel seines langen Zeuggewandes zurückgehalten, während das andere Weib zu dem gleichen Zwecke, wie es scheint, den linken Arm an den Oberleib des Widerstrebenden gelegt hat und auch Dionysos den auf ihn zukommenden, welcher sich nach dem Weibe links vom Altar umschaut, mit dem ausgestreckten Arm zurückstösst. Die beiden anderen Reliefs finden sich an Krateren, wo sie je eine besondere Gruppe in grösseren Bakchischen Darstellungen ausmachen. Das eine dieser Gefässe wird im Campo Santo zu Pisa aufbewahrt. Die Darstellung ist in Gerhard's Ant. Bildwerken Taf. XLV, n. 3 und bei Lasinio Scult. d. Campo Santo tav. LXI abbildlich mitgetheilt. Von drei tanzenden Frauen, welche sich die Hände gegeben haben, fasst die zumeist nach rechts das Obergewand des sich nach dieser Richtung hin entfernen wollenden Pan, der sich in Folge jenes Umstandes auch nach den Frauen umblickt. Pan trägt hier auch im linken Arm das Pedum, unter dem Obergewande aber einen kurzen Chiton aus Zeug. Seine Bildung weicht von der des ersterwähnten Reliefs dadurch ab, dass die Beine dem grössten Theile nach menschliche sind, indem sie nur unten in Bocksfüsse auslaufen. Der andere Krater findet sich zu Neapel in dem früheren Mus. Borbonico, jetzigen Mus. nazionale. Die Bildwerke sind in dem unter dem Titel Mus. Borbonico erschienenen Werke Vol. VII, t. 9 und in Gargiulo's Recueil Vol. I, pl. 43 und 44 herausgegeben, und

kommt (R. Schöne Griech. Reliefs aus
S. 47, zu n. 88). Unter dem Sessel st
Adler, der den Kopf nach links hin un
Hier stehen vor Zeus fünf Menschen, im
grunde zwei erwachsene, vorn ein bärtig
im Himation, das die rechte Schulter nac
den rechten Arm in der bekannten Halt
Adorirenden erhebend, hinter ihm ein
dig bekleidetes Weib, sicherlich seine
der vorderen Reihe drei vollständig in d
tel eingehüllte Knabenjünglinge, die Ki
nes Paars. Auf einem Votivrelief bei
n. 105 wird ein ganz ähnlicher Zeus i
lich als Philios bezeichnet. Diesem geh
andere von Schöne herausgegebene Vot
(n. 88 und 104) parallel. Es steht zu
then, dass derselbe Gott auch auf unse
lief gemeint ist, welches — täusche ic
nicht — von demselben Orte herstamm
Schöne's n. 105. Der Adler unter dem
den ich auch sonst an derselben Stelle
in ähnlichen Reliefs Athenischer Samm
angetroffen zu haben vermeine, währen
den drei von Schöne herausgegebenen
fehlt, kann begreiflicherweise nicht ge
obige Vermuthung in Anschlag gebracht

Hiernächst mag ein geschnittener St
Intaglio von grünem Jaspis, erwähnt
Derselbe stellt auf der Vorderseite den
den strahlenbekränzten Sonnengott dar,
den linken Arm mit der bekannten Geb
Sol oriens hebt und in dem rechten, von
die Chlamys herabhängt, eine Peitsche hä
Darstellung ist ganz wohl ausgeführt, fin
inzwischen auch sonst auf geschnittenen
Eigenthümlich ist es aber dem in Rede
den, dass er auch auf der Rückseite m

eingegrabenen Darstellung versehen ist, welche ohne Zweifel Attribute des Sonnengottes betrifft. Zu oberst gewahrt man einen rundlichen Gegenstand, der allem Anschein nach als Rosenblüthe mit zwei Blättern darunter zu fassen ist; in der unteren Reihe links einen unzweifelhaften Fisch, rechts aber einen Gegenstand, den genau zu bestimmen noch nicht gelungen ist. Wäre an ein Gefäss zu denken, so liessen sich dafür Pendants von anderen Bildwerken, namentlich Münzen, beibringen.

Wir kommen jetzt zu zwei Figuren aus Terracotta.

Die eine, 0,251 hohe, stellt in etwas archaisirendem Stile den Hermes stehend dar. Der Gott trägt auf dem Kopf nicht den breitkrämpigen Petasos, sondern eine hohe ziemlich spitz zulaufende κυνῆ mit einer ganz schmalen Krämpe. Das Haar hängt zu den Seiten des jugendlichen, unbärtigen Gesichts herab. Die Bekleidung besteht in Chlamys und Chiton. Im linken Arm gewahrt man das Kerykeion. Die rechte Hand fasst das rechte Horn des Widders, dessen Körper sich längs hinter den Beinen des Gottes herzieht und so zugleich zur Stütze der Statuette dient, während der nach vorn gewendete Kopf des Thieres an dem rechten Beine des Gottes zum Vorschein kommt. Sehr deutliche Spuren röthlicher Befärbung geben dem recht wohl gearbeiteten Werke, dessen Rückseite, wie gewöhnlich, nicht ausgeführt ist und das bekannte viereckige zum Behuf des Brennens gemachte Loch zeigt, selbst unter mehreren Doppelgängern der Sammlungen Athens ein weiteres Interesse.

Die andere, 0,201 hohe, Terracottafigur ist eines jener hinten abgeschnittenen hohlen Brustbilder einer im archaistischen Stile ausgeführten, mit

niedriger Stephane auf dem ungescheit
lenförmigen Haare oberhalb der Stirn
bekannten rundlichen Ohrschmuck v
verschleierten weiblichen Göttin, welch
stellt gewesen sein müssen, dass nich
Rückseite sich an einen Hintergrund
sondern auch die unterste Partie, in d
genden Falle der oberste Theil der b
langen Halse mit einem Gewand bedeck
auf einem Untersatze stand.

Nach diesen Thonbildwerken komm
sendsten eine Vase aus Thon mit f
Darstellungen zur Besprechung. Es ha
um eine jener wesentlich aus Attische
bekannten Lekythoi, welche auf weisse
Figuren in Umrissen mit röthlicher
daneben auch bunte Colorirung in meh
ben zeigen. Das betreffende Exemplar
lich aus Bruchstücken zusammengeset
müssen und ist dabei nicht ganz ohne
gung geblieben; zeichnet sich aber d
Grösse (es ist von 0,33 Höhe) vor ma
dern aus. Auch der wichtigste Bestan
bildlichen Darstellung ist noch sehr wo
bar: zwei Frauen, welche um eine
schen Voluten geschmückte Grabstel
die links vom Beschauer tief in das Ge
gehüllt, mit gesenktem Haupte, die re
Arme zur Begleitung der Klage aus
oder erhebend.

Endlich seien noch ein paar Geräth
sichtigt.

Das eine ist eine ganz vollkommen
Strigilis aus Bronze, an welcher der
ursprüngliche Elastizität noch durchaus
hat. Wenn das Letztere auch bei and
giles der Fall ist, so hat der Griff de

stehenden ausserdem die mir nur von sehr wenigen anderen Exemplaren bekannte Eigenthümlichkeit, dass er mit einer figürlichen Darstellung in Relief verziert ist. Es findet sich nämlich an ihr, offenbar vermittelst eines Stempels eingedrückt, Pan mit langen Hörnern und Bocksbeinen, beide Arme hoch erhebend und eben im Begriff auf den Boden hinzustürzen. Diese Darstellung ist auch an sich beachtenswerth: sie findet sich meines Wissens in der Weise sonst nirgends. Vermuthlich hat man sich den Gott nicht sowohl in der äussersten Ekstase zu denken, als im höchsten Schreck. Dass das Bildwerk nur in sofern von einer besondern Beziehung ist, als es zum Fabrikzeichen dient, steht doch wohl sicher.

Das andere Geräth ist ein auf dem Museion zu Athen gefundener oben spitz auslaufender Kegel aus Thon, von der Art derer, die jetzt meist als Webstuhlgewichte gelten. So viele davon aus den verschiedensten Gegenden auch bekannt sind, erinnere ich mich doch nicht, ein anderes Exemplar erwähnt gefunden oder selbst gesehen zu haben, welches ausser der oben nicht weit unterhalb der Spitze in horizontaler Richtung vorgenommenen, offenbar zum Aufhängen des Kegels dienenden Durchbohrung auch sechs meist unregelmässig eingebohrte, ebenfalls runde und kleine Löcher zeigte, die in verticaler Richtung in den Körper des Kegels hineingehen und von verschiedener Tiefe sind. Können dieselben zur Ermittelung der ursprünglichen Bestimmung dieser Kegel dienen oder haben sie etwa nur einen Zweck wie jenes oben an der Rückseite der Hermesstatuette aus gebranntem Thon erwähnte grössere Loch und

andere bei anderen Terracotten (was wahrscheinlicher halten möchte)?*).

Ueber das Weber'sche Grundge electrischen Wechselwirkung i Anwendung auf die unitari Hypothese

von

Eduard Riecke.

Bei der Entwickelung der elektrodyn Elementargesetze aus seinem Grundgeset ber ausgegangen von der dualistischen H Dass dasselbe Gesetz angewandt auf di sche Hypothese zwar hinführt zu dem schen Gesetze, dagegen zu anderen E gesetzen der Induktion ist von Neum Principien der Elektrodynamik. Tübing bemerkt. Im Folgenden soll eine eige che Consequenz entwickelt werden, we aus der Anwendung des Weberschen Ges die unitarische Hypothese ergiebt, ein quenz, auf welche sich die ganze zwis beiden Anschauungsweisen bestehende denheit reduciren dürfte, vorausgesetzt, Webersche Gesetz der Wechselwirkung z gelegt wird.

Wir betrachten die Wirkung eines ten ruhenden Stromelementes *ids* auf ei

*) Obiges war geschrieben, ehe ich von C sprechung dieser Thongegenstände in dem mir zugekommenen Vol. XLIV der Ann. d. Inst. arc fg., Kunde hatte.

henden electrischen Punkt P, dessen Masse gleich 1 gesetzt werden möge. Bezeichnen wir die in der Längeneinheit des Leiters, welchem das Stromelement angehört, enthaltene Menge positiven Fluidums durch e, die Geschwindigkeit mit welcher sich die positive Electricität in dem Leiter bewegt durch s', so ist

$$i = \frac{2}{c} . e s'.$$

Ist r die Entfernung zwischen dem Stromelement und dem Punkte P, so ist die abstossende Wirkung der in dem ersteren enthaltenen ruhenden negativen Masse $— eds$ auf den betrachteten Punkt P gleich

$$-\frac{e\,ds}{r^2}.$$

Die Wirkung der strömenden positiven Masse $e\,ds$ ist gleich

$$\frac{e\,ds}{r^2}\left[1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{2}{c^2} r \frac{d^2r}{dt^2}\right].$$

Somit die Gesammtwirkung des Stromelementes auf den Punkt P

$$R = -\frac{1}{c^2} \cdot \frac{e\,ds}{r^2}\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - 2r\frac{d^2r}{dt^2}\right].$$

Nun ist

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{ds} \cdot s'$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d^2r}{ds^2} \cdot s'^2.$$

Somit

$$R = -\frac{1}{c^2}\frac{e\,ds}{r^2}\left[\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - 2r\frac{d^2r}{ds^2}\right]$$

$$= -\frac{1}{2c}\frac{i\,ds}{r^2}\left[\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - 2r\frac{d^2r}{ds^2}\right]$$

Es ergiebt sich somit, dass
grundelegung der unitarische
these ein ruhendes und kon
Stromelement auf einen ruhend
trischen Punkt eine durch den
gehenden Ausdruck bestimmt
ssende Wirkung ausübt, währe
der dualistischen Hypothese e
che Wirkung nicht stattfindet

Wir gehen über zu der Bestim
Wirkung, welche ein konstanter ges
Strom auf einen elektrischen Punkt
die von einem einzelnen Elemente dess
rührende abstossende Kraft, welche d
vorhergehenden Ausdruck gegeben ist,
auf folgende Form bringen:

$$R = \frac{4}{c} \cdot is' \frac{d^2\sqrt{r}}{ds^2} \cdot \frac{d\sqrt{r}}{dr}\, ds.$$

Die Componente S dieser Kraft
beliebigen Richtung σ ist somit:

$$S = \frac{4}{c} \cdot is' \frac{d\sqrt{r}}{ds^2} \cdot \frac{d\sqrt{r}}{d\sigma} \cdot ds.$$

und die Componente der von dem ge

Strome ausgeübten Gesammtwirkung nach derselben Richtung wird daher

$$S = \frac{4}{c} \cdot is' \int \frac{d^2\sqrt{r}}{ds} \cdot \frac{d\sqrt{r}}{d\sigma} \cdot ds.$$

Nun ist:

$$\frac{d^2\sqrt{r}}{ds^2} \cdot \frac{d\sqrt{r}}{d\sigma} = \frac{d}{ds}\left[\frac{d\sqrt{r}}{ds} \cdot \frac{d\sqrt{r}}{d\sigma}\right] - \tfrac{1}{2}\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{d\sqrt{r}}{ds}\right)^2.$$

Wenn wir diesen Werth in dem Integral substituiren und bemerken, dass der erste Term über die geschlossene Stromcurve s hin integrirt verschwindet, so ergiebt sich:

$$S = -\frac{2}{c} \cdot is' \int \frac{d}{d\sigma}\left(\frac{d\sqrt{r}}{ds}\right)^2 \cdot ds,$$

oder

$$S = -\frac{d}{d\sigma}\left[\frac{2}{c} \cdot is' \int \left(\frac{d\sqrt{r}}{ds}\right)^2 \cdot ds\right].$$

Setzen wir

$$V = \frac{2}{c} \cdot is' \int \left(\frac{d\sqrt{r}}{ds}\right)^2 ds,$$

so wird

$$S = -\frac{\partial V}{\partial \sigma}.$$

Nach der unitarischen Hypothese übt somit ein geschlossener konstanter Strom auf ein ruhendes electrisches Theilchen eine Wirkung aus, deren Componenten durch die negativen Differentialquotienten eines gewissen Potentiales bestimmt werden.

Befindet sich in der Nähe eines solchen Stromes ein Conduktor, so wird

sich auf der Oberfläche desselb
gewisse statische Vertheilung
sitiver Elektricität bilden und
zeitig wird der Strom in Folge
die mit den ponderabelen Mol
fest verbundene negative Elek
ausgeübten Kräfte auf den Co
eine unmittelbare ponderomot
Wirkung ausüben. Es verhält s
Strom gegen einen ihm genä
Conduktor ganz ebenso wie ei
bener Isolator.

Die Differenz zwischen der unitaris
dualistischen Hypothese tritt noch schä
vor, wenn wir nicht die Wirkung eines
senen Stromes, sondern die Wirkung e
derseits begrenzten Stückes eines solch
mes auf einen elektrischen Punkt betra
Für die Componente der Wirkung
ner beliebigen Richtung σ ergiebt sich
Vorhergehenden der Werth:

$$S = \frac{4}{c}\, is' \int \frac{d}{ds}\left[\frac{d\sqrt{r}}{ds} \cdot \frac{d\sqrt{r}}{d\sigma}\right] e$$

$$-\frac{2}{c} \cdot is' \frac{d}{d\sigma}\left[\int\left(\frac{d\sqrt{r}}{ds}\right)^2 ds,\right.$$

wo die Integrale nun hinzuerstrecken
die begrenzte Curve s.
Bezeichnen wir mit ds_0 das Anfan
der Curve, mit ds_1, das Endelement m
r_1 die entsprechenden Entfernungen
Punkte P, und setzen wir wieder

$$V = \frac{2}{c} \cdot is' \int \left(\frac{d\sqrt{r}}{ds}\right)^2 \cdot ds.$$

So wird

$$S = \frac{4}{c} \cdot is' \left[\frac{d\sqrt{r_1}}{ds_1} \cdot \frac{d\sqrt{r_0}}{d\sigma} - \frac{d\sqrt{r_0}}{ds_0} \cdot \frac{d\sqrt{r_0}}{d\sigma}\right] - \frac{dV}{d\sigma}.$$

Wir nehmen nun an, der betrachtete elektrische Punkt gehöre einem Elemente $d\sigma$ eines geschlossenen Leiterdrathes σ an. Es ergiebt sich dann, dass das beiderseits begrenzte Stromstück auf dieses Element $d\sigma$ eine elektromotorische Kraft ausübt, welche wir erhalten, wenn wir uns die Längeneinheit des Leiterdrathes mit der Einheit der positiven elektrischen Masse angefüllt denken und wenn wir unter dieser Voraussetzung die Kraft berechnen, welche von dem gegebenen Stromstücke auf die in dem Element $d\sigma$ enthaltene positive Masse in der Richtung des Elementes ausgeübt wird. Die auf das Element $d\sigma$ ausgeübte elektromotorische Kraft ist somit:

$$S = \frac{4}{c} is' \left[\frac{d\sqrt{r_1}}{ds_1} \cdot \frac{d\sqrt{r_1}}{d\sigma} - \frac{d\sqrt{r_0}}{ds_0} \cdot \frac{d\sqrt{r_0}}{d\sigma}\right] d\sigma$$

$$- \frac{dV}{d\sigma} \cdot d\sigma.$$

und die auf den ganzen Stromkreis ausgeübte elektromotorische Kraft wird daher:

$$S = \frac{4}{c} \cdot is' \int \left[\frac{d\sqrt{r_1}}{ds_1} \cdot \frac{d\sqrt{r_1}}{d\sigma} - \frac{d\sqrt{r_0}}{ds_0} \cdot \frac{d\sqrt{r_0}}{d\sigma}\right] d\sigma.$$

Nach der unitarischen Hypothese würde also

ein beiderseits begrenztes Stück eines kons
Stromes auf einen geschlossenen Leiter ein
tromotorische Kraft ausüben, was nach de
listischen Ansicht nicht der Fall ist.

Es ist der obige Ausdruck einer einfachen
pretation fähig. Für die elektromotorische
welche ein Stromelement *ids* von verände
Intensität auf ein Leiterelement $d\sigma$ ausüb
giebt sich nemlich, wenn wir wieder die
rische Hypothese festhalten, der Ausdru

$$E = -\frac{1}{2c}\frac{i\,ds\,d\sigma}{r^2}\left[\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - 2r\frac{d^2r}{d^2s}\right]\frac{dr}{d\sigma}$$

$$+\frac{4}{c}\cdot ds\,d\sigma\,\frac{d\sqrt{r}}{ds}\cdot\frac{d\sqrt{r}}{d\sigma}\cdot\frac{di}{dt}$$

wobei der erste Theil des Ausdruckes d
dem unveränderlichen Theil des Stromes
in $d\sigma$ enthaltene positive elektrische Flüs
ausgeübten Kraft entspricht, der zweit
identisch ist mit dem Werth der elektro
schen Kraft, wie er sich aus der dualis
Vorstellung ergiebt.

Wenn die Stromstärke in dem Elem
in sehr kurzer Zeit von 0 bis zu dem W
aufsteigt, so ist die auf ein Leiterelem
ausgeübte elektromotorische Kraft

$$E = \frac{4}{c}\cdot ds\,d\sigma\,\frac{d\sqrt{r}}{ds}\cdot\frac{d\sqrt{r}}{d\sigma}\cdot i$$

und somit die auf einen geschlossenen
ausgeübte elektromotorische Kraft:

$$\Sigma = \frac{4}{c} \cdot i\,ds \cdot \int \frac{d\sqrt{r}}{ds} \cdot \frac{d\sqrt{r}}{d\sigma} \cdot d\sigma.$$

Den Ausdruck für die elektromotorische Kraft, welche ein begrenztes Stück eines geschlossenen Stromes auf einen geschlossenen Leiter ausübt, können wir in der Form schreiben

$$S\,dt = \frac{4}{c} \cdot i\,ds_1 \int \frac{d\sqrt{r_1}}{ds_1} \cdot \frac{d\sqrt{r_1}}{d\sigma} \cdot d\sigma$$

$$- \frac{4}{c}\, i\,ds_0 \int \frac{d\sqrt{r_0}}{ds_0} \cdot \frac{d\sqrt{r_0}}{d\sigma} \cdot d\sigma.$$

Vergleichen wir diese Darstellung mit dem Ausdrucke für die elektromotorische Kraft, welche in einem Leiter σ inducirt wird durch das momentane Entstehen eines Stromes von der Stärke i in einem Leiterelemente ds, so gelangen wir zu dem Resultate: die von einem begrenzten Stücke eines geschlossenen Stromes in einem geschlossenen Leiter inducirte elektromotorische Kraft ist gleich der elektromotorischen Kraft, welche inducirt wird durch das Verschwinden eines Stroms von gleicher Stärke in dem Anfangselemente, das Entstehen eines solchen Stromes in dem Endelemente. Die Länge dieses Elements ist hiebei gleich zu nehmen mit dem von der positiven elektrischen Flüssigkeit in der Zeit dt durchlaufenen Wege.

Könnten wir also einen geschlossenen Strom herstellen, der in einzelnen Punkten seiner Bahn plötzlichen Aenderungen seiner Richtung unterworfen wäre, so würde jede solche Stelle bei Zugrundelegung der unitarischen Hypothese den Sitz einer elektromotorischen Kraft bilden.

Zur Geometrie der Plücker'
Liniengebilde

von

Dr. A. Voss in Göttingen.

In manchen der bisherigen Arbe
Liniengeometrie werden als Coordinate
raden ihre Ausdrücke in Punct- oder
ordinaten angewandt. Es ist aber vo
Vortheil, die Liniengeometrie ganz u
als eine eigene Geometrie von vier Di
zu betrachten, welche durch analyti
drücke zwischen 6 homogenen Coordina
$x_3\ x_4\ x_5\ x_6$ unter Adjunction einer
denden quadratischen Form $\Sigma a_{ik} x_i x_k$
selben repräsentirt wird, eine Auffa
Herrn Klein zu verdanken ist[1]). Da
Gerade Raumelement, die Rolle von
Ebene der gewöhnlichen Geometrie
ebene Strahlbüschel, eine Curve ist
sämmtlichen Treffgeraden, eine Fläche
Tangenten characterisirt.

Die quadratische Form mag unter
nischen Gestalt $\Sigma x_i^2 = 0$ vorausgeset

doch mag bemerkt werden, dass in d
den Untersuchungen die Formeln nur
facher Modificationen[2]) bedürfen, wen
gemeine Form zu Grunde gelegt wird.

Von diesem Standpuncte aus kann
Betrachtung der verschiedenen Lin
(Complexe, Congruenzen, Linienflächen
Gerade) unternehmen, welche den Un

1) Vgl. Math. Ann. Bd. II, p. 366.
2) Sie sind nämlich Covarianten der Form

gen über die Singularitäten der Flächen und Raumcurven analog ist. Ein Liniencomplex n. Grades beispielsweise besteht aus ∞^3 Geraden, durch jeden Punct gehen ∞ viele die einen Kegel n. Grades, in jeder Ebene solche, die eine Curve n. Classe bilden. Jeder dieser Kegel besitzt gewisse Singularitäten (Wende Doppelebenen, die Complexcurve die dualistischen); man kann nach der Vertheilung dieser Elemente fragen.

Es giebt aber andre Singularitäten, insbesondere das Auftreten von 1, 2, 3 Doppel (oder auch Rückkehr)kanten sowie von Doppelinflexionskanten beim Complexkegel, welche nur bei gewissen Complexkegeln sich finden, deren Spitzen dann eine Fläche oder Linie bilden oder in einzelnen Punkten vertheilt sind. Beispielsweise existirt eine Congruenz solcher Geraden, welche Doppelkanten von C.-Kegeln sind, eine Linienfläche von Rückkehrkanten. Eine ausführlichere Darstellung dieser Verhältnisse werde ich bei einer anderen Gelegenheit geben. Insbesondere ist aber zur Erforschung dieser Verhältnisse eine genauere Untersuchung der durch eine Congruenz gebildeten Brennflächen nöthig[1]), von der ich im Folgenden einige Resultate mittheile, die zugleich die eigenthümlichen Methoden der liniengeometrischen Untersuchungen erläutern mögen.

Zu jeder Congruenzgeraden x_i von zwei Complexen n. und m. Grades $f = 0$ $\varphi = 0$, gehören zwei auf ihr liegende Brennpuncte, zwei durch sie gehende Brennebenen, welche die Brennfläche der Congruenz erzeugen respective einhüllen. Die Brennpuncte sind die Schnitte der Geraden

1) Vgl. Pasch, Habilitationsschrift. Giessen 1870.

x_i mit den beiden Geraden u_i, v_i deren
naten

$$u_i = f_i + \lambda_0 \varphi_i, \quad v_i = f_i + \lambda_1 \varphi_i$$

die Brennebenen die durch $u_i x_i$, $v_i x_i$
ten, wo λ_0 λ_1 die Wurzeln der Gleichu

$$1) \qquad \Sigma f_i^2 + 2\lambda \Sigma f_i \varphi_i + \lambda^2 \Sigma \varphi_i^2 =$$

deren Coefficienten mit Θ_{11} Θ_{12} Θ_{22} b
werden mögen.

Man erhält die Summe von Ordn
Klasse der Brennfläche, wenn man u
wie oft zwei ∞ nahe Strahlen der C
x_i, $x_i + dx_i$ eine willkürliche Gerade y
den. Es ergiebt sich die Gleichung

$$2) (\Sigma f_i y_i)^2 \Theta_{22} - 2(\Sigma f_i y_i \Sigma \varphi_i y_i) \Theta_{12} + (\Sigma \varphi_i y_i$$

welche in Verbindung mit $f = 0$ $\varphi =$
$= 0$ $4mn(m+n-2)$ Werthe von x
Daher ist die Ordnung = Klasse der Br

$$= 2mn(m+n-2)\,^{1}).$$

Ist $\varphi = 0$ derjenige Covariante Compl
cher mit $f = 0$ die singulären Linien
so zerfallen die Werthsysteme von x_i w
in zwei ganz verschiedene, von denen
eine $4n(n-1)^2$ werthige auf die Si
Fläche von $f = 0$ bezieht[2]). Ordn

1) Vgl. diese Nachrichten p. 420.
2) In den einschlägigen Untersuchungen vo

Klasse der Singulären Fläche eines Complexes n. Grades ist also

$$2n(n-1)^2.$$

Es stehen nun die singulären Elemente der Brennfläche im engsten Zusammenhang mit denen der Congruenz. Ein Brennpunct oder eine Brennebene kann zu zwei verschiedenen Geraden gehören; er gehört dann der Doppelcurve, resp. der Doppeldeveloppabelen der Brennfläche an. Einem Puncte der Rückkehr oder parabolischen Curve entspricht der Fall, dass drei unendlich nahe Gerade der Congruenz durch einen Punct gehen oder in einer Ebene liegen [1]). Weitere Singularitäten der Congruenz stehen in Verbindung mit den singulären Puncten dieser Raumcurven.

Diese Singulären Elemente selbst bestimmt man durch Angabe der zugehörigen Congruenzgeraden, welche durch sie gehen. Dabei erhält man immer Gleichungen, welche sich gleichzeitig auf die beiden dualistisch entsprechenden Singularitäten beziehen. Es bleibt dabei eine weitere Aufgabe, die Trennung dieser Ausdrücke auszuführen.

Beispielsweise erhält man die Gleichung des Complexes, welcher mit $f = 0$ $\varphi = 0$ die Linienfläche der parabolischen resp. Rückkehrcurve bildet, wenn man aus den Beziehungen, die für drei consecutive Congruenzgerade durch einen Punct oder in einer Ebene stattfinden, die Dif-

Klein, Pasch, Plücker die Singularitenfläche. Zugleich ist hier der analytische Nachweis für die von Pasch (a. a. O. p. 9) ausgesprochene Behauptung.

1) Für den Fall, wo einer der Complexe linear ist, modificiren sich diese Verhältnisse etwas.

ferentiale eliminirt. Für $m = 1$ ist die
fläche vom Grade

$$4n(3n - 4)^{1}).$$

Es mag bemerkt werden, dass die Best
dieser letzteren Linienflächen noch auf
dere Art geschehen kann, die zugleich
folgende wichtig wird. Man kann eine T
der Brennfläche zweier allgemeiner C
repräsentiren durch ihre Coordinaten

$$\varrho y_i = \mu x_i + f_i + \lambda \varphi_i$$

wo λ aus Gleichung 1) zu entnehmen u
Parameter ist. Die beiden Haupttange
Büschels y_i sind durch eine quadratisc
chung für μ gegeben. Und die Discri
derselben liefert solche Linien x_i mi
$\varphi = 0$, für welche die Haupttangenten
diren, welche also entweder durch die
sche oder durch die Rückkehrcurve geh

Indem ich die interessanten Anwe
übergehe, welche sich von hier aus auf
metrie der Brennflächen, sowie insbeson
singulären Fläche eines Complexes mac
sen, will ich noch bemerken, dass in de
Betrachtungen zugleich ein Mittel gege
die Grade der Doppel- und Rückkehrcu
den Brennflächen zu bestimmen. Dies g
durch die Bestimmung der Klasse des

1) Sie repräsentirt für $n = 2$ die 16 Str
in den 16 Doppelebenen der Brennfläche. Vgl
Theorie der algebr. Strahlensyst. Berl. 1866. Kl
Ann.

Schnittes (Rang der Brennfläche) sowie der Zahl seiner Wendetangenten. Die Klasse bestimmt sich folgendermassen: Die Tangenten der Brennfläche, welche zwei Gerade u_i, v_i schneiden, bilden eine Linienfläche, deren Grad man erhält, wenn man sie mit einer Geraden schneidet. Setzt man u_i, v_i als zwei sich schneidende voraus, so degenerirt die Fläche in den Tangentenkegel vom Schnittpunct von u_i, v_i, sowie die Schnittcurve der Ebene u_i, v_i. Da der Grad des Tangentenkegels gleich der Classe jener Curve, so hat man mit der Bestimmung des Grades jener Fläche zugleich den doppelten Rang der Brennfläche erhalten. — Indem man ferner die Zahl der Haupttangenten aufsucht, welche zwei willkürliche Gerade treffen, die man später in sich schneidende übergehen lässt, erhält man die Zahl der Haupttangenten durch einen Punct (= der Zahl derselben in einer Ebene) und damit die Zahl der Inflexionen des ebenen Schnittes.

Durch Anwendung der Plücker'schen Formeln gewinnt man aus diesen Zahlen sofort die allgemeinen Formeln für die Grade der Doppel- und Rückkehrcurven. Der Kürze wegen gebe ich sie hier nur für die singuläre Fläche eines Complexes. Man erhält

Ordnung $\nu = 2n(n-1)^2$

Klasse $\varkappa = 2n(n-1)^2$

Rang $\varrho = 2n(n-1)(n^2-n+1)$

Doppelcurve $\delta = n(n-1)[2n^4-6n^3-n^2+4n+12]$

Rückkehrcurve $\eta = 4n(n-1)(n^2-n$

Für einen Complex zweiten Grades is
$\varkappa = 4$, $\varrho = 12$, $\delta = \eta = 0$. Für ei
plex dritten Grades ist $\nu = 24 = \varkappa$,
$\delta = 90$, $\eta = 96$, mittelst welcher
denn eine weitere Untersuchung der
Fläche möglich ist. Man erhält $\delta =$
bei Gelegenheit der allgemeinen Unt
solcher Kegel eines Complexes n. Gra
che Doppelinflexionskanten besitzen.
teren bilden eine Congruenz vo
$2n(11n-18)$, welche für $n = 3$ in lau
Strahlbüschel degenerirt, deren Centra
pelcurve seiner singulären Fläche bild

In nur wenigen Fällen ist es ge
möglich die Gleichungen der Brennf
Punct, Ebenen oder Liniencoordinaten
sichtlichen Formen zu bilden. Durch
weiterung der Principien, welche Cle
fünften Bande der Math. Ann. dargele
kann man beispielsweise die Gleichung d
fläche von zwei Complexen zweiten
Form einer Discriminante hinschreiben
vom 16. Grade und weist eine Rück

1) Es sei noch bemerkt, dass ähnliche M
Bestimmung anderer singulärer Curven auf
singuläre Flächen führen.

2) Durch directe Bildung der Gleichung d
ren Fläche ist von Clebsch Math. Ann. V, 4
Werth für η gefunden.

3) A. a. O. Ein (diese Nachr. p. 416) v
gangener Irrthum mag hier berichtigt wer
Grad der Curve C erniedrigt sich für jeden f
kehrpunct von $f = 0$, $F = 0$, deren bei beid
Zahl $\varkappa$ sei, um eine Einheit mehr. Es ist da
am Schlusse gegebenen Formeln statt ν $\nu - \varkappa$
wobei zugleich i' ℓ' um $\varkappa$ zu resp. abnehmen

vom 48. auf, wie auch aus den Formeln, deren Ableitung oben angedeutet wurde, hervorgeht.

Zur Lehre von der Knorpelverknöcherung.

Vorläufige Mittheilung

von

Dr. A. v. Brunn.

Vorgelegt von J. Henle.

1. Untersucht man Schnitte, welche parallel zur Knochenaxe durch den Verknöcherungsrand der Diaphyse eines Röhrenknochens gelegt sind, völlig frisch unter Zusatz von Kochsalzlösung von 0,5 %, so zeigt sich, dass die Knorpelzellen an der Verknöcherungsgrenze auch da, wo die Grundsubstanz bereits verkalkt ist, nicht geschrumpft oder in körnigem Zerfall begriffen sind, sondern überall die Höhle, in der sie liegen, vollständig ausfüllen, ein helles, körnchenarmes Protoplasma und einen grossen, bläschenförmigen Kern besitzen. Auf Zusatz wasserentziehender Substanzen — Alcohol, Glycerin etc. — verändern die Zellen sehr schnell ihr Ansehen und ihre Gestalt und werden zu den Gebilden, wie sie auf den Abbildungen zu manchen neueren Untersuchungen über dieses Thema gezeichnet sind. —

Es ist das keine neue Beobachtung: Kölliker beschreibt das angegebene Verhalten dieser Zellen vom Verknöcherungsrande rhachitischer Knochen sehr ausführlich in Nr. 11 der Mittheilun-

gen der zürcher naturf. Gesellschaft —
hielt dies Verhalten der Erwähnung
weil es von neueren Untersuchern weni
zu sein scheint und namentlich Stied
des Knochengewebes, Leipzig 1872)
schrumpftsein der Zellen am Verkn
rande als Beweis dafür anführt, dass
pelzellen mit der Erzeugung der O
Nichts zu thun haben, sondern völli
hen, bevor die Verknöcherung beginn

2. Schon da, wo die Knorpelzell
Reihen anzuordnen beginnen, differenzi
Knorpelgrundsubstanz in der Art, da
die Zellenreihen selbst gelegene Mas
Form senkrecht vom hyalinen Knorpel
knöcherungsrande verlaufender cylindri
len homogen bleibt, dagegen die zwi
sen Säulen befindliche sie allseitig
Masse sich in elastisches Gewebe, aus
Grundsubstanz mit eingelagerten den
hen parallelen Fasern bestehend, verv
Hämatoxylin färbt die homogenen, in
actionen mit der Grundsubstanz des
Knorpels übereinstimmenden Säulen d
während die elastische Substanz ungefä
Carmin dagegen färbt nur die elasti
stanz, so dass sich sehr elegante Dop
nen ausführen lassen.

Der Zusammenhang der Fasern
schen Substanz unter einander und m
Knorpelzellen enthaltenden Säulen ist i
Zustande ein sehr loser, so dass sich
len sehr leicht stückweise isoliren las
ständig isolirte, vom hyalinen Knorp
Knochen reichende Zellensäulen erhält
Zerzupfen des in gewöhnlicher Weise
chlorid behandelten Knorpels.

Während nach dem Knochen hin durch das Grösserwerden der Knorpelzellen die homogene Substanz der Säulen vermindert wird, bleibt die elastische Substanz erhalten, nimmt sogar stellenweise an Masse zu: sie bildet die über die Verknöcherungsgrenze hinaus in den Knochen hineinragenden Septa.

Beide vorgenannten Beobachtungen sind an völlig frischen Phalanxknochen des Kalbes gemacht.

Verzeichniss der bei der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangenen Druckschriften.

Mai und Juni 1873.

(Fortsetzung).

A. Quetelet, Annales de l'Observatoire R. de Bruxelles. T. XXI. 1872. 4.

— Annuaire de l'observatoire R. d. Bruxelles. 1872 et 1873. Brux. 12.

— — Tables de mortalité et leur développement. Ebd. 1872. 4.

— de l'homme considéré dans le système social. Ebd. 1873. 8.

A. Scacchi, note mineralogiche. Mem. I. Napoli 1873. 4.

C. Orthmann, F. Müller, A. Wangerin, Jahrbuch üb. die Fortschritte der Mathematik. Bd. II. Hft. 3. Berlin 1873.

E. Liais, Climats, Géologie, Faune et Géographie botanique du Brésil. Publié par order du gouvernment impérial du Brésil. Paris 1872. 8.

Norges Officielle Statistik der Jahre 1866 — 1871 nebst Beilage. 16 Hefte in 4. Christiania 1869—1873.

P. A. Munch, Nordens aeldste Historia. Christiania. 8. Nebst einer Medaille.

Norsk meteorologisk Aarbog for 1871. Chris
J. Lieblein, recherches sur la chronologie
Ebd. 1873. 8.
Forhandlingar i Videnskabs-Selskabet i Christ
1871. Ebd. 1872. 8.
Sars og Th. Kjerulf, nyt Magazin for na
berne. Bd. IX. 1 u. 2. Ebd. 1872. 8.
Lundh, og J. E. Sars, norske Riggsregist
V. 1. 1619—1623. Ebd. 1872. 8.
Beretning om den almindelige Udstilling for
Ebd. 1872. 8.
Det Kong. Norske Frederiks Universitets A
for aaret 1871. Ebd. 1872. 8.
S. A. Sexe, on the rise of land in Scandi
1872. 4.
F. C. Schübeler, die Pflanzenwelt Norweg
1873. 4.
A. Helland, Forekomster af Kise i visse skif
Ebd 1873. 4.
G. O. Sars, on some remarkable forms of
from the great deeps of the Norwegian co
1872. 4.
— carcinologiska bidrag til Norges Fauna.
1872. 4.
Det kong. Norske Videnskabers-Selskabs Sk
19de Aarhundrede. Bd. VI. Bd. VII. I. H.
jem 1872. 8.
Fortegnelse over den Tilvext af Boeger i de
Selsk. Bibliothek 1863—1870. 8.
Katalog over den Knudtzonske Bogsamling i
1871. 8.
Katalog over det Kgl. Norske Videnskabern
Oldsamling. Throndhjem 1871. 8.
Mémoires de la Société R. des sciences de L
rie. T. III. Liège 1873. 8.
Nature 187. 188.
Giuseppe de Montemajor, Cenno storic
di Suessola e di Arienzo. Napoli 1872. 8.
Dr. C. Bruhns, Astronomisch-Geodätische
Jahre 1871. Publication des Königl. Preu
schen Instituts. Leipzig 1873. 4.
Archives Néerlandaises des Sciences exactes
T. VII. 4ème et 5ème Livraison. La Hay

(Fortsetzung folgt).

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

30. Juli. № 20. 1873.

Universität.

Verzeichniss der Vorlesungen auf der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen während des Winterhalbjahrs $18^{73}/_{74}$. Die Vorlesungen beginnen den 15. October und enden den 14. März.

Theologie.

Biblische Theologie des Alten Testaments: Prof. *Bertheau* fünfmal um 11 Uhr.

Geschichte des Volkes Israel: Lic. *Duhm* viermal, Mont. Dienst. Donnerst. Freit., um 10 Uhr.

Theologie der Propheten: *Derselbe* zweistündig, Mittw. und Sonnab., um 10 Uhr.

Biblische Theologie des Neuen Testamentes: Prof. *Ritschl* fünfmal um 11 Uhr.

Einleitung ins Neue Testament: Prof. *Wiesinger* fünfmal um 11 Uhr.

Geschichte des Neutestamentlichen Kanons: Prof. *Zahn* zweistündig um 12 Uhr.

Erklärung der Psalmen. Prof. *Bertheau* sechsmal um 10 Uhr.

Erklärung des Evangeliums Johannis: Prof. *Zahn* fünfmal um 9 Uhr.

Erklärung sämmtlicher Paulinischer Briefe mit Ausnahme des Römerbriefs: Prof. *Wiesinger* fünfmal um 9 Uhr.

Erklärung des Römer- und Galaterbriefe
nemann fünfmal um 9 Uhr.

Kirchengeschichte I. Hälfte: Prof. *Dun*
um 8 Uhr.
Kirchengeschichte II. Hälfte: Prof. *Wage*
mal um 8 Uhr.
Kirchengeschichte der neueren Zeit:
vierständig um 4 Uhr.
Dogmengeschichte: Prof. *Wagenmann*
Uhr.
Geschichte der neueren und neuesten
Berücksichtigung der allgemeinen Cultur
turgeschichte: Prof. *Ehrenfeuchter* vierstü
Dienstag, Donnerstag, Freitag um 12 Uhr
Comparative Symbolik: Prof. *Schöberlei*
5 Uhr.

Dogmatik Th. I.: Prof. *Schöberlein* vi
12 Uhr.
Prolegomena der Dogmatik: *Derselbe*
Mittw. und Sonnab., um 12 Uhr öffentlich
Theologische Ethik: Prof. *Ritschl* fünfm

Das gesammte System der praktische
Prof. *Ehrenfeuchter* fünfmal um 3 Uhr.
Christliche Pädagogik: Prof. *Schoeberlei*
und Freitags um 6 Uhr.
Kirchenrecht und Geschichte der Kirc
s. unter Rechtswissenschaft S. 558.
Die Uebungen des königl. homiletisch
leiten abwechslungsweise Prof. *Ehrenfeuc*
Wiesinger Sonnabend von 9—12 Uhr öffe
Katechetische Uebungen: Prof. *Wiesing*
von 5—6 Uhr, Prof. *Wagenmann* Sonnabe
Uhr öffentlich.
Die liturgischen Uebungen des praktisch
Seminars leitet Prof. *Schöberlein* Mittwoc
Sonnabends von 9—11 Uhr öffentlich.

Eine theologische Societät leitet Prof.
theologische Societät Prof. *Schöberlein* Di
Uhr; eine historisch-theologische Societät
mann Freitags um 6 Uhr; patristische U
Zahn wöchentlich einmal.

Die systematischen, kirchengeschichtlichen und exegetischen Conversatorien im theologischen Stift, sowie die cursorischen Lectionen alt- und neutestamentlicher Schriften werden in gewohnter Weise von den Repetenten gehalten werden.

Repetent *Lemme* wird die Augsburgische Confession mit Vergleichung der übrigen symbolischen Bücher der evangelischen Kirche erklären Montags und Donnerstags um 5 Uhr und ein dogmatisches Repetitorium halten Montags 8 — 10 und Freitags 6 — 8 Uhr Abends.

Rechtswissenschaft.

Institutionen des römischen Rechts: Prof. *Ribbentrop* sechsmal wöchentlich von 12 — 1 Uhr, und Dienstags auch von 5 - 6 Uhr.

Geschichte des römischen Rechts: Prof. *Ribbentrop* täglich von 10—11 Uhr.

Geschichte des römischen Civilprocesses: Prof. *Hartmann* Dienstag, Mittwoch und Freitag von 4—5 Uhr.

Pandekten mit Ausnahme des Familien- und Erbrechts, nach Puchta's Pandekten: Prof. *von Ihering* an den fünf ersten Wochentagen von 10—12½ Uhr.

Römisches Familienrecht: Prof. *Hartmann* Dienstags von 5—6 Uhr öffentlich.

Römisches Erbrecht: Prof. *Wolff* fünfmal wöchentlich von 9—10 Uhr.

Deutsche Staats- und Rechtsgeschichte: Prof. *Frensdorff* fünfstündig wöchentlich von 3 - 4 Uhr.

Erklärung deutscher Rechtsquellen älterer und neuerer Zeit: Prof. *Frensdorff* Montags 6 Uhr, öffentlich.

Deutsches Privatrecht einschliesslich des Lehnrechts: Prof. *Dove* fünfmal von 9 11 Uhr.

Handelsrecht, Wechselrecht und Seerecht: Prof. *Thöl* fünfmal wöchentlich von 12—1 Uhr.

Landwirthschaftsrecht: Prof. *Ziebarth* Montags, Dienstags und Donnerstags um 3 Uhr.

Preussisches Erbrecht: Prof. *Ziebarth* Freitags um 5 Uhr, öffentlich.

Deutsches Strafrecht: Prof. *Ziebarth* fünfstündig um 11 Uhr, Dr. *Bierling* viermal wöchentlich von 10—11 Uhr.

Deutsches Reichs- und Bundesrecht: Prof. *Zachariä* vierstündig um 12 Uhr.

Deutsches Staatsrecht: Prof. *Frensdorf* wöchentlich von 10—11 Uhr.

Kirchenrecht einschliesslich des Eherechts fünfmal wöchentlich von 3—4 Uhr.

Geschichte der Kirchenverfassung und nisses von Staat und Kirche: Prof. *Dove* Freitags von 5—6 Uhr, öffentlich.

Theorie des Civilprocessrechts: Prof. *B* stündig von 4 - 6 Uhr.

Deutscher Strafprocess: Prof. *Zachariae* um 11 Uhr.

Civilprocesspracticum: Prof. *Hartmann* Donnerstags von 4—6 Uhr.

Gerichtliche Medicin und öffentliche Gesu siehe unten Medicin S. 561.

Medicin.

Zoologie, vergleichende Anatomie, Bota siehe unter Naturwissenschaften.

Medicinische Propaedeutik trägt Prof. woch von 8—9 Uhr öffentlich vor.

Knochen- und Bänderlehre: Prof. *Hen* Freitag, Sonnabend von 11—12 Uhr.

Systematische Anatomie I. Theil: Prof. von 12—1 Uhr.

Topographische Anatomie: Prof. *Henle* und Donnerst. von 2 3 Uhr.

Secirübungen, in Verbindung mit P *v. Brunn* täglich von 9 - 4 Uhr.

Mikroskopische Curse hält Prof. *Krause* gischen Institute für normale Histologie für pathologische Histologie um 12 oder u Mal wöchentlich.

Mikroskopische Uebungen (normale Gewe Dr. *von Brunn*, in vier zu verabredenden

Ueber Theorie und Gebrauch des Mik *von Brunn*, eine Stunde, unentgeltlich.

Allgemeine und besondere Physiologie

rungen durch Experimente und mikroskopische Demonstrationen: Prof. *Herbst* in sechs Stunden wöchentlich um 10 Uhr.

Experimentalphysiologie II. Theil (Physiologie des Nervensystems und der Sinnesorgane): Prof. *Meissner* täglich von 10—11 Uhr.

Arbeiten im physiologischen Institute leitet Prof. *Meissner* täglich in passenden Stunden.

Allgemeine Pathologie und Therapie lehrt Prof. *Krämer* Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag von 4—5 Uhr oder zu anderen passenden Stunden, Prof. *Marmé* gleichfalls viermal wöchentlich, Montag, Dienstag, Mittwoch, Donnerstag von 12—1 Uhr.

Pathologische Anatomie lehrt Prof. *Krause* Dienstag und Freitag um 2 Uhr, Mittwoch und Sonnabend um 12 Uhr.

Physikalische Diagnostik in Verbindung mit praktischen Uebungen an Gesunden und Kranken lehrt Dr. *Wiese* viermal wöchentlich in später näher zu bezeichnenden Stunden.

Pharmakologie oder Lehre von den Wirkungen und der Anwendungsweise der Arzneimittel sowie Anleitung zum Receptschreiben: Prof. *Marx* Montag, Dienstag, Donnerstag und Freitag von 3—4 Uhr.

Arzneimittellehre in ihrem ganzen Umfange mit Uebungen im Receptiren, pharmakognostischen Demonstrationen und Versuchen an Thieren trägt Prof. *Husemann* fünfmal wöchentlich von 5—6 Uhr vor; Dasselbe gleichfalls in Verbindung mit Demonstrationen der Arzneimittel und mit experimenteller Begründung ihrer physiologischen und toxischen Wirkung lehrt Prof. *Marmé* viermal wöchentlich von 5—6 Uhr.

Pharmakologische und toxikologische Untersuchungen leitet Prof. *Marmé* im neu eingerichteten pharmakologischen Institut täglich zu passenden Stunden.

Uebungen und Untersuchungen auf dem Gebiete der Pharmakologie und Toxikologie leitet in näher zu bestimmenden Stunden Prof. *Husemann* privatissime und gratis.

Pharmacie lehrt Prof. *Wiggers* 6mal wöchentlich von 8—9 Uhr; Dasselbe Dr. *Stromeyer* privatissime.

Die forensisch wichtigsten Gifte bespricht und erläutert durch Experimente öffentlich am Freitag von 12—1 Uhr Prof. *Marmé*.

Ausgewählte Capitel der Toxikologie t
semann Montag und Donnerstag von 12–
lich vor.

Specielle Pathologie u. Therapie: Prof
tag, Mittwoch, Donnerstag, Freitag von
Ueber Hautkrankheiten und Syphilis t
mer 3 stündlich vor.
Die medicinische Klinik und Poliklin
Hasse täglich von $10^1/_2$—12 Uhr.
Geschichte der Chirurgie trägt Prof. *B*
von 5–6 Uhr öffentlich vor
Allgemeine Chirurgie: Prof. *Lohmeyer*
chentlich von 5–6 Uhr.
Die Lehre von der Entzündung und
Dr. *Rosenbach* ein Mal wöchentlich in zu
Stunde öffentlich vor.
Chirurgie II. Theil: Prof. *Baum* fünfm
von 6–7 Uhr, Sonnabend von 2—3 Uhr
Die Lehre von den chirurgischen Ope
Prof. *Lohmeyer* vier Mal wöchentlich v
Dr. *Rosenbach* vier Mal wöchentlich von
Die chirurgische Klinik im Ernst-Au
leitet Prof *Baum* täglich von 9—$10^1/_2$ U
Chirurgische Klinik leitet Prof. *Lohme*
9 Uhr.
Praktische Uebungen im Gebrauch des
leitet Prof. *Leber* Mittwoch u. Sonnabend
Augenoperationscursus hält Prof. *Leber*
chentlich in noch zu verabredenden Stu
Klinik der Augenkrankheiten hält Pr
tag, Dienstag, Donnerstag, Freitag von
Geburtskunde trägt Prof. *Schwartz* Mo
Mittwoch, Donnerstag, Freitag um 3 Uh
Ueber Krankheiten der Wöchnerinnen
wig Dienstag und Freitag von 4–5 Uhr
Geburtshülflichen Operationscursus am
Dr. *Hartwig* Mittwoch und Sonnabend u
Geburtshülflich-gynaekologische Klini
Schwartz Mont., Dienst., Donnerst. und F
Geburtshülfliches Repetitorium hält
zu verabredenden Stunden.
Pathologie und Therapie der Geisteskra
Prof. *Meyer* Mittwoch und Sonnabend v
im Ernst-August Hospitale.

Psychiatrische Klinik hält *Derselbe* Montag und Donnerstag je in 2 Stunden, von 4—6 Uhr.

Gerichtliche Medicin trägt Prof. *Krause* für Mediciner und Juristen Mittw. u. Sonnab. von 4—5 Uhr vor.

Ueber öffentliche Gesundheitspflege trägt Prof. *Meissner* Montag, Mittwoch, Donnerstag von 5—6 Uhr vor.

Anatomie und Physiologie der Hausthiere nebst Pferde- und Rindviehkunde lehrt Dr. *Esser* sechs Mal wöchentlich von 8—9 Uhr.

Die Theorie des Hufbeschlags trägt Dr. *Esser* öffentlich in zu verabredenden Stunden vor.

Philosophie.

Allgemeine Geschichte der Philosophie: Prof. *Peip*, fünf Stunden, 3 Uhr. — Geschichte der alten Philosophie: Dr. *Peipers*, fünf Stunden, 6 Uhr. — Geschichte der neuern Philosophie, mit Einleitung über Patristik und Scholastik: Prof. *Baumann*, Mont. Dienst. Donnerst. u. Freit., 5 Uhr.

Logik und Encyclopädie der Philosophie: Prof. *Lotze*, vier Stunden, 10 Uhr.

Metaphysik: Dr. *Stumpf*, vier Stunden, 8 Uhr. — Dr. *Rehnisch*, vier Stunden.

Psychologie: Prof. *Lotze*, vier Stunden, 4 Uhr.

Religionsphilosophie: Prof. *Bohtz*, Dienst. und Freit. 4 Uhr; Prof. *Peip*, vier Stunden, 5 Uhr.

Aesthetik: Prof. *Bohtz*, Mont. Dienst. und Donnerst. 11 Uhr.

Naturrecht: Prof. *Baumann*, Mont. Dienst. Donnerst. Freit. 3 Uhr.

Ueber Moralstatistik, insbesondere über das Verhältniss ihrer Ergebnisse zur Willensfreiheit: Dr. *Rehnisch*, Mittw. und Sonnabend, 10 Uhr, unentgeltlich.

Prof. *Baumann* wird in einer philosophischen Societät Kants Kritik der ästhetischen Urtheilskraft behandeln, Mont. 6 Uhr, und in einer andern logische Uebungen über das 1. Buch von Aristoteles Politik anstellen, Donnerst. 6 Uhr.

In seinen philosophischen Societäten wird Prof. *Peip* Abends 6—7 Uhr am Montag die Grundlehren der Logik nach Trendelenburgs »Elementa logices Aristote-

leae« entwickeln, am Freitag das 1. Buch
lischen Metaphysik erklären.

Dr. *Peipers* wird in seinen philosophisch-p
Societäten Mont. 7 Uhr Platos Philebus, Do
Abschnitte aus Ritters und Prellers historia
graecae et romanae erklären.

Grundzüge der neuern Erziehungslehre:
zwei Stunden.

Die Uebungen des K. pädagogischen Se
Prof. *Sauppe*, Donnerst. und Freit. 11 Uhr

Mathematik und Astronor

Algebraische Analysis mit einer Einleit
Grundbegriffe der Arithmetik: Prof. *Stern*
den, 11 Uhr.

Analytische Geometrie des Euklidischen
schen und des Riemannschen Raumes: P
vier Stunden.

Analytische Geometrie des Raumes: Dr.
Dienst. Donnerst. Freit. 8 Uhr.

Theorie der algebraischen Formen und
derselben auf die Theorie der Curven: D
Stunden und 1 Stunde Uebungen.

Einleitung in die Theorie der Curven
nung: Dr. *Voss*, Sonnabend 8 Uhr unentg

Theorie der realen, der imaginären un
Zahlen: Prof. *Schering*, vier Stunden, 12

Differential- und Integralrechnung: P
Montag bis Sonnabend, 12 Uhr.

Theorie der bestimmten Integrale: Prof
Stunden, 10 Uhr.

Ausgewählte Capitel aus der Theorie
schen Gleichungen: Dr. *Minnigerode*, zwei

Theorie der complexen Funktionen, ins
Theorie der elliptischen Funktionen und
dungen: Prof. *Schering*, vier Stunden, 11

Mathematische Theorie der Electricität:
Mont. Dienst. Donnerst. Freit. 9 Uhr.

Analytische Mechanik: Prof. *Ulrich*,
10 Uhr.

Ausgewählte Kapitel aus der Lehre von
cität: Prof. *Schering*, für die Mitglieder d
sikalischen Seminars, Mittw. 9 Uhr.

Theoretische Astronomie: Prof. *Klinkerfues*, Montag, Dienstag, Mittwoch und Donnerstag, 12 Uhr.

In dem mathematisch-physikalischen Seminar leitet mathematische Uebungen Prof. *Stern*, Mittwoch 10 Uhr; giebt Anleitung zur Anstellung astronomischer Beobachtungen Prof. *Klinkerfues*, in einer passenden Stunde. Vgl. *Naturwissenschaften* S. 564.

Mathematische Societät, privatissime: Prof. *Schering*, in noch zu bestimmender Stunde.

Naturwissenschaften.

Allgemeine Naturgeschichte der Thiere nebst kritischer Darlegung des Darwinismus, für Hörer aus allen Fakultäten: Prof. *Claus*, Mont. Mittw. Donnerst., 6 Uhr Abends.

Vergleichende Anatomie der Wirbelthiere nebst zoologischer Uebersicht der Hauptgruppen derselben: Prof. *Claus*, 5 Stunden, 8 Uhr.

Vergleichende Anatomie des Urogenital-Apparates: Prof. *Claus*, Sonnabend 8 Uhr, öffentlich.

Die zoologischen Uebungen leitet Prof. *Claus* täglich zu passender Zeit.

Einleitung in das Studium der Botanik: Prof. *Bartling*, Mont. Dienst. Donnerst. Freit. 12 Uhr.

Anatomie und Physiologie der Pflanzen: Prof. *Grisebach*, Mont. Dienst. Donnerst. Freit., 4 Uhr, und in Verbindung mit mikroskopischen Demonstrationen im physiologischen Institut, Sonnabend um 10 Uhr.

Geographie der Pflanzen: Prof. *Grisebach*, Donnerst. und Freit. 5 Uhr.

Naturgeschichte der kryptogamischen Gewächse: Prof. *Bartling*, Mont. Dienst. Donnerst. Freit. 2 Uhr.

Demonstrationen in den Gewächshäusern des botanischen Gartens giebt *Derselbe* Mittw. 11 Uhr, öffentlich.

Botanische Excursionen in bisheriger Weise: Prof. *Bartling*.

Ueber den Ursprung und die geognostische Beschaffenheit des Alpengebirges: Prof. *Sartorius von Waltershausen*, Mont. und Donnerst., 6 Uhr, öffentlich.

Krystallographie, einschliesslich der Krystalloptik: Prof. *Listing*, vier Stunden, 4 Uhr.

Palaeontologie: Prof. *v. Seebach*, fünf Stunden, 9 Uhr.

Praktische Uebungen in der Mineralog
stallographie: Prof. *Sartorius von Waltersh*
2—4 Uhr.

Petrographische und palaeontologische U
tet Prof. *von Seebach*, in gewohnter Weis
Donnerst. 10—1 Uhr, privatissime, aber u

Die in der Geologie Fortgeschrittnere
v. Seebach zu der geologischen Gesellschaf
tags Abends 6—8 Uhr.

Physik, zweiter Theil: über Electricität,
Wärme und Licht: Prof. *Weber*, Monta
Donnerstag und Freitag, 5 Uhr.

Ueber das Auge und das Mikroskop:
privatissime in bequemen Stunden.

Die praktischen Uebungen im physikali
torium leitet Prof. *Riecke*, Mittw. u. Sonnabe

Theorie der Electricität: vgl. *Mathemat*

Physikalisches Colloquium: Prof. *Listing*
10—12 Uhr.

In dem mathematisch-physikalischen S
physikalische Uebungen Prof. *Listing*, Mit
Uhr. Siehe *Mathematik und Astronomie* S

Chemie: Prof. *Wöhler*, sechs Stunden, 9

Allgemeine organische Chemie: Prof. *H*
tag bis Freitag, 12 Uhr.

Organische Chemie, für Mediciner: Pro
in später zu bestimmenden Stunden.

Organische Chemie, mit besonderer B
Mediciner: Dr. *Friedburg*, zwei Stunden.

Analytische Chemie: Dr. *Friedburg*, vie

Pharmaceutische Chemie: Prof. *von Usl*
den, 4 Uhr.

Agriculturchemie: Prof. *Tollens*, 3 Stun

Ausgewählte Kapitel der Thierchemie
wirthe: Prof. *Henneberg*, eine Stunde, 5

Technische Chemie, I. Theil (anorganise
gie): Dr. *Post*, in Verbindung mit Excur

Die Grundlehren der neueren Chemie:
Sonnabend, 12 Uhr.

Ueber in der Chemie vorkommende
(Stöchiometrie): Prof. *Tollens*, eine Stunde,

Kurze Uebersicht der wichtigsten orga
bindungen: Dr. *Post*, eine Stunde.

Einzelne Zweige der theoretischen Chemie: Dr. *Stromeyer*, privatissime.

Die Vorlesungen üb. Pharmacie s. unter *Medicin* S. 5.

Die praktisch-chemischen Uebungen u. Untersuchungen im akademischen Laboratorium leitet Prof. *Wöhler* in Gemeinschaft mit den Herren Prof. *von Uslar* und *Hübner*, nnd den Assistenten Dr. *Jannasch*, Dr. *Friedburg*, Dr. *Post* und Kand. *Polstorff*.

Prof. *Tollens* leitet die praktisch-chemischen Uebungen für Landwirthe im agriculturchemischen Laboratorium täglich (ausser Sonnabends) von 8—12 u. 2—4 Uhr.

Prof. *Boedeker* leitet die praktisch-chemischen Uebungen im physiologisch-chemischen Laboratorium, täglich (mit Ausschl. d. Sonnb.) 8—12 und 2—4 Uhr.

Historische Wissenschaften.

Historisch-politische Geographie Europa's Prof. *Pauli*, 4 Stunden, 9 Uhr.

Römische Geschichte: Prof. *Wachsmuth*, Mont. bis Freitag, 12 Uhr.

Geschichte des Zeitalters der französischen Revolution (1789—1815): Dr. *Stern*, fünf Stunden, 11 Uhr.

Geschichte unserer Zeit seit 1815: Prof. *Pauli*, fünf Stunden, 5 Uhr.

Allgemeine Verfassungsgeschichte: Prof. *Waitz*, vier Stunden, 8 Uhr.

Deutsche Geschichte: Prof. *Waitz*, 5 Stunden, 4 Uhr.

Geschichte der deutschen Historiographie im Mittelalter: Prof. *Steindorff*, vier Stunden, 9 Uhr.

Historische Uebungen leitet Prof. *Waitz*, Freitag, 6 Uhr, öffentlich.

Uebungen in der alten Geschichte leitet Prof. *Wachsmuth*, Freit. 6 Uhr, öffentlich.

Historische Uebungen leitet Prof. *Pauli*, eine Stunde, öffentlich.

Historische Uebungen leitet Prof. *Steindorff*, 1 Stunde, öffentlich.

Historische Uebungen über Deutsche Geschichtsquellen des sechszehnten Jahrhunderts: Dr. *Stern*, 1 Stunde, unentgeltlich.

Kirchengeschichte: s. unter *Theologie* S. 556.

Staatswissenschaft und Landwirt

Die Hauptgrundsätze d. positiven Völkerrech
Volkswirthschaftspolitik (praktische Na
mie): Prof. *Hanssen*, vier Stunden, 5 Uhr.
Finanzwissenschaft, insbesondere die Le
Steuern: Prof. *Hanssen*, 4 Stunden, 12 Uhr
Polizeiwissenschaft: Dr. *Dede*, Mont. u
passender Stunde, privatissime.
Einleitung in die Statistik, mit besonde
sichtigung der Bevölkerungsstatistik: Pro
Mittwoch und Sonnabend 11 Uhr.
Moralstatistik: s. *Philosophie* S. 561.
Geschichte der Volkswirthschaft: Prof. *So*
woch und Sonnabend, 12 Uhr.
Das Leben und die Wirksamkeit von Jo
Dr. *Dede*, eine Stunde, unentgeltlich.
Allgem. Verfassungsgeschichte: s. *Historisch*

Landwirthschaftliche Betriebslehre: Prof.
Mont. Dienst. Donnerst. und Freit., 5 Uhr.
Die Ackerbausysteme (Feldwirthschaft, Fe
schaft, Fruchtwechselwirthschaft u. s. w.):
penkerl, in zwei passenden Stunden, öffentl
Die landwirthschaftliche Thierproductions
von den Nutzungen, Raçen, der Züchtung
und Pflege des Pferdes, Rindes, Schafes u.
Prof. *Griepenkerl*, Mont. Dienst. Donnerst.
12 Uhr. — Im Anschluss an diese Vorlesun
Demonstrationen auf benachbarten Landgü
Fabriken, sowie praktische Uebungen gehal
Landwirthschaftliche Betriebslehre: Pro
vier Stunden, 4 Uhr.
Landwirthschaftliche Fütterungslehre: P
berg, vier Stunden, Mittwoch u. Sonnabend
Ueber landwirthschaftliche Pachtvertr
Drechsler. Mittw. 4 Uhr.
Landwirthschaftliches Praktikum: Uebun
fertigen landwirthschaftlicher Berechnung
anschläge, Buchführung: Prof. *Drechsler*,
9—11 Uhr.
Agricalturchemie s. unter *Naturwissenschaft*
Anatomie und Physiologie der Hausthi
und Rindviehkunde; Hufbeschlag s. *Medici*
Landwirthschaftsrecht s. *Rechtswissensch*

Literärgeschichte.

Allgemeine Literaturgeschichte: Prof. *Hoeck*, 4 Stunden, 4 Uhr.

Literaturgeschichte der Araber: Prof. *Wüstenfeld*.

Geschichte der römischen Beredsamkeit: Prof. *von Leutsch*, Mont. Dienst. Donnerst. 3 Uhr.

Allgemeine Geschichte der Poesie des Mittelalters: Prof. *Goedeke*, vier Stunden, um 5 Uhr.

Uebersicht der althochdeutschen Literatur und Erklärung der wichtigsten ahd. Sprachdenkmäler: Dr. *Wilken*, Mittw. und Sonnabend, 10 Uhr.

Geschichte der mittelhochdeutschen Literatur: Dr. *Wilken*, drei Stunden, 4 Uhr.

Geschichte der deutschen Dichtung seit dem Beginn des 17. Jahrhunderts: Assessor *Tittmann*, 5 Stunden, 11 Uhr.

Alterthumskunde.

Sophokles' Theaterwesen und dramatische Kunst wird erörtern und dessen Antigone erklären Prof. *Wieseler*, drei Stunden, 5 Uhr.

Umriss der Griechischen und Römischen Religions- und Kunstsymbolik: Prof. *Wieseler*, Mittw. u. Sonnab. 10 Uhr.

Im k. archäologischen Seminar wird Prof. *Wieseler* ausgewählte Kunstwerke erklären lassen, Sonnabend 12 Uhr. Die schriftlichen Arbeiten der Mitglieder wird er privatissime beurtheilen.

Orientalische Sprachen.

Die Vorlesungen über das A. und N. Testament siehe unter *Theologie* S. 555 f.

Arabische Grammatik nach Kosegarten: Prof. *de Lagarde*, vier Stunden, 11 Uhr.

Unterricht in der arabischen Sprache ertheilt Prof. *Bertheau*, Dienst. und Freit., 2 Uhr.

Literaturgeschichte der Araber: s. *Literaturgeschichte* S. 567.

Seinen Syrischen Cursus, und zwar diesmal für Geübtere, setzt Prof. *de Lagarde* fort, Mittw. 10—12 Uhr, öffentlich.

Grammatik des Sanskrit: Prof. *Benfey*, Mont. Dienst. Donnerst., 4 Uhr.

Interpretation des Rigveda und Sa
Prof. *Benfey*, Dienst. Donnerst. u. Freit.

Griechische und lateinische

Hermeneutik u. Kritik: Prof. *Sauppe*
Donnerst. u. Freit., 9 Uhr.

Sophokles Antigone: s. *Alterthumskun*

Frösche des Aristophanes: Prof. *von L*
den, 10 Uhr.

Platons Philebus, Aristoteles Politik, A
und Metaphysik: s. *Philosophie* S. 561 f.

Geschichte der römischen Beredsamkei
geschichte S. 567.

Horatius ausgewählte Gedichte: Prof.
Dienst. Donnerst. Freit., 2 Uhr.

Im k. philologischen Seminar leitet d
Arbeiten und Disputationen Prof. *Sau*
von 11—1 Uhr: lässt Ps. Xenophons S
Staatsverfassung der Athener erklären P
Montag u. Dienstag, 11 Uhr; lässt das v
Virgils Georgica erklären Prof. *von Leu*
und Freitag, 11 Uhr, alles öffentlich.

Im philologischen Proseminar leiten d
Arbeiten und Disputationen die Proff. *v*
woch 10 Uhr), *Sauppe* (Mittwoch 2 Uhr)
(Sonnab. 11 Uhr); lässt Xenophons S
Wachsmuth, Sonnabend, 11 Uhr, Vergi
der Georgica Prof. *v. Leutsch* erklären,
alles öffentlich.

Deutsche Sprache.

Die Grundzüge der altnordischen Spr
Müller, Dienst. und Freit., 10 Uhr.

Uebersicht der althochdeutschen Lit
klärung der wichtigsten althochdeutsch
mäler: Dr. *Wilken*, Mittw. und Sonnab

Erklärung des Nibelungenliedes (neb
tung über die deutsche Heldensage): P
vier Stunden, 3 Uhr.

Den Gregorius Hartmanns von Aue erl
ken, zwei Stunden, 10 Uhr, unentgeltlic

Ueber Goethes Leben und Schriften:
Mittw. 5 Uhr, öffentlich.

Die Uebungen der deutschen Gesellschaft leitet Prof. *W. Müller*, Dienst., 6 Uhr.

Geschichte der mhd. u. neueren deutschen Literatur: s. *Literärgeschichte*, S. 567.

Neuere Sprachen.

Uebungen in der englischen Sprache: Prof. *Th. Müller*, Donnerst. Freit. und Sonnabend, 12 Uhr.

Geschichte der französischen Sprache: *Derselbe*, Mont. Dienst. Donnerst., 9 Uhr.

Uebungen in der französischen Sprache: *Derselbe*, Mont. Dienst. Mittw., 12 Uhr.

In der romanischen Societät wird *Derselbe*, Freit. 9 Uhr, öffentlich ausgewählte provenzalische Dichtungen erklären lassen.

Schöne Künste. — Fertigkeiten.

Geschichte der Malerei (nach seiner Uebersicht der Bildhauer- und Malerschulen, Göttingen 1860): Prof. *Unger*, Dienst. Donnerst. Freit. 3 Uhr, mit Erläuterungen durch zahlreiche Abbildungen.

Unterricht im Zeichnen, wie im Malen, ertheilen Zeichenmeister *Grape*, und, mit besonderer Rücksicht auf naturhistorische und anatomische Gegenstände, Zeichenlehrer *Peters*.

Geschichte der neueren Musik von Palestrina bis in die letzte Zeit: Prof. *Krüger*, zwei Stunden.

Harmonie- und Kompositionslehre, verbunden mit praktischen Uebungen: Musikdirector *Hille*, in passenden Stunden.

Zur Theilnahme an den Uebungen der Singakademie und des Orchesterspielvereins ladet *Derselbe* ein.

Reitunterricht ertheilt in der K. Universitäts-Reitbahn der Univ.-Stallmeister *Schweppe*, Mont., Dienst., Donnerst., Freit., Sonnab., Vormitt. von 8—12 und Nachm. (ausser Sonnab.) von 3—4 Uhr.

Fechtkunst lehrt der Universitätsfechtmeister *Grüneklee*, Tanzkunst der Universitätstanzmeister *Höltzke*.

Oeffentliche Sa

Die *Universitätsbibliothek* ist g
Donnerstag und Freitag von 2 b
abend von 2 bis 4 Uhr. Zur Ar
erhält man jedes Werk, das ma
verlangt; über Bücher, die man
wünscht, giebt man einen Schein
Professor als Bürgen unterschrie

Ueber den Besuch und die B
anatomicum, des *physiologischen*
gischen Sammlung, der *Samml*
Modellen, des *zoologischen* und *e*
des *botanischen Gartens*, der *S*
schen Cabinets, der *mineralogisch*
paläontologischen Sammlung, der
des *archäologischen Museums*, de
Bibliothek des k. philologischen S
schen Apparats, bestimmen be
Nähere.

Bei dem Logiscommissär, Ped
können die, welche Wohnungen
Preise, als andere Umstände Aus
im voraus Bestellungen machen.

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

6. August. **№ 21.** 1873.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften,

Ueber die Fourierschen Reihen

von

Professor Dr. **Paul du Bois-Reymond**

in Freiburg im Breisgau.

Der Kön. Gesellschaft vorgelegt von Ernst Schering.

Bei Fortsetzung seiner Untersuchungen über die allgemeine Theorie der willkürliche Functionen darstellenden Integrale und Reihen ist der Verfasser nachfolgender Mittheilung zu einigen neuen Ergebnissen gelangt, welche speciell die Fourier'schen Reihen angehen, und erlaubt sich dieselben einer hohen Societät in kurzer Uebersicht hiermit vorzulegen.

Ueber Darstelbarkeit s
nen durch Fouriers

1.

Im Jahre 1829 veröffen
Dirichlet seinen berühmte
dass die Fouriersche R

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)$$

im Intervall $-\pi < x <$
$f(x)$ stetig ist, den Wer
ausgesetzt, dass $f(x)$ i
$\leq x \leq +\pi$ endlich ist u
liche Anzahl Maxima

Wenn er hierdurch schon
kalischen Anwendungen stö
Bedenken gegen die Legiti
ckelung, deren ihr Entdeck
ster werden können, zerstreu
Schlusse seiner Abhandlung
gehenden Satz in bestimmte
dessen Beweis jene Formel z
phischer Bedeutung wäre erh
sie, um nur das Nächstlieg
so mannigfaltigen Eigenschaf
stetigen Function, in einen
schen Ausdruck vereinigt hab
weis hat Dirichlet nicht v
indessen den Glauben an den
digten Satz nicht verloren zu
oder weniger ist die Ueberz
weiterten Gültigkeit der Fo

ckelung auch in das allgemeine mathematische Bewusstsein eingedrungen.

Wenn von möglichen Ausnahmen die Rede war, so wurden sie allenfalls in dem Gebiete solcher Functionen vermuthet, welche längs endlicher Intervalle Punkt für Punkt mit Singularitäten behaftet sind, und denen man wenigstens in den Anwendungen auf physikalische Probleme sicher nicht begegnen wird. In schwerlich anders zu deutender Weise hat sich neuerdings Riemann über diese Frage geäussert [5]). Denn, wenn er sagt, dass die Functionen, auf welche die Dirichlet'sche Untersuchung sich nicht erstreckt, in der Natur nicht vorkommen, so hat er sicherlich nicht solche Functionen gemeint, die nur bei Annäherung an einzelne Argumentwerthe unendlich viele Maxima erhalten, auf welche sich allerdings die Dirichlet'sche Untersuchung auch nicht erstreckt: er kann sie nicht gemeint haben, weil solche Functionen in der Physik sehr häufig vorkommen, — jeder oscillatorische Vorgang, welcher der Ruhe asymptotisch sich nähert, und von der reciproken Zeit abhängig gedacht ist, entspricht einer Function, die bei Annäherung $\frac{1}{t} = 0$ unendlich viele Maxima erhält.

2.

Verfasser dieser Mittheilung gehört zu den Mathematikern, welche erhebliche Anstrengungen gemacht haben, um das Gültigkeitsgebiet der Fourier'schen Reihe zu erweitern und jenem in der Dirichlet'schen Behauptung gesteckten hohen Ziele sich zu nähern. Den redlich entrich-

teten Tribut an Zeit und Mü
auf Misserfolg, bis in ihm d
schliesslich zur Ueberzeugun
möglichem nachstrebe, und d
Satz gar nicht existire. Nun
der überkommenen Anschau

Einige Ueberlegung erg
gungen, unter welchen die
bei durchgängiger Endlich
der darzustellenden Functio
mentwerthe keine endliche
haben kann. Diese Bedin
einer gewissen Art der
Maxima einer Function $f(x)$
einen Argumentwerth x_0, b
der Fourier'schen Reihe u
wenn die Function durchwe
werth x_0 eingeschlossen, st
Argumentwerth ausgenomm
quotienten es ebenfalls sind
stellung solcher in eine Fou
entwickelbaren Functionen is
und muss in dieser kurzen
sen werden. Es wird vie
Princip darzulegen, nach w
sind.

3.

Man weiss, dass es dazu
eine Function $f(x)$ zu erklä
Limes $h = \infty$ des Integra

$$\int_0^a d\alpha f(\alpha) \frac{\sin}{\sin}$$

nicht endlich und bestimmt ist, und hierbei kömmt es wieder nur auf das Verhalten von $f(x)$ in unmittelbare Nähe $x = 0$ an.

Wir wollen mit dem Ausdruck Dichtigkeit der Maxima der Function $f(x)$ an der Stelle $x = x_1$ bezeichnen die Längeneinheit, dividirt durch die Summe der Entfernungen des x_1 von den beiden nächsten Maximis von $f(x)$, bei welcher Definition die Dichtigkeit der Maxima eine stetige Function von x_1 ist.

Dies vorbemerkt, setzen wir $f(\alpha) = \varrho(\alpha) \sin \psi(\alpha)$ und nehmen zunächst an, dass $\psi(\alpha)$ für $\alpha = 0$ ohne Maxima unendlich und $\varrho(\alpha)$ ebenso Null wird. Dann wird auch die Dichtigkeit der Maxima von $f(\alpha) = \varrho(\alpha) \sin \psi(\alpha)$ für $\alpha = 0$ ohne Maxima unendlich.

Betrachtet man weiter das Product $f(x) . \frac{\sin hx}{\sin x}$, um es in Bezug auf seine Zeichenwechsel zu prüfen, so übersieht man leicht, dass für jeden noch so grossen Werth von h zwischen $x = 0$ und einem Werth $x = x'$ die Dichtigkeit der Maxima von $f(x)$ grösser als die von $\frac{\sin hx}{\sin x}$, von x' bis zu einem Werth x'' nahebei gleich, von x'' ab kleiner sein wird. Im ersten Intervall finden bei zunehmenden h dauernd Zeichenwechsel statt, im zweiten periodisch wiederkehrend nahebei keine, im dritten Intervall sind wieder dauernd Zeichenwechsel.

Dies führt zu der Einsicht, dass, wenn der Limes von

$$\int_0^a d\alpha \, f(\alpha) \frac{\sin h\alpha}{\sin \alpha}$$

unendlich werden soll, man

$$\int_{x'}^{x''}$$

wird verdanken können,
gativen Theile die positiver
gekehrt.

Es scheint nun, dass u
nahmen über $\psi(\alpha)$ und $\varrho(\alpha$
lichwerden nie stattfindet[6]
haupt ein Unendlich- ode
jenes mittleren Integrals u
die Function $\varrho(\alpha) \sin \psi(\alpha)$
geeignet sein, weil die Stre
Minimum der Zeichenwechs
ist. Wir müssen sie also

4.

Ich führe zunächst gew
Arguments x ein, mit fo
Das erste gehe von $x = a$
das zweite von x_1 bis x_1
und es sei:

$$\Delta_1 > \Delta_2 > \ldots, \quad \Delta_\infty = 0$$

Ferner seien $k_1, k_2, \ldots$
Bedingung

$$k_1 > k_2 > \ldots,$$

erfüllen.

Da die Dichtigkeit der Maxima von $\sin kx$ für jeden Werth von k constant ist, so wird eine Function $f(x)$, welche in den Intervallen Δ_1, Δ_2, . . . resp. die Werthe $\sin k_1 x$, $\sin k_2 x$, . . . erhält, in jedem dieser Intervalle constante Dichtigkeit ihrer Maxima haben, und diese Dichtigkeit wird von Intervall zu Intervall springen, bis zu schliesslich unendlichen Werthen.

Setzt man also die unstetige Function, die in den Intervallen Δ_1, Δ_2, . . . die Werthe $k_1 x$, $k_2 x$, . . . annimmt, gleich $\psi(x)$, so wird $f(x) = \varrho(x) \sin \psi(x)$, bei zweckmässiger Verfügung über die Intervalle Δ und die Grössen k, das möglichst grosse Stück ohne Zeichenwechsel:

$$\int_{x_p}^{x_{p-1}}$$

des Integrals:

$$\int_0^a d(\alpha)\, \varrho(\alpha) \sin \psi(\alpha) \frac{\sin h\alpha}{\sin \alpha}$$

ergeben müssen. Nunmehr findet denn allerdings ein Unendlichwerden des Integrals:

$$\int_{x_p}^{x_{p-1}} d\alpha\, \varrho(\alpha) \sin \psi(\alpha) \frac{\sin h\alpha}{\sin \alpha}$$

statt, z. B. wenn:

$$x_p = \frac{a}{\prod_{0}^{p-1}(2^q+1)}, \quad k$$

angenommen wird.

Noch ist die Function sin
unstetig. Mann kann zunä
$\psi(\alpha)$ selbst stetig machen
sorgt, dass die an den Spr
aneinanderstossenden Werth

Vielfache von π sind, wo
Weierstrass aufmerksam
Dann kann man aber auch
Differentialquotienten stetig
für $\psi(x)$ eine mit allen i
tienten stetige Function $\Psi($
ihr beliebig nahe anschliess
dene Arten möglich ist.

Der Verlauf von $\psi(x)$ ist
welche mit unendlich viel
unendlich wird. Die nic
stetigen Functionen si
ihrer einfachsten Er
tionen der Form

$$f(x) = \varrho(x) \sin$$

wo $\varrho(x)$ mit x ohne Ma
det, und $\Psi(x)$ bei ge
mendem x mit unendl
mis stetig unendlich

Ueber die Bedingungen für die Darstellbarkeit einer Function durch Fouriersche Reihen.

5.

Dieses Resultat hat die sehr unerfreuliche Seite, dass fortan für Beweise, welche die Entwickelung. unbekannter Functionen nach Fourier'schen Reihen benutzen, nicht allein deren Stetigkeit festzustellen ist, wie man dies bisher fast immer für genügend hielt, sondern, dass auch über den Differentialquotienten etwas bekannt sein muss, woraus erhebliche Schwierigkeiten erwachsen können. Auf alle Fälle, da der Fourier'schen Entwickelung schon innerhalb des Gebietes der gewöhnlichen Functionen die Grenzen ihrer Gültigkeit gezogen sind, so erhält das Problem, ihr Legitimitätsgebiet genau festzustellen, erhöhte Wichtigkeit.

6.

Herr Lipschütz[7]) hat bereits die Untersuchung erledigt, wie weit die Beschränkungen der darzustellenden Function, welche der eingangs angeführte Satz enthält, durch den Gang des Dirichlet'schen Beweises geboten sind, und ist zu der neuen Bedingung gelangt, dass es für die Gültigkeit der Formel

$$F \ldots . \frac{\pi}{2} f(0) = \lim_{h=\infty} \int_0^a d\alpha f(\alpha) \frac{\sin h\alpha}{\sin \alpha}$$

genügt, wenn in irgend ei
Intervall $0 \leqq x \leqq x_0$ die Dif
nicht langsamer wie eine
wird. Wenn diese Beding
hung auch über die Dirich
so hat sie doch den doppe
stens nicht einmal alle durch
Bedingung gestatteten Fäl
zweitens eine gewiss nicht
begründete Clausel zu enth
let'sche Bedingung enthäl
Voraussetzung über das M
renz $f(x+\delta)-f(x)$ in d
Function nicht wächst oder
ner ist die Forderung, da
allein für $x = 0$, sonder
$x = 0$ anstossenden Streck
ten habe, eine Clausel, die
überflüssig ist, da man von
aus welcher der Werth $x =$
beweisen kann, dass sie
Limes des Intervalls bleibt

7.

Man erhält eine and
eine sehr einfache Anwendu
Dirichlet'schen, welche
einschliesst, und für den A
weiteren Spielraum, wie
gewährt, aber ihrerseits v
hat, von der Function $f($
quotienten zu verlangen.

Sie lautet: die For
das Integral

$$\int_0^a f'(\alpha)\, d\alpha$$

absolut convergent ist.

Da die Einschränkung von $f(x)$, einen Differentialquotienten zu besitzen, sicherlich auch nicht der Natur der Fourier'schen Reihen eigenthümlich ist, indem Hr. Weierstrass gerade mit ihnen seine Functionen ohne Differentialquotienten darstellt, so konnte ich bei dieser Bedingung nicht stehen bleiben, und stellte, auf demselben Wege vorgehend, schliesslich eine Bedingung dar, bei der ich mich beruhigt habe, welche keinen Differentialquotienten enthält, und einen viel grösseren Spielraum der darzustellenden Function gewährt, als die drei vorigen. Diese Bedingung ist folgende. Die Formel F gilt, wenn das Integral

$$\int_0^a d\alpha \frac{d}{d\alpha} \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha d\beta\, f(\beta)$$

absolut convergent ist.

Dies ist z. B. der Fall, wenn sich $f(x)$ auf die Form bringen lässt:

$$\text{constans} + \frac{\varphi(x)}{x l_0 \frac{1}{x} l_1 \frac{1}{x} \ldots l_r^{\mu} \frac{1}{x}},$$

$$l_0 \frac{1}{x} = \frac{1}{x}, \quad l_1 \frac{1}{x} = \log \frac{1}{x}, \quad l_2 \frac{1}{x} = \log \log \frac{1}{x}, \ \ldots,$$

$$\mu > 1$$

in der $\varphi(x)$ endlich sei, und
0, 1, 2, ... vorstellt, in wel
schütz'sche Bedingung enth
tegral convergirt aber auch
dern Fällen absolut, da die
soluten Convergenz Nichts ü
Unendlichwerdens der Maxim
ter dem Integralzeichen vors

Uebrigens finden die bei
stellten, die Integrale

$$\int_0^a d\alpha\, f'(\alpha), \qquad \int_0^a d\alpha \frac{d}{d\alpha} \frac{1}{\alpha}$$

betreffenden Bedingungen i
Theorie der darstellenden In
ihre wahre Deutung und un
auf ich hier indessen nicht

Für die Fourier'sche R
hende Bedingung allerdings n
wendige, wie ich durch
habe, sie kommt ihr aber s
ebenfalls an Beispielen erka
nicht darstellbaren Function
dieser Mittheilung die Rede

Anmerkung

1) Crelle Journal 4. Bd. p. 15
2) Kürzerem Ausdruck zu Lieb
griff des Maximums auf unstetige
indem wir sagen, eine Function f
Maximum, wenn die ersten Functi

und $x > a$, die von $f(a)$ verschieden sind, kleiner als $f(a)$ sind.

3) Die Stelle (l. c. p. 169) lautet:

Il nous resterait à considérer les cas ou les suppositions que nous avons faites sur le nombre des solutions de continuité et sur celui des valeurs maxima et minima cessent d'avoir lieu. Ces cas singuliers peuvent être ramenés à ceux que nous venons de considérer. Il faut seulement pour que la série (8) présente un sens, lorsque les solutions de continuité sont en nombre infini, que la fonction $\varphi(x)$ remplisse la condition suivante. Il est nécessaire qu'alors la fonction $\varphi(x)$ soit telle que, si l'on désigne par a et b deux quantités quelconques comprises entre $-\pi$ et $+\pi$, on puisse toujours placer entre a et b d'autres quantités r et s assez rapprochées pour que la fonction reste continue dans l'intervalle de r à s. On sentira facilement la necessité de cette restriction, en considérant que les differents termes de la série sont des integrales définies et en remontant à la notion fondamentale des intégrales. On verra alors que l'intégrale d'une fonction ne signifie quelque chose, qu'autant que la fonction satisfait à la condition précédemment énoncée. On aurait un exemple d'une fonction qui ne remplit pas cette condition, si l'on supposait $\varphi(x)$ égale à une constante déterminée c, lorsque la variable obtient une valeur rationelle, et égale à une autre constante d, lorsque cette variable est irrationelle. La fonction ainsi définie a des valeurs finies et déterminées pour toute valeur de x, et cependant on ne pourrait la substituer dans la série, attendu que les differentes intégrales, qui entrent dans cette série, perdraient toute signification dans ce cas. La restriction que je viens de préciser et celle de ne pas devenir infinie, sont les seules auxquelles la fonction $\varphi(x)$ soit sujette, et tous les cas qu'elles n'excluent pas peuvent être ramenés à ceux que nous avons considérés dans ce qui précède.

4) Nach einer mündlichen Mittheilung des Herrn Weierstrass.

5) Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe, pag. 16. Die Stelle lautet:

In der That für alle Fälle der Natur, um welche es sich allein handelte, war sie (die Frage nach der Convergenz der Fourierschen Reihen) vollkommen erledigt;

denn so gross auch unsere Unwis
sich die Kräfte und Zustände de
Zeit im Unendlichkleinen ändern,
sicher annehmen, dass die Funct
die Dirichlet'sche Untersuchung n
Natur nicht vorkommen.

6) Es gelingt zu zeigen, dass
die Zeichenwechsel periodisch wie
hören, kein Unendlichwerden des
Schwierig ist aber der Nachweis,
tegrals endlich bleibt.

7) Borchardts Journal 63. Bd.

Verzeichniss der bei de
schaft der Wissenschafte
Druckschrif

Mai und Juni

(Fortsetzun

Resumé des observations sur la
Physique du globe. 1871.

Martyn Paine, physiology of the
York 1872. 8.

— the institutes of medicine. E

G. E. Ellis, memoir of Sir Ben
Rumford. Published by the
Arts and Sciences, Boston. Ph

The American Ephemeris and
Washington 1872. gr. 8.

Archives of Science and Trans
County Society of Natural Scie
Nr. IV. Vol. I. October 1872.

Bulletin de la Société Ouralienne
Naturelles. T. I. 1er cahier.
gr. 8.

Juli 1873.

Nature 189. 190. 191.

Monatsbericht der Kōnigl. Preuss. Akademie der Wissenschaften. Februar 1873.

Bulletin of the Buffalo Society of Natural Sciences. Vol. I. Nr. 1. Buffalo 1873. 8.

Proceedings of the London Mathematical Society. Nos. 54. 55. 8.

Jahres-Bericht der Lese- und Redehalle der deutschen Studenten zu Prag. Vereinsjahr 1872—73. Prag 1873. 8.

Sitzungsberichte der königl. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften in Prag. Nr. 3. 1873. 8.

Bulletin de l'Académie R. des Sciences etc. de Belgique. 42e année, 2e série, tome 35. Nr. 5. Bruxelles 1873. 8.

Extrait du Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques par M. R. Lipschitz. Paris 1873. 8.

ТРУДЫ. ТОМЪ I. ВЫПУСКЪ II. САНКТПЕТЕРБУРГЪ. T. II. — B. I. 1872. 73. gr. 8.

Nature 192. 194. 195. 196.

Mémoires de l'Académie Imp. des Sciences de St.-Pétersbourg. VIIe série. T. XVIII. Nr. 8. 9. 10 et dernier. T. XIX. Nr. 1. 2. St.-Pétersbourg 1872. 4.

Bulletin de l'Académie Imp. de St.-Pétersbourg. T. XVII. Nr. 4. 5 et dernier. T. XVIII. Nr. 1. 2. Ebd. 4.

Bulletin de la Société Imp. des Naturalistes de Moscou. Année 1872. Nr. 4. Moscou 1873. 8.

Transactions of the R. Society of Edinburgh. Vol. XXVI. Part IV. For the Session 1871—72. Edinburgh. 4.

Proceedings of the R. Society of Edinburgh. Session 1871—1872. Ebd. 8.

Transactions of the Zoological Society of London. Vol. VIII. Part. 4. 5. London 1873. 4.

Proceedings of the Scientific Meetings of the Zoological Society of London. For the year 1872. Part III. June December. London 8.

Bulletin et Mémoires de l'Université Imp. de Kazan 1873. Nr. 1 (en russe). Kazan 1872. 8.

Académie des Sciences et Lettres de Montpellier:

Mémoires de la Section de Médecine. T. IV. — III. IV. V. Fascicule. Année 1865—69.

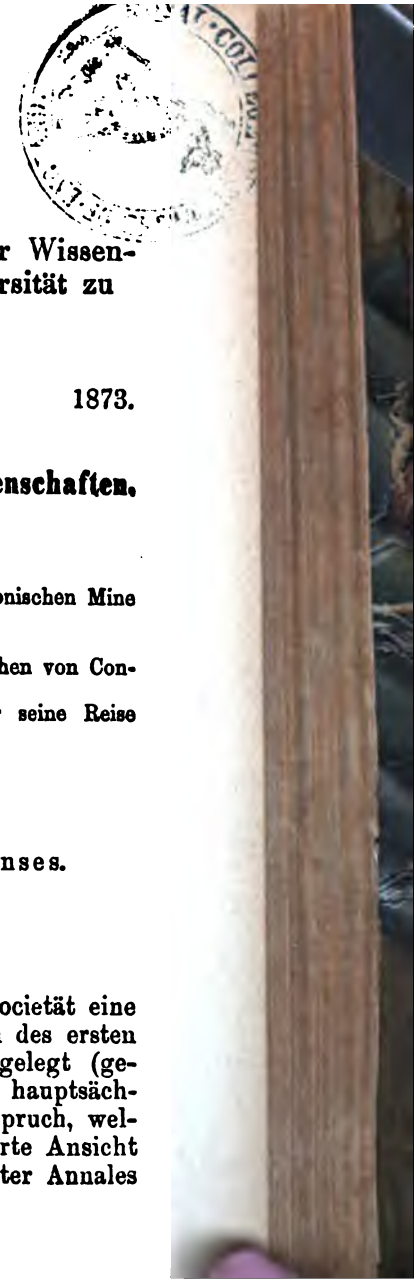
Mémoires de la Section des Sciences. T. VI. — II. III. Fasc. Année 1865. 56. T. VII. — I., II., III.,

IV. Fasc. Année 1867—70
Année 1871. Montpellier
Mémoires de la Section des
III., IV. Fasc. Année 186
et IIIe Fasc. Année 1869
Nederlandsch Kruidkundig Arc
deelingen der Nederlandsche
Nijmwegen 1873. 8.
Jahrbuch der k. k. geologisch
1873. Bd. XXIII. Nr. 1.
Wien. gr. 8.
Verhandlungen der k. k. geolo
1873. 8.
Dr. A. Kornhuber, über ei
aus Lesina. Ebd. 1873. gr
F. de Mueller, fragmenta
Vol. VI. Melbourne 1867—
General-Bericht über die Eur
das Jahr 1872. Berlin 1873
XXII. Jahresbericht der Naturh
nover von Michaelis 1871—
Dr. Kriechbaumer, Bemerk
zu Kittels und Kriechbaumer
der Fliegen etc. Nachtrag
Naturhistor. Gesellsch. zu N
R. Claudius, über einen ne
Bezug auf stationäre Bewegu
Sitzungsberichte der königl. b
sensch. in Prag. Nr. 4. 18
Berichte des naturwissensch.-m
Jahrg. III. Heft 1. Innsbru
Gustav Rose. Nekrolog von

In ungarische

A Mag. tudom. Akad. Értesí
Ungarischen Akademie der
Lief. 10—17. Pest 1871. —
1872.
Szarvas, Gáb., a Magyar ige
pora). Pest 1872.

(Fortsetzung



Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

13. August. № 22. 1873.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 2. August.

Ewald: Ueber die Eintheilung der Babylonischen Mine in Sékel.
Waitz, Ueber die Annales Sithienses.
Voss, Ueber die Geometrie der Brennflächen von Congruenzen. (Vorgel. von Stern).
Wieseler, Archäologischer Bericht über seine Reise nach dem Orient.

Ueber die Annales Sithienses.

Von

G. Waitz.

Vor neun Jahren habe ich der Societät eine kleine Abhandlung über die Quellen des ersten Theils der Annales Fuldenses vorgelegt (gedruckt Nachrichten 1864 Nr. 3), die hauptsächlich veranlasst war durch den Widerspruch, welchen eine früher von mir geäusserte Ansicht über das Verhältnis kurzer sogenannter Annales

Sithienses zu den Fuldens
Dieser wurde von dem Oppo
son, auch später festgehalt
D. G. IV, S. 575), ohne
Ausführung etwas enthalte
Erwiderung meinerseits Ar
Mehr fiel es ins Gewicht, al
zweiten Auflage von Deut
quellen im Mittelalter (S.
er habe »bei genauer eigene
sons Beweisführung völlig
ohne jedoch hier etwas Nä
theilen. Ich durfte die S
sich beruhen lassen, da bal
Jahrbüchern Karl d. Gr.
Stelle anführte, die mir d
sonders schlagend darzulege
ich deshalb nur kurz verwie
653). Wattenbach behar
dritten eben erschienenen
bei seiner Ansicht und erkl
gen für ganz unerheblich.
durch sie nicht überzeugt w
weitig bekannt, und schei
man sieht, was er alles f
die aufgestellte Behauptu
Aber es dünkt mich doch
nis für den Zustand unsere
viel gepriesenen Quellenkrit
nicht möglich sein sollte, e
ein rein literarhistorisches
Geschichte selbst nichts aus
auch nicht um das Verhä
Quellen, sondern nur um d
liegender Texte handelt, zu
bringen. Ich habe deshalb
mal in den von mir geleit

bungen vornehmen lassen, zunächst ohne jede Rücksicht auf die früher verhandelten Punkte, und glaube mich nicht die Mühe verdriessen lassen zu dürfen, das Resultat hier in einiger Weitläuftigkeit darzulegen.

Die Sache steht so, dass die Ann. Sithienses mit dem Jahr 548 beginnen, aber bis 726 nur 13 ganz kurze Notizen haben, von denen 11 nur Namen Fränkischer Könige sind, ausserdem 605: Gregorius obiit, und 717 eine Notiz über die Schlacht bei Vincy, die mit der der Annales Laubacenses (SS. I, S. 7) am nächsten zusammenstimmt. Mit 741 beginnt der Theil welcher Verwandtschaft mit den Ann. Fuldenses hat, während diese schon 714 anfangen und von da bis 741 ziemlich in derselben Weise wie nach diesem Jahre die wichtigsten Ereignisse der Fränkischen Geschichte mit Benutzung älterer Aufzeichnungen erzählen.

Eine Hauptquelle sind die Ann. Laurissenses minores. Wie sich die Fuldenses zu ihnen verhalten, mögen folgende Stellen zeigen.

A. L. m.	A. F.
23. Karlus tributarios fecit Saxones.	737. Karolus Saxones tributarios fecit.
24. Karlus regionem Provinciae ingrediens, fugato duce Mauronto,	738. Karolus regionem Provinciam ingressus, Maurontum, qui dudum Sarracenos per dolum invitaverat, fugere compulit.
25. qui Sarracenos per dolum jam dudum invitaverat, cunctam Provinciam et maritima illa loca suae dicioni subegit.	739. Karolus Provinciam totam et cuncta ejus loca maritima suae ditioni subegit.
26. Karlus, Gothos superatos, Saxones et Frisones subactos, Sarracenos expulsos, Provinciales receptos,	740. Pax et quies regno Francorum per Karolum redditur ad tempus, Gothis superatis, Saxonibus

in loco qui dicitur Horoheim Griphonem cum Pippino pacificare cupiunt.

9. Idem Gripho non credens se Saxonibus neque Francis, de Saxonia Bajoariam petit . . .

contuli
pino v
Thurin
gresso
niam, s
vium C
loco qu
Horohe
xones o
tes, Gr
cum e
care cu
Gripho
nec S
nec Fr
credens
joariam

Wer hier abgeschrieben, kan
nen Augenblick zweifelhaft se
wirklich annehmen, dass F.
Darstellung aus S., den Inh
nommen, während doch auc
auf zurückgeht?

So wäre es 752, wo S. r

Hildericus rex, qui ultimus Me
peravit, depositus, et Pippinus re
est;

F. jedes dieser Worte, aber nac
et in monasterium missus est
in civitatem Suessionum a s
regem unctus, hinzufügt, v
hübsch bei einander ist, F. a
ihnen und S. mühsam zusam
müssten.

753 stimmen S. und F.
im Wortlaut, aber wo F. h
stulfum regem Langobardorn
nauer: contra Langobardos;

versus Heistulfum regem, und darnach hätten F. ihre Vorlage corrigiert.

Gleich daneben schreiben:

A. L. m.	A. F.	A. S.
Gripho Italiam cupiens penetrare, a Theodoino comite in valle Maurienna obprimitur.	Gripho, frater Pippini, cum Italiam petere conaretur, in valle Maurienna a comitibus fratris sui occisus est.	Gripho, frater regis, cum Italiam peteret conaretur, a comitibus fratris in Burgundia occisus est.

Die ganze Form des Satzes wäre in F. aus S., aber statt des hier mehr unbestimmt gesetzten »in Burgundia« wäre das ursprüngliche »in valle Maurienna« wieder hergestellt.

Und so Jahr für Jahr. F. hätten sich ein Vergnügen gemacht, die kurze verwaschene Fassung von S. zu copieren und dann immer aus der Quelle wieder zu vervollständigen, das Bessere und Ursprüngliche herzustellen.

Es ist ganz ohne Beispiel, ich sage dreist, es ist ganz unmöglich, dass ein Autor des 9ten Jahrhunderts so verfahren. Dagegen ist in all diesen Jahren auch nicht eine einzige Notiz, die sich in S. nicht vollständig aus F. erklärte. Haben sie einmal eine Aenderung oder einen Zusatz, so kennzeichnen diese entschieden den späteren Compilator.

754 sagen sie ganz geschmacklos: Haistulfus rex Langobardorum in Langobardia superatur; F. schliessen sich an L. m. an: Pippinus vero Italiam ingressus etc. 756 haben S.: in Ticino obsessus est; F. mit L. m.: Papiae (ebenso 773). 756 fügen S. ganz überflüssig hinzu: post re-

ditum Pippini in Frantis
haben F. nicht.

768 heisst es:

Vaifarius dux a Francis inte

Es ist das die Stelle,
wicht legte, und wie ich gl
obwohl bei solchen Unte
eine einzelne Stelle allein,
im ganzen die Entscheidu
L. m. sagen:

Pippinus omnem Aquitaniam
subdit, nec tamen nt voluit V
semper vastationi et fugae inten
nis peremptus et fugae et tyran

F. ziehen das zusammen:

Pippinus, interfecto Waipheri
acta, rediens.

S. aber haben:

Vaifarius dux a Francis inter

Gewiss konnte dies, was
(vgl. Oelsner, Jahrbücher P
aus der Fassung von F. en
aus L. m. Schöpften F. a
Verfasser den Irrthum eins
scheidung des »a Francis« i
denke, das kann nicht für w
aber dann die Bedeutung die
unerheblich sein.

Im Folgenden treten die
Quelle hinzu und bleiben es
aufhören. Das Verhalten i
stehen ihnen regelmässig nä
Angaben über Orte und ande

778.

A. F.	A. S.
Interea Saxones, Widukindo tyrannidi nitente, Francorum terminos usque ad Hrenum ferro et igne devastant; sed non multi revertuntur. Nam ab exercitu regis, quem contra eos miserat, in loco qui dicitur Liesi super flurium Adarna pars maxima eorum interfecta est.	Saxones Francorum terminos usque ad Renum ferro et igni devastant, nec inulti revertuntur. Nam ab exercitu regis, quem contra eos miserat, pars maxima eorum interfecta est.

779.

Karolus more suo Saxonum perfidiam in loco qui dicitur Hohholz per se ulciscitur et omnes acceptis firmat obsidibus in loco qui vocatur Medofulli.	Carlus more suo Saxonum perfidiam per se ulciscitur et eos acceptis firmat obsidibus.

Hätten F. aus S. abgeschrieben, so müssten sie wieder aus dieser Quelle die localen Notizen ausgesucht und künstlich eingefügt haben.

Nennt diese gleich darauf den dux Spolitinus Hildibrandus, so schreiben auch F.:

Hiltibrandus dux Spolitanus ad Karolum venit,

S. aber:

Hiltibrandus Langobardorum dux Spolitanus ad Carlum venit.

Bald durch Weglassungen, bald, aber freilich viel seltener, durch Zusätze entfernen sich diese weiter von der Quelle. Und welches andere Kennzeichen giebt es, um das Verhältnis verschiedener Texte zu bestimmen? Alles andere scheint mir unsicher, subjectiver Auffassung unterwor-

fen. Dieses aber, meine ich
fest.

Nur zwei Stellen finde ich
gesetzten Annahme einen ge
können. 817 sprechen F.
solis, während S. haben: Ecl
durch die Quelle, L. maj.,
es feststeht, dass S. in dem
zelne Notizen aus L. maj. ent
haben, so ist es wohl nicht z
der Verf. hier einmal einen
der nur auf einem Schreibfe
nicht: einer Handschrift, da
bekannten Codices übereinstin
auf den schon das folgende
merksam machen musste.

820 [1]) schreiben S.:

Tres exercitus de Frantia, Saxo
noniam contra Liudiwitum missi

Dass das durch Zusammenzi
Worten von F.:

Tres exercitus contra Liudewit
tuntur, quorum unus de Italia per
Saxonia per Carantanorum provinc
per Bajoariam et Pannoniam supe

werden konnte, unterlieg
Aber in der Quelle (L. maj.

tres illi exercitus contra Liude
rum unus de Italia per Alpes Nor
tanorum provinciam, tercius per B
superiorem intravit,

und da es schlecht genug p
aus Sachsen durch Kärnthen

1) Auf diese Stelle hat mich
bach besonders aufmerksam gema

so konnte man meinen, dass diese Angabe durch falsche Combination von L. maj. und S. entstanden sei. Allein unmöglich kann eine einzige solche Stelle etwas austragen. Der, wie ich gerne glaube falsche, Zusatz in F. erklärt sich hinlänglich aus dem Vorhergehenden in L. maj., wo es heisst:

deliberatum est, ut tres exercitus simul ex tribus partibus ad devastandam ejus regionem — mitterentur.

Von den tres partes wird Italien genannt; da konnten die beiden anderen nur Sachsen und Franken sein, und dies nahmen F. ohne weiteres auf, wie wiederholt sonst (816. 819) Sachsen und Ostfranken als Bestandtheile des Heeres hier und in den L. maj. genannt werden.

Die folgenden Jahre, die letzten in S., sind auch nur geeignet die volle Bestätigung der bisher gewonnenen Resultate zu geben.

821.

A. L. m.	A. F.	A. S.
Eminuit in hoc placito piissimi imperatoris misericordia singularis, quam ostendit super eos qui cum Bernhardo nepote suo in Italia contra caput ac regnum suum conjuraverunt, quibus ibi ad praesentiam venire jussis, non solum vitam et membra concessit, verum etiam possessiones judicio legis in fiscum redactas magna liberalitate restituit.	omnes, qui suo tempore in exilium missi fuerant, revocavit, et singulis in statum pristinum restitutis, possessiones quoque judicio legis in fiscum redactas magna liberalitate restituit.	omnes, qui suo tempore in exilium missi fuerant, revocavit et unumquemque in suum statum revocavit.

Der Text von F. beruht nicht, wie Simson meint (Forschungen IV, S. 578), auf Combination

von L. maj. und S., und e
tologie, sondern das »sing
num restitutis« entspricht
bra concessit« der Vorlage:
des Exils nnd der drohend
welche jenes als Gnade ei
schieden von der Zurückg
Güter, deren Restitution al
vorgehoben wird. S. kürze

Man vergleiche noch da

A. F.

Liudewitus, qui superiore a
pter exercitum contra se missu
Siscia civitate, ad Sorabos, qui
Dalmatiae partem obtinere dicu
giendo se contulit et iterum ad
tislum, avunculum Bornae duci
nisset, dolo ipsius interfectus e

Ueberblickt man die A
so sieht man, wie sie da
weit es möglich dem Umfa
kurze Uebersicht der wich
geben: kein Jahr umfass
Dabei finden sie Raum den
wöhnlichen Quelle ein paar
die auf die L. maj. zurückg
direct diesen entlehnt sei
Vermittelung verdankt we
auf eine ältere, der Zeit de
838) vorhergehende Abfass
früher hervorgehobene lü
wo zu den Worten: boun
tam Europam immaniter g
fügt wird (nach Wattenb
inde pulverum sparsoru

deutet entschieden späteren Ursprung an. Dass die Darstellung mit dem Jahre 823 abbricht, scheint ganz zufällig zu sein. Hat der Herausgeber nicht ganz schlecht gelesen, so finden sich Schreibfehler, die nur ein gedankerloser Abschreiber begeht (perfectus statt praefectus, erecta statt erepta, perpetrat statt perperam: jener hat das Richtige in Klammern beigefügt, also das Angegebene wirklich im Codex gefunden).

Die Fuldenses zeigen vor 741, wo S. anfangen, und nach 823, wo sie schliessen, ganz denselben Charakter, dasselbe Verhältnis zu ihren Quellen, dort besonders den L. min., hier den L. maj. Sie verhalten sich auch in dem was sie mit S. gemein haben ganz ebenso wie in den meist grösseren Stücken, die diesen fehlen, aber auf dieselben Quellen zurückgehen: sie schreiben fast nie ganz wörtlich ab, behandeln ihre Vorlage mit einer gewissen Freiheit, wenn auch, wie die angegebenen Beispiele zeigen, nicht eben mit sonderlicher Kritik oder historischem Verständnis. Dass ihr Autor, Enhard, für einen Theil seiner Arbeit die mageren nichts Eigenes darbietenden Sithienses zu Grunde gelegt, fortwährend, mitunter Satz für Satz, sie andersher ergänzt, dabei geschickt ihre Fehler vermieden, selbst ihre paar kleinen Zusätze oder eigenthümlichen Wendungen übergangen hätte, ist eine Annahme, die sich mit allem in Widerspruch setzt, was sonst auf dem Gebiet der Quellenkritik als Regel angesehen wird.

Ueber die Eintheilung
schen Mine in Sék

Von

H. Ewald.

Einer der Correspondente
der WW. vom J. 1867, Dr.
dis aus Bonn, ein Neffe u
ehrten Herrn Sekretärs Hau
zu früh für die Wissenschaft
hatte, ausser anderen für
schichtlichen Fächer wichti
züglich sein 1866 zu Berlin
sses Werk über »das Münz- M
wesen in Vorderasien bis auf
ssen« uns empfohlen, ein W
den weitausgedehntesten grün
sinnigsten Forschungen beru
alle die weiteren Fortschritte
nissen namentlich auch über
im Alterthume ausgehen m
Werk kann auch die Nothw
thümer der alten Völker E
des Morgenlandes in die er
sezen an einem grossen Bei
beweisen.

Indem wir jedoch hier
über die Eintheilung der M
nach Sékeln hervorheben, i
Absicht alles was mit diese
hängt zu berühren, sondern
von Dunkelheiten welche au
(soviel wir wissen) noch nich
Beiträge zu geben.

1. Wir gehen dabei vo
zeqiél 45, 12 aus welche viel

kel und zweifelhaft erschienen, auch noch in den neuesten Zeiten von Gelehrten unter uns so verschieden verstanden ist dass man auf den ersten Blick meinen könnte sie diene mehr zur Verdichtung als zur Zerstreuung jener Dunkelheiten. Doch liegt bei näherer Betrachtung kein Grund zu einer solchen Verzweiflung vor: vielmehr sollte man schon von vorne an vermuthen keine Stelle müsse zu diesem Zwecke so gute Dienste leisten können als sie. Der Prophet will hier ausdrücklich Jedermann ermahnen rechte Masse und Gewichte zu gebrauchen: er ermahnt aber nicht wie so viele seiner Vorgänger im Allgemeinen dazu, sondern hält es für nothwendig genauer ins Einzelne einzugehen, und bestimmt alles was er zu bestimmen für nothwendig hält durch ausdrückliche Zahlen. Bedenkt man nun dass Hezeqiel welcher auch sonst in seinem grossen Buche mehr als irgendein anderer Prophet von Massen und Gewichten redet, dieses Buch zunächst für die im Babylonischen Reiche zerstreustreuten Glaubensgenossen schrieb, auch zu dém Zwecke um sie zu einem ruhig gesetzlichen Leben in allem bürgerlichen Verkehre zu ermahnen, so könnte man meinen er habe dabei die damals in diesem Reiche gültigen Masse und Gewichte insofern im Auge als in jenen Zeiten die in Aegypten Phönikien und Palästina geltenden etwas von ihnen abweichen konnten. Der Zusammenhang seiner ganzen grossen Rede C. 40—48 und dazu die hier V. 13 ff. zunächst folgenden Worte begünstigen jedoch mehr díe Ansicht er habe einfach auf Reinhaltung der alten Masse und Gewichte dringen wollen. Jedenfalls aber musste er hier sehr genau reden: und dieses berechtigt uns vollkommen in seinen Worten ein sehr deutliches und zuverlässiges Zeugniss

über die damals im wirklic
Masse und Gewichte zu erv
len geschichtlichen Werth
den übrigen aus dem Altert
Zeugnissen nicht widerspre

Nimmt man nun diese
wie sie im Hebräischen W
scheinen sie zunächst so
Denn dass die Mine nach
gehörenden Sekel bestimmt
auffallend, sofern es keine
cken für den gewöhnliche
zu haben scheint. Aber a
gen wieviele Sekel eine M
um als voll zu gelten, finde
von Sekeln nach verschiede
und die Worte lauten so
übersezt só: »Zwanzig Sekel
kel, zehn und fünf — das
seyn!« Zu beachten ist j
nächst die blosse Sprache
dass die zwei Zahlen z e h n
rer Haltung nach nicht ga
z e h n seyn sollen: denn wi
len Sprachen [1]), werden auc
Zahlen von 11 bis 19 nich
dung mit u n d zusammeng
schon viel enger ohne ei
ja ursprünglich sogar nach
gewöhnlichen Weise durch
der gekettet, so dass man
Zahl 15 חֲמִשָּׁה עָשָׂר oder s

1) Die Durchgängigkeit die
sich aus einer uralten Abzählun
und 10 Zehen, welche noch je
vorkommt.

er חֲמִשָּׁה עָשָׂר[1]) erwarten müsste; aber auch diese schon wieder etwas losere Wortzusammensezung ist von חֲמִשָּׁה וַעֲשָׂרָה sogar in zweifacher Weise unterschieden, durch die Voranstellung der zehn und durch die Hinzufügung des und; und da dadurch zugleich die Zersprengung der für 15 im Hebräischen gesezlich gewordene Wortzusammensezung eigenthümlicher Art bedingt ist, so ist klar wie absichtlich die Rede hier die gewöhnliche Zahl 15 vermeiden wollte und wie wenig man hier an eine etwaige Verbesserung des Wortgefüges unter Umsetzung der beiden Wörter denken darf.

Allein da diese vier einzelnen Zahlen zusammen 60 ausmachen, die Mine aber ursprünglich (wie wir jetzt wissen) in 60 Sékel zerfiel, so ist soviel einleuchtend dass die vier Zahlen das volle Mass der Mine bestimmen sollen[2]): und die

1) Wie bei der Ausbildung des weiblichen Sinnes der so eng zusammengesezten Zahlen von 11—19 עֶשְׂרֵה in עֶשְׂרֵה sich wandeln könne, erklärt sich am leichtesten durch die bei der Umbildung eintretende allgemeine Verkürzung der ursprünglich weiblichen Bildung; denn dass eine solche zuletzt möglich sei, ist im LB. S. 452 der lezten Ausgabe bewiesen. Dadurch vereinfacht sich das S. 660 Gesagte noch etwas.

2) Diese Zahl 60 welche in uralten Zeiten das durchgreifende Grundgesez für alle Babylonischen Masse und Gewichte geworden seyn und deren grosse Bedeutung sich daher schon in den frühesten Zeiten bis in den äussersten Westen ebenso wie bis in das östliche Asien und von da bis in Amerika hinein verbreitet haben muss, erklärt sich aus der noch älteren Sitte von einer festen Zahl und so zunächst von 5 aus um éine Stufe weiter zu gehen und da zu schliessen; eine ähnliche Bedeutung empfing dann 8 nach 7 und 11 nach 10, auch in einzelnen Fällen 9 nach 8; aber 6, 60, 600 liegen hier überall zunächst vor. Beispiele von dem einfachen 6 finden sich bei den Hebräern im B. Ijob 5, 19 (da der Dichter dieses Buches

weitere Frage ist nur warun
für 60 gesetzt ist. Man kö
vermuthen einst seien Goldr
schiedenen Betrage von 20,
im Umlaufe gewesen und
zählt: dies würde jedoch i
nachzuweisen seyn; und die
Hézeqiél in diesem Falle hä
müssen. — Es bleibt dah
anzunehmen Hézeqiél habe
60 in diese vier Einzelnhe
Gesammtzahl durch dies Mit
zu bezeichnen und im Rede
vor jeder Veränderung zu sc
die vier Zahlen genau zusan
zahl ergibt sich so desto si

Dass man im Alterthum
gewiss; und ein ähnlicher F
bei Geldsachen in aller Näh
Jéremjá, in vieler Hinsich
qiél's im Reden und Schreil
die Geld- und Kaufgeschä
wichtigen Erzählung c. 32
den Kaufwerth nennen will
ihm (dem Verkäufer) das G
ben Sékel und zehn da
die Zahl siebzehn hier ganz
che in 7 und 10 aufgelöst.
nicht ungewöhnlich, nicht

überall gerne die Farben der U
wie bei den Indern (*Alterth.* S.
als die älteste Rundzahl geht d
zurück.

1) Diesen richtigen Sinn der
in der zweiten Ausgabe der P
des II, S. 558 kurz hervorgehob
nur weiter aus.

und deshalb in kleine Glieder zerfallend, sondern ganz einfach erzählend; dennoch wird die Zahl um sie so bestimmt als möglich wie vor Augen und Ohren aller Zeugen festzustellen, so zertheilt. So bestimmt drückte man sich also in jenen Gegenden während des siebenten und sechsten Jahrhunderts vor Chr. bei Geldsachen aus: vielleicht aus nothwendig gewordener Vorsicht noch bestimmter als zu Abraham's Zeiten, obgleich man auch damals schon bei solchen Geldsachen gerne so bestimmt redete wie »er wog ihm das Geld dar, so dass es 200 Pfund[1]) öffentlich gültiges Geld war« Gen. 25, 16.

2. Bei jener Stelle Hézeqiél's aber müssen wir hier weiter als höchst merkwürdig die Uebersezung der LXX berücksichtigen. Diese scheint selbst zunächst vor allerlei Sonderbarkeiten so dunkel und unsicher als möglich zu seyn; und kann uns dennoch wohl verstanden um einen wichtigen Schritt weiter fördern. Die jezt gewöhnlich gewordene Lesart des *Vat.* gibt in

1) Pfund seze ich hier ebenso wie in den zwei Abhh. über die Massilische und die grosse Karthagische Inschrift (in unsern Abhh. von 1849 und 1864, auch in besonderen Abdrücken) nur um ein Deutsches Wort zu sezen für Sékel *σίγλος*. Denn dieses Wort bedeutet Gewicht, und entspricht insofern dem *pondus*; nur dass man bei ihm ursprünglich an das Gewicht von 20 Gera d. i. Körnern denken soll und immer כֶּסֶף Silbers hinzusezte. Die Syrer gebrauchten jedoch statt dieses Phönikischen Wortes von derselben Wurzel aus ein verschieden klingendes Wort ܡܬܩܠܐ, wie Barhebr. chr. p. 282, 10. Cureton's *spic. syr.* p. 23, 15, wovon die Araber ihr مِثْقال haben; und da dieses schliesslich für den Goldsékel gewöhnlich geworden, so entspricht es ganz dem Englischen *a pound.*

der That gar keinen Sinn
ihre Stelle die des *Alex.*
für *πέντε σίκλοι πέντε καὶ*
τήκοντα liest *οἱ πέντε σί*
σίκλοι δέκα, καὶ πεντηκ. (u
aus dieser Lesart durch
Abschreibers jene entstehe
einen zwar ganz neuen ab
geschichtlich denkbaren S
Worte dann nur als eine
Uebersezung aus einem H
richtig só verstehen »die
Sékel 10 (d. i. die Sékel von
richtig berechnet, oder we
Weise nach 5 und 10 ge
Sékel euch die Mine seyn
machen)!« Man sieht das
ebenfalls zweigliedrigen a
nach völlig verschiedenen
wobei man nur nicht üb
καὶ vor *πεντήκοντα* dem
Wir wissen aber jezt dass
von 50 Sékeln hatte: und
meint seyn: eine ganz an
in unserm Hebräischen W

Der Sinn dieser in den
art ist demnach so klar u
lich. Und verweilen wir
bei den übrigen Alten Ue
wir zwar dass nur die A
chischen Wortgefüge und
nach der richtigen Lesart f
gen vermischen den ächte
schon dadurch stark dass
und 5 sezen. Die *Vulg.* h
lich ans Hebräische, wä
ganzen Sinn durch die

dass alle die Worte v. 12 von dem Verhältnisse der Mine zu den Gera d. i. ܡܥܝܢ ὀβολοί handeln und deshalb sogar die Lesart völlig ändert. Das *Targum* welches auch hier vielmehr eine weitläufige freie Erklärung gibt, hatte ursprünglich noch die richtige Einsicht dass alle vier Zahlen zusammengerechnet 60 aussagen sollen: aber indem ein Späterer die Wahl der Zahlen 20 25 15 nicht begriff und doch eine Ursache für jede einzelne finden wollte, gerieth er auf die Meinung die doppelte Art von Minen, die er die silberne d. i. die gewöhnliche 50 seklige und die grosse nennt d. i. die 60seklige welche nach ihm als die heilige hier zulezt gemeint seyn soll, seien beide durch die verschiedenen Zahlen angedeutet, sodass er übersezte »das Drittheil der Mine ist 20 סְלָעִין d. i. Sékel, die Hälfte der Silbermine ist 25 Sékel, das Viertel der Mine ist 15 Sékel«; und so sind beide Erklärungen schliesslich in einander geschoben, während man das jezige Wortgefüge ausserdem noch dádurch verbessern muss dass man das Wort für die Hälfte vor מָנֵי כַסְפָא als durch einen Fehler verloren gegangen einschaltet. So dunkel kann ein Targum seyn, wie es uns heute vor die Augen tritt!

3. Allein wir müssen schliesslich noch einmahl zu der Lesart der LXX zurückkehren. Dass diese nicht in die Reihe der gewöhnlichen verschiedenen Lesarten zu ziehen sei, ist deutlich. Sie ist nicht aus dér Lesart hervorgegangen welche sich heute für uns im Hebräischen erhalten hat, und hat mit dieser nichts zu thun da sie einen dem Sinne nach völlig verschiedenen und doch in sich klaren und richtigen Saz gibt. Sie kann aber auch nicht etwa durch die

blosse Willkür des Griech
eingeführt seyn: weder sov
sich der Uebersezer nehmen,
Farbe welche deutlich der S
Haltung und Gliederung au
treffen. Alles vereinigt sic
zu dér Annahme dass wir in
sehr alte Lesart vor uns hab
chische Uebersezer selbst s
bräischen Wortgefüge vorfan
só einleuchtend denselben Fa
(abgesehen von dem Wech
60 der bei ihm allerdings
cher auf den Sinn des Ganz
hier mit seiner Ermahnung
rück, fügt sich auch so vollk
statt des anderen Sazes in
der Rede, dass wir ihn rech
selbst ableiten können. Da
Buch nicht so wie dás Jér
hester Zeit durch die Händ
und neuer Herausgeber geg
stigt auch dies die Annahm
in eine spätere Ausgabe sei
nes eingesetzt, und die älte
unserer Hebräischen, die jü
schen Bibel erhalten.

Damit aber haben wir ei
niss über die 60- und 50s
Beide müssen in der ersten
Jahrhunderts vor Chr. und
des Babylonischen Reiches
kannt gewesen seyn. Un
Hézeqiél in der späteren A
Werkes die 50séklige an di
gen gesetzt habe: so könne
nen Beweggrund denken als

in der Zwischenzeit die 50séklige noch viel herrschender geworden war. Wir hätten so auch ein Zeugniss über die Zeit wann der Prophet den Gebrauch dieser auch seinem Volke zu empfehlen für besser hielt[1]).

— Aus alle dem kann man zwar wie an einem grossen Beispiele klar ersehen wie lehrreich sogar die blosse Griechische Uebersezung der Bibel für unsre heutige Erforschung wichtiger geschichtlicher Fragen ist. Und könnten wir noch eine ähnliche ergebnissreiche Urkunde in ihr gerade für die Geschichte der alten Münzen auffinden, so würden wir sie an dieser Stelle gerne gebrauchen. Allein die Worte 1 Sam. 13, 21 wo in der LXX ebenfalls ganz abweichend von dem uns jezt erhaltenen Hebräischen Wortgefüge von Sekeln die Rede ist, scheinen uns nicht in gleicher Weise zu einer zuverlässigen Grundlage dienen zu können. Die LXX lasen hier wörtlich שְׁלֹשָׁה שֶׁקֶל לַשֵּׁן für וְלַשְּׁלֹשׁ קְגֻשׁוֹן, und man könnte meinen diese Lesart sei bloss durch zu flüchtiges Lesen und Abschreiben aus jener entstanden. Allein die Worte »drei Sékel für den Zahn« würden in diesem Zusammenhange keinen Sinn geben; und so mögen die LXX diese ihre Lesart aus dem bloss hier vorkommenden und ihnen deshalb wahrscheinlich unverständlich gebliebenen zusammengesetzten Worte שְׁלֹשׁ קְגֻשׁוֹן für Dreizack sich durch Vermuthung herausgebildet haben.

1) Wir merken noch an dass wir jezt nicht nachsehen konnten wie das oben belobte Werk von Johannes Brandis über die Stelle Hézeqiél's urtheilt.

Wir halten es schlies
oben erwähnte Aramäische
ner Deutschen Uebersezung
zwar das gerade Gegenthe
eine einfache treue Ueberse
seyn sollte, wohlverstanden
Beitrag zum richtigen Vers
schiedenen Eintheilungen d
gewährt. Wobei schon d
dass dies Targum noch zu
jezige Gestalt empfing, eine
niss der zwei Arten von Mi
dies Targum noch im alt
geschrieben; wohin auch
Name סְלַע für שֶׁקֶל hinwe
gens sezen wir das Wort
dér Stelle von ihm ein
Bemerkten ausgefallen sein

עין׳ פלגות מני כספא
עות מניא חמש עסרי סלעין:
ני רבא קודשא יהי לכון:

»Das Drittel der Mine ist
Shékel); die Hälfte der Si
zwanzig Séla'; das Viertel
Séla'; alle sechzig (Sela')
die grosse Mine gelte euch

1) Wir verbessern hier מנין

ur Geometrie der Brennflächen von Congruenzen.

von

Dr. A. Voss in Göttingen.

In einer neulich der Kön. Societät vorgeleg-
en Mittheilung habe ich ein umfassendes Ge-
biet, auf welchem liniengeometrische Untersu-
chungen sich bewegen können, sowie insbeson-
dere die Herleitung allgemeiner Formeln für die
Singularitäten von Brenn- und singulären Flä-
chen von Complexen angedeutet. Es sei mir
heute gestattet, einige der dort betrachteten Ver-
hältnisse durch ein specielles Beispiel zu illu-
striren, welches sich auf die Congruenz [2, 2]
(Strahlensystem 4. Ordnung und Klasse) bezieht.

Ich gehe dabei aus von einer Erweiterung der Methode, welche Clebsch in dem Aufsatze [1]) »Ueber Complexe und die Singularitätenflächen derselben« befolgt hat, die auch sonst mit Vortheil in analytischen Untersuchungen verwandt werden kann.

Die Invarianten [2]) einer Curve n. Ordnung

$$1) \qquad a_x^n = b_x^n = \ldots = 0$$

lassen sich allgemein in der Form

$$2) \qquad \Sigma c \Pi (abu) a_x (def) = 0$$

darstellen. Wird nun eine Fläche, deren Glei-

1) Math. Ann. V, p. 435.

2) Diesen Ausdruck im allgemeinen Sinne genommen, wo er sich auf die 4 Classen invarianter Formen bezieht.

chung wieder $a_x^n = \ldots =$
$v_x = 0$ geschnitten, so
riante für die Schnittcurv

$$\Sigma c \Pi(abuv) a_x (defv)$$

Ganz eben so hat man zu
liebig viele Flächen durc
schnitten werden. Jede si
Schnittcurven wird man
Gestalt angeben können, sc
Problem für ebene Curve
Sollen z. B. zwei Fläc

$$a_x^2 = b_x^2 = \ldots = 0 \; a'_x$$

durch eine Ebene so gesc
die Schnittcurven sich ber
Stelle der Gleichung

3) $\Delta + 3\lambda\Theta + 3\lambda^2\Theta$
oder
$(abc)^2 + 3\lambda(abc')^2 + 3\lambda(a$

deren Discriminante

4) $\Omega = 4UV$

wo $\Delta\Theta' - \Theta^2$

$\Delta\Delta' - \Theta\Theta'$

$\Delta\Theta - \Theta'^2$

zu setzen,

$$5)\quad (abcv)^2+3\lambda(abcv')^2+3\lambda^2(a'b'cv)^2+\lambda^3(a'b'c'v)^2=0$$

leren Discriminante Ω verschwinden muss. Dieselbe, in den v vom 8. Grade, stellt die R_4 vor, erzeugt durch ihre Tangentialebenen, womit der Rang der R_4 gleich 8 gefunden ist. Ihre Schmiegungsebenen sind bestimmt durch das System

$$6)\qquad U = 0 \quad V = 0 \quad T = 0$$

und bilden somit eine Developpabele vom Grade 12 (Klasse der R_4).

Die Bestimmung der Doppeltangential- und Wendeebenen führt dagegen auf verschwindende Covarianten. Es ist hier nicht der Ort, dies weiter zu verfolgen. Um die Gleichung der Linienfläche zu erhalten, welche durch den Schnitt dreier Complexe gebildet wird, hat man die Bedingung auszudrücken, dass die Schnittcurven der Ebene v_y mit den drei Complexkegeln eines Punctes x sich in einem Puncte schneiden. Dieselbe ist für zwei lineare Complexe

$$\alpha_x = 0 \quad \beta_x = 0 \quad .$$

und den n. Grades $(a_x b_y - a_y b_x)^n = 0 = (\gamma_x)^n$

$$7)\qquad (\alpha\beta\gamma v)^n = 0. \quad .$$

Dabei ist

$$\gamma_i = a_i b_y - a_y b_i, \quad \alpha_y = 0 \quad \beta_y = 0 \quad \gamma_y = 0$$

wodurch als Gleichung der Linienfläche $(n, 1, 1)$ in Punctcoordinaten entsteht:

8) $(\alpha\ \beta\ \alpha'\ b'$

d. h. eine Gleichung $2n$. G
die Linienfläche $(n, 2, 1)$
Fällen entstehen dabei A
sofort auf Singularitäten

Durch die Bedingung

beiden Complexkegel ein
Comglexen in sich beri
schneide, erhält man d
Brennfläche in P
Aus der Bedingung

$$\Sigma c\, \Pi(abc$$

$n(n-1)$. Grades in α, w
Gerade α_x die Curve 1) b
als Gleichung der Bren
Complexes α_x und eines n
$= 0$

$$\Sigma c\, \Pi(ab\gamma'$$

d. h. eine Gleichung $2n$
Auch hier führt die Be

1) Vgl. dazu die Formel,
Algebra d. bin. Formen §. 27
Ich deute hier noch an,
Methode gestattet, die Gleic
$[mn]$ so anzugeben, dass jed
degenerirter Classenkegel ent
2) Die Darstellung i
ist davon nicht wesentli
halb bemerkt sein mag, dass
interpretirt werden kann.
3) Vgl. die symbolische D
Clebsch Math. Ann. V, 435.

nd Rückkehrcurven im Allgemeinen auf ver-
chwindende Covarianten. Ueberhaupt erschei-
ien die allgemeinen Untersuchungen über Com-
lexe von dieser Seite aus an solche geknüpft,
vie denn z. B. die Theorie des Complexes drit-
er Ordnung an die Invarianten der Curve drit-
er Ordnung sich anlehnt, welche Herr Gun-
elfinger[1]) in übersichtlichen Formen gegeben
iat. Die Brennfläche zweier Complexe
zweiten Grades ist also die Discrimi-
nante von:

$$\gamma'\gamma'ab)^2+3\lambda(\gamma\gamma'AB)^2+3\lambda^2(TT'ab)^2+\lambda^3(T''T'AB)$$

d. h.:

$$\Omega = 0.$$

Da $\Delta\Delta'\Theta\Theta'$ Functionen vierten Grades sind, ist die Brennfläche vom 16. Grade. Der Ausdruck Ω gewinnt dadurch ein besonderes Interesse, dass Δ, Δ' die beiden Singulären Flächen der Complexe vorstellen[2]), Θ, Θ' zwei andere, für welche die Complexkegel in derjenigen Lage sich befinden, welche durch das Verschwinden von Θ, Θ' bei Kegelschnitten angezeigt ist.

Der Schnitt von $\Omega = 0$ $\Delta' = 0$ zerfällt demnach in Θ'^2 und $3\Theta^2 - 4\Theta'\Delta = 0$; also in eine Curve 16. Grades, längs welcher wegen

$$\frac{d\Omega}{dx_i} = -4\Theta^3\frac{d\Delta'}{dx_i}$$

Ω und Δ' sich berühren[3]), und in eine Curve

1) Math. Ann. IV, 561.
2) Clebsch Math. Ann. II, 8.
3) Diese Beziehung bleibt erhalten bei zwei Complexen f, φ n. und m. Grades. Die Curve, in welcher ihre Brennfläche und die Singuläre Fläche von f sich berühren, ist vom Grade $2mn^3(n-1)$.

32. Grades, für welche
$4\Theta'\Delta = 0$ eine geometri

Die Rückkehrcur
die Gleichungen 6)
48. Grade. Dass die
von 6) in der That eine
sich aus den Formeln:

$$\Theta' \frac{dT}{dx_i} = \Theta \frac{dV}{dx_i} + \Delta' \frac{dU}{dx_i},$$

demnach

$$\Sigma y_i y_k \frac{d^2\Omega}{dx_i dx_k} \equiv (\Theta U_y -$$

während

$$\frac{d\Omega}{dx_i} =$$

wo U_y V_y die ersten P
stellen. Die Doppelcurv
Evidenz. Man kann abe
selben angeben, nämlich
von $\Delta = 0$ $\Delta' = 0$. Au
meln folgt ihr Grad =
Puncte der Fläche Ω si
welche $\Delta = 0$ $\Delta' = 0$
$\Delta' = 0$ $\Theta' = 0$. Endli
Curve von Ω 48. Klasse u

Wir wollen insbeso
zweite Complex sei derje
cher mit dem ersten f d
lären Linien erzeugt. M

1) Diese Nachrichten Juli

enden Satz beweisen, welcher meines Wissens isher nicht bemerkt worden ist:

Die beiden, einem beliebigen Puncte es Raumes zugehörigen Complexkeel von $f=0$ und $\varphi=0$ haben stets eine olche Lage, dass die Invariante Θ verchwindet. Damit erhält zugleich die Fläche vierter Ordnung $\Theta' = 0$ eine ehr interessante geometrische Bedeuung[1]).

Der Ausdruck Ω reducirt sich somit auf

$$\Delta(4\Theta_1^3 + \Delta\Delta'^2) = 0,$$

ie Brennfläche zerfällt also in $\Delta = 0$. h. die singuläre Fläche von f[2]), und n die Fläche 12. Grades

$$\Phi = 4\Theta_1^3 + \Delta\Delta'^2 = 0$$

len accessorischen Theil der Brennfläche. Das System $\Delta_1\ \Phi$, welches bei einem Complex . Grades in ähnlicher Weise auftritt, hat sehr nerkwürdige Eigenschaften, auf die ich bei einer anderen Gelegenheit näher eingehen werde. Hier sei nur bemerkt, dass Δ und Φ sich immer n einer Curve $2n^2(n-1)(3n-4)$. Grades dreipunctig[3]) berühren, sowie dass Φ immer $4n(n-1)(3n-4)(2n-3)$ grade Linien enthält mit con-

1) Erst während des Druckes dieser Zeilen erhielt ich las neueste Heft des Journals v. Crelle, in welchem Hr. Pasch das hier gewählte Beispiel einer eingehenden Discussion unterworfen hat. Insbesondere hat derselbe dort einen eleganten Beweis für den genannten Satz gegeben.

2) Vgl. diese Nachrichten a. a. O.

3) d. h. so dass die Schnittcurve dreifach zählt.

stanter Tangentialebene (
die dualistischen Singular
gewisse ausgezeichnete Pu

In der That berüh
9) sich dreipunctig i
des $\Theta_1 = 0$ $\Delta = 0$, wel
eine Haupttangentencurve
man die Existenz einer F
Grades bestimmt durch
$\Theta' = 0$, längs welcher

$$\frac{d\Phi}{dx_i dx_k} = 2$$

also die Rückkehrtangen
$\Delta = 0$ berührt. Uebrig
digkeit einer solchen Curv
der Bedeutung von $\Delta' =$
hervor.

Die Existenz einer D
aus der Gleichung 9) ni
Die allgemeine Formel fü

$$\delta = n(n-1)\,[50n^4 - 190$$

liefert übrigens für $n =$
sondere Beachtung verdien
zeichneten Puncte in dene
sich schneiden, doch erfor
der dort auftretenden com
von Φ eine ausführlichere
erhält man als Grad de
(Classe der Rückkehrcurve)

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

20. August. № 23. 1873.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Ueber eine neue Methode, die Pell'sche Gleichung aufzulösen.

Von

B. Minnigerode.

(Vorgelegt von Prof. **Schering.**)

Die Auflösung der Pell'schen Gleichung

$$t^2 - Du = 1$$

wird bekanntlich zurückgeführt auf die Entwicklung einer Wurzel einer quadratischen Gleichung von der Determinante D in einen Kettenbruch und zwar eines solchen Kettenbruches, dessen sämmtliche Theilzähler $= 1$ und Theilnenner positive ganze Zahlen sind. Wallis hat, wie Lagrange in den Zusätzen zu Euler's Algebra mittheilt (Cap. VIII. §. 87. der Zusätze), die Ansicht ausgesprochen, man könne auch mit Vortheil Kettenbrüche gebrauchen, von denen einzelne Theilnenner negative ganze Zahlen sind, indem man die ganzzahligen Näherungswerthe, welche die Theilnenner des Kettenbruches bilden, *nach Belieben* bald grösser, bald kleiner als die auftretenden Irrationalzahlen

nimmt. Euler theilte di
auf diese Weise die Rech
gebra, Bd. 2. §. 102.). I
(a. a. O.) diese Meinung w
einem Beispiel) zeigte, da
den niemals durch ein de
Auflösung der Pell'sche
Man hat seitdem in der T
Gleichung und damit zu
bieten ausschliesslich Kett
positiven Gliedern angew
(Ueber die Eigenschaften
gativen Kettenbrüche, wel
aus einer ganzen positive
handlungen der Königli
Wissenschaften zu Göttin
hat, wie man auch Ketter
deren sämmtliche Theilzäh
nenner positive ganze Zah

Ich habe nun bei Gel
chungen über ähnliche F
complexen Zahlen, auf d
zukommen beabsichtige, b
Kettenbrüche mit negati
brauchen kann, wenn fü
der auftretenden Irrationa
solut nächsten ganzen Za
Abgesehen von dem theo
ses Gegenstandes dürfte e
deutung sein, dass sich
unwesentliche Abkürzung
Rechnung bei dem neuen

Der Auseinandersetzun
gleich mit der Behandlun

$$t^2 - Du^2$$

für gewisse Werthe von

mit einigen hierhergehörigen Eigenschaften der quadratischen Formen von positiver nichtquadratischer Determinante sind die folgenden Seiten gewidmet, indem ich mir weitere Entwicklungen für eine andere Gelegenheit vorbehalte.

1.

Zunächst sind einige Eigenschaften der Kettenbrüche vorauszuschicken und bemerken wir sogleich, dass unter Zahlen schlechtweg hier stets reelle Zahlen zu verstehen sind.

Um irgend eine Irrationalzahl ω in einen Kettenbruch zu entwickeln, setzen wir

$$1. \qquad \omega = a_0 - \frac{1}{\omega_1}, \quad \omega_1 = a_1 - \frac{1}{\omega_2}, \ \ldots\ldots,$$

$$\omega_{\nu-1} = a_{\nu-1} - \frac{1}{\omega_\nu} \text{ etc.}$$

indem wir unter $a_{\nu-1}$ die an $\omega_{\nu-1}$ zunächst liegende ganze Zahl verstehen. Da ω irrational vorausgesetzt wurde, also auch $\omega_1, \omega_2 \ldots$ sämmtlich irrational sind, so sind die Grössen a_ν immer unzweideutig bestimmt. Jede der Zahlen $\frac{1}{\omega_1}, \frac{1}{\omega_2}, \ldots$ ist hiernach zwischen den Grenzen $-\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2}$ enthalten, diese beiden Grenzen selbst ausgeschlossen. Da also jede der Zahlen $\omega_1, \omega_2 \ldots$ dem absoluten Betrag nach grösser als 2 ist, so habe ω_1 und a_1, ω_2 und $a_2, \ldots$ beziehungsweise gleiche Vorzeichen und ist jede der Grössen $a_1, a_2 \ldots$ dem absoluten Betrag nach grösser als 1. Bei a_0 braucht dies nicht statt zu finden. Dieses kann auch die Werthe 0 und ± 1 haben; doch können ω und a_0 nicht verschiedene Vorzeichen haben.

Da der absolute Betrag
$\omega_1, \ldots$ grösser als 2 ist,
chung

$$\omega_{\nu-1} + \frac{1}{\omega_\nu}$$

hervor, dass $\omega_{\nu-1}$ und ω_ν
chen haben, wenn $a_{\nu-1} =$
das Vorzeichen von $\omega_{\nu-1}$
oder negativ, je nachdem

$$\omega_{\nu-1} = \pm$$

das untere oder obere Zeich
das Vorzeichen von ω_ν h
Glied ± 2 der Reihe a_1, a
das der ± 2 entgegengese
der absolute Betrag von a
das von der Reihe a_1, a_2
der Reihe a_0, a_1, $a_2, \ldots$

Durch die Gleichunge
bruchentwicklung von ω

$$\omega = a_0 - \cfrac{1}{a_1 - \cfrac{1}{a_2 - \ldots}}$$

Wir bezeichnen diesen K

2. $(a_0, a_1, \ldots, a$

und kann derselbe in d

in's Unendliche fortgesetzt werden. Kettenbrüche, die nach dem eben auseinander gesetzten Verfahren abgeleitet sind, wollen wir *regelmässige* nennen, wenn der absolute Betrag von $\omega > 2$ ist; d. h. wir nennen einen Kettenbruch regelmässig, der aus den Gleichungen 1. hergeleitet ist, in denen alle Grössen ω, ω_1, ω_2, ... ihrem absoluten Betrag nach > 2 sind.

In regelmässigen Kettenbrüchen sind alle Glieder a_0, a_1, a_2, ... ihrem absoluten Betrag nach mindestens gleich 2 und das auf ein Glied ± 2 dieser Reihe folgende hat das der ± 2 entgegengesetzte Vorzeichen. Umgekehrt ist auch ein Kettenbruch ein regelmässiger, wenn er diese beiden Eigenschaften besitzt. Es leuchtet ein, dass, um dies zu zeigen, der Nachweis genügt, dass der Kettenbruch

$$(a_0, \ldots, a_{\nu-2}, a_{\nu-1} - \frac{1}{\omega_\nu})$$

Diese beiden Eigenschaften hat, wenn sie beim Kettenbruch 2. vorhanden sind. Da beide in den $\nu - 1$ ersten Gliedern übereinstimmen, so braucht nur gezeigt zu werden, dass der absolute Betrag der Zahl $(a_{\nu-1} - \frac{1}{\omega_\nu})$ grösser als 2 und dass dieselbe das der Zahl $a_{\nu-2}$ entgegengesetzte Vorzeichen besitzt, wenn diese $= \pm 2$ ist. Das erste ist ohne Weiteres klar, wenn der absolute Betrag von $a_{\nu-1} \geqq 3$ ist; für $a_{\nu-1} = \pm 2$ aber haben nach unserer Voraussetzung $a_{\nu-1}$ und ω_ν entgegenggsetze Vorzeichen: der absolute Betrag ihrer Differenz ist also auch in diesem Fall > 2. Das zweite ergiebt sich,

wenn man beachtet, dass

zeichen von $a_{\nu-1}$ hat und da
gegengesetzte Vorzeichen
$= \pm 2$ ist.

Eine Irrationalzahl, di
> 2 ist, lässt sich nur a
in einen regelmässigen Ket
Dasselbe gilt auch von Rat
einzigen Ausnahme; diese
Entwicklung ein Glied $\omega_{\nu-}$
ungeraden Zahl wird. Es
eintreten, ob als letztes G
$\omega_\nu = +2$ oder $= -2$ zu
len für diesen Fall die D
mässigen Kettenbruches d
wir für das letzte Glied au
zulassen, während alle ü
desselben nicht beeinträcht
sich dann zeigen, dass de
gelmässiger ist, es mag f
der Werth $+2$ oder $-$
Setzen wir

$$\omega_{\nu-1} = a_{\nu-}$$

so braucht nur gezeigt zu
einander gleichwerthigen K

$(a_0, \ldots, a_{\nu-1}, 2)$ und $(a_0$

die Regelmässigkeit des Ke

$$(a_0, \ldots, a_{\nu-2}$$

vorausgesetzt, beide regelmi

aber statt, wenn weder $a_{\nu-1} = 2$ noch $a_{\nu-1} - 1 = -2$ ist. Beide Voraussetzungen erkennt man aber als unzulässig, sobald man beachtet, dass der absolute Betrag von $\omega_{\nu-1}$ grösser als 2 ist.

Wir führen noch des späteren Gebrauches wegen einige bekannte Eigenschaften der Kettenbrüche an. Setzen wir

3. $[a_0] = a_0$, $[a_0, a_1] = a_0 a_1 - 1, \ldots$
$[a_0, \ldots, a_{n-1}] = a_{n-1}[a_0, \ldots, a_{n-2}] - [a_0, \ldots, a_{n-3}]$,

so sind

4. $$\frac{[a_0]}{1}, \quad \frac{[a_0, a_1]}{[a_1]}, \quad \ldots \quad \frac{[a_0, \ldots, a_{n-1}]}{[a_1, \ldots, a_{n-1}]}$$

den Kettenbrüchen

$$(a_0), (a_0, a_1), \ldots (a_0, \ldots, a_{n-1})$$

gleich. Ferner besteht die Gleichung

5. $$[a_0, \ldots, a_{n-2}]\,[a_1, \ldots, a_{n-1}] - [a_0, \ldots, a_{n-1}]\,[a_1, \ldots, a_{n-2}] = 1,$$

aus der ohne Weiteres folgt, dass die Brüche 4. alle in den kleinsten Zahlen ausgedrückt sind, wenn $a_0, a_1, \ldots$ ganzzahlig vorausgesetzt werden. Ist $(a_0, \ldots, a_{n-1})$ ein regelmässiger Kettenbruch, so ist, abgesehen vom Vorzeichen,

$$[a_0, \ldots, a_{n-1}] > [a_0, \ldots, a_{n-2}],$$
$$[a_1, \ldots, a_{n-1}] > [a_1, \ldots, a_{n-2}].$$

Ferner zeigen die Gleichungen 3., dass bei regelmässigen Kettenbrüchen

$$[a_0, \ldots, a_{n-1}] \text{ und } [a_0, \ldots, a_{n-2}]$$

gleiche oder verschiedene V
nachdem a_{n-1} positiv oder

2.

Es sind jetzt einige zu
mende Sätze über quadrat
führen. Wir betrachten ein
(a, b, c) von der positiver
Determinante D. Der grö
Theiler von a, b, c ist, da
sprünglich voraussetzen =
kann dann entweder $= 1$
Form heisst im 1ten Fall v
von der 2ten Art. Wir w
durch σ bezeichnen und
Formen der 2ten Art vorau
(mod. 4) ist, dass aber, w
erfüllt ist, auch immer F
vorhanden sind.

Wir bringen die quadra
in Verbindung mit der qua

$$0 = a + 2b\omega$$

Wir wollen $\sqrt{D}$ imme
die beiden Wurzeln der qua

$$\frac{-b-\sqrt{D}}{c} \text{ und } -$$

beziehungsweise die 1te und
dratischen Form nennen.
ten der Form (a, b, c) ist
zeln unzweideutig festgeste
von $\sqrt{D}$ lässt aber auch
kennen, dass eine quadrati
gabe *einer* ihrer Wurzeln

risirt ist. Nennt man zwei Wurzeln zweier Formen gleichnamig, wenn sie entweder beide erste oder beide zweite Wurzeln sind, ungleichnamig, wenn das Gegentheil stattfindet, so gilt folgender Lehrsatz.

Wenn eine Form (a, b, c) durch eine Substitution $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$, für die

1. $$\alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

ist, in die Form (a', b', c') übergeht, so hängt eine Wurzel ω der 1ten mit der gleichnamigen ω' der 2ten durch die Gleichung

2. $$\omega = \frac{\gamma + \delta\omega'}{\alpha + \beta\omega'}$$

zusammen; und umgekehrt: hängen zwei gleichnamige Wurzeln ω und ω' der Formen (a, b, c) und (a', b', c') durch die Gleichung 2. zusammen, während die Gleichung 1. besteht, so sind sie äquivalent und die erste geht in die zweite durch die Substitution $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$ über.

Hervorzuheben der folgenden Anwendungen wegen ist noch der Fall von *benachbarten* Formen (a, b, a') und (a', b', a''), die so definirt sind, dass $b + b'$ durch a' theilbar, also $b + b' = -a'\delta$ ist; die erste geht in die zweite durch die Substitution $\begin{pmatrix}0, & 1\\ -1, & \delta\end{pmatrix}$ über und ihre gleichnamigen Wurzeln sind durch die Gleichung

$$\omega = \delta - \frac{1}{\omega'}$$

verbunden.

Durch jede Substitution

chung

3. $\alpha\delta - \beta\gamma =$

genügt und die die Form (a
überführt, ist eine bestimmt
Gleichung

4. $t^2 - Du^2 =$

gegeben durch folgende Glei

5. $\alpha = \frac{t - bu}{\sigma}, \quad \beta$

$\gamma = \frac{au}{\sigma}, \qquad \delta$

umgekehrt ist vermöge de
durch jede Lösung (t, u) de
bestimmte Transformation (
chung 3. genügt, gegeben,
(a, b, c) in sich selbst über

3.

Für das Folgende ist die
quadratischer Formen von
1te Wurzel abgesehen vom
deren 3ter Coefficient absolut
1ten ist. Setzen wir zunächl
Form (a, b, c) diese Eigens
ziehen einige Folgerungen

1. $\frac{-b - \sqrt{D}}{c} > 2,$

wenn wir vom Vorzeichen

Weise sollen überhaupt in diesem Paragraphen die Ungleichheiten verstanden werden, wenn nicht das Gegentheil gesagt wird. Aus der Gleichung

2. $\frac{1}{2}(-b-\sqrt{D}).2(-b+\sqrt{D}) = ac$

ergiebt sich dann mit Berücksichtigung der 1ten Ungleichheit 1., dass

$$\frac{-b+\sqrt{D}}{a} < \frac{1}{2}$$

und hieraus nach der 2ten Ungleichheit 1., dass

$$\frac{-b+\sqrt{D}}{c} < \frac{1}{2}$$

ist und hieraus, dass

$$\frac{-b-\sqrt{D}}{a} > 2$$

ist. Oder mit Worten: die beiden ersten und beiden zweiten Wurzeln der Formen (a, b, c) und (c, b, a) sind beziehungsweise >2 und $<\frac{1}{2}$.

Da hiernach

$$\frac{1}{2}(b+\sqrt{D}) > 2(-b+\sqrt{D})$$

ist, so leuchtet zunächst ein, dass $b > 0$ ist und je nachdem $b < \sqrt{D}$ oder $b > \sqrt{D}$ ist gelten also mit Berücksichtigung der Vorzeichen die beiden Ungleichheiten

$$\frac{1}{2}(b+\sqrt{D}) > 2(-b+\sqrt{D})$$
$$\frac{1}{2}(b+\sqrt{D}) > 2(b-\sqrt{D});$$

aus ihnen aber folgt

3. $$\frac{2}{5}\sqrt{D} < b < \frac{5}{2}\sqrt{D}.$$

deren 1te Wurzel >2, d
$\geq$ dem 1ten ist. Da es n
Anzahl von Formen von
giebt, so muss einmal *ei*
zum 2ten mal auftreten.
blick an werden die auf
wieder kommen und die
men sowie die Kettenbruc
periodisch. Die in einer s
enthaltenen Formen sollen
nannt werden. Es stimm
weder mit der Gauss'sche
183), noch mit der He
Journal, Bd. 41. Seite 19
aber für die vorliegende T

Durch das Vorstehende
Form von der Determinant
Art eine Formenperiode e
zelne Formen ihr alle äq
Periode ist durch irgend e
Form vollständig charakte
Perioden aus denselben For
sie eine Form gemeinsam
enthält mindestens eine Fo
zel >2 und deren 3ter Co
ist, beides abgesehen vom
von den Formen dieser Be
endliche Anzahl verschiede
den eben gemachten Bemer
es für eine gegebene Detern
liche Zahl von Perioden, u
nur eine endliche Zahl von
nur eine endliche Anzahl
men giebt.

Es sei noch erwähnt, d
reihe 2. einer Form (a, b,

der Form $(-a, b, -a_1)$ unmittelbar hervorgeht, nämlich

$$(-a, b, -a_1), \quad (-a_1, b_1, -a_2), \ldots .$$
$$(-a_\nu, b_\nu, -a_{\nu+1}),$$

und dass die Kettenbruchentwicklung der 1ten Wurzel der Form $(-a, b, -a_1)$ folgende ist

$$(-\delta_0, -\delta_1, \ldots .),$$

während $\omega = (\delta_0, \delta_1, \ldots)$ ist. Insbesondere schliesst man, dass die Formen

$$(a, b, a_1) \text{ und } (-a, b, -a_1)$$

gleichzeitig reducirt oder nicht reducirt sind. Es giebt also immer eine reducirte Form, deren 3ter Coefficient ein gegebenes Vorzeichen hat; welches das entgegengesetzte von dem der 1ten Wurzel der Form ist.

Durch die vorstehenden Entwicklungen sind die Mittel an die Hand gegeben, sämmtliche reducirten Formen der Determinante D und von der σten Art aufzustellen. Im Einzelnen soll dies jetzt nicht ausgeführt werden.

5.

Am Schluss von Art. 2. ist kurz der Zusammenhang angegeben worden, der zwischen den beiden Aufgaben besteht, eine Transformation einer Form von der Determinante D und von der σten Art in sich selbst und eine Lösung der Gleichung

1. $$t^2 - Du^2 = \sigma^2$$

zu finden. Durch die Entwicklungen des Art. 4.

sind wir nun in den Stand
sungen der ersten der be
Aufgaben herzustellen, nä
lung der Perioden reducirt
den nun näher darauf einge
es sei eine Gleichung von fol

2. $\omega = (R_0, R_1, .$

Ist ω die erste Wurzel e
so kann dieser Kettenbru
sein. Wir wollen hierübe
aussetzung machen, sonde
Wurzel ω irgend einer Fo
minante D une von der σ
eine Weise in den obigen
mässigen oder nicht regel
entwickelt.

Setzen wir nun

$$\alpha = -[R_1, . .$$
$$\beta = +[R_1, . .$$
$$\gamma = -[R_0, . .$$
$$\delta = +[R_0, . .$$

so besteht nach Art. 1. di

$$\alpha\delta - \beta\gamma =$$

ferner ist

$$\delta\omega + \gamma = [R_0, . .$$
$$\beta\omega + \alpha = [R_1, . .$$

und folglich

$$\frac{\delta\omega + \gamma}{\beta\omega + \alpha} = (R_0, . .$$

Dies mit der Gleichung
giebt

$$\frac{\delta\omega+\gamma}{\beta\omega+\alpha}=\omega.$$

Nach dem in Art. 2. Gesagten ist also $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$ eine Substitution, durch welche die Form F in sich selbst übergeht und ihr entspricht eine bestimmte Lösung der Gleichung 1.

Man erhält neue Substitutionen, wenn man in der Gleichung 2. auf der rechten Seite für ω wiederholt seine Kettenbruchentwicklung einsetzt, indem sich so für ω Kettenbrüche ergeben, die, statt wie jener in Gleichung 2. aus $n+1$ Gliedern zu bestehen, $2n+1$, $3n+1$, ... Glieder enthalten. Der Zusammenhang zwischen den verschiedenen Substitutionen, die sich hieraus ergeben, soll nun aufgesucht werden. Es sei

$$\alpha_m=-[R_1,\ldots,R_{n-1};\ldots;R_0,\ldots,R_{n-1};R_0,\ldots,R_{n-2}],$$
$$\beta_m=-[R_1,\ldots,R_{n-1};\ldots;R_0,\ldots,R_{n-1};R_0,\ldots,R_{n-1}],$$
$$\gamma_m=-[R_0,\ldots,R_{n-1};\ldots;R_0,\ldots,R_{n-1};R_0,\ldots,R_{n-2}],$$
$$\delta_m=-[R_0,\ldots,R_{n-1};\ldots;R_0,\ldots,R_{n-1};R_0,\ldots,R_{n-1}],$$

nnd zwar mögen in diesen vier Ausdrücken auf der rechten Seite der Reihe nach

$$n-1+n(m-1)+n-1,$$
$$n-1+nm,$$
$$nm+n-1,$$
$$n(m+1)$$

Glieder vorkommen, so dass $\frac{\delta_m}{\beta_m}$ der Werth des Kettenbruches ist, der aus einer $(m+1)$maligen Wiederholung der Periode $[R_0,\ldots,R_{n-1}]$ be-

und $\gamma - 2\alpha = 0$ ab, so k
dass stets

$$\frac{\gamma}{\alpha} > 2$$

ist.

Wir können jetzt $\frac{\gamma}{\alpha}$ in
Kettenbruch entwickeln:

3. $$\frac{\gamma}{\alpha} = (R_0, \ldots$$

Der absolute Betrag der gan
kann nie < 2 sein und au
ein negatives, auf ein Gli
Sollte $R_{n-1} = \pm 2$ sein, s
ein regelmässiger, wie au
wählt werden mag. (Siehe
nun festsetzen, dass, we
$R_{n-1} = +2$ oder $= -2$
nachdem $b < \sqrt{D}$ oder $b >$
$R_0, \ldots, R_{n-1}$ sind also
Wir können nun setzen

4. $$j\gamma = [R_0, \ldots$$
$$j\alpha = [R_1, \ldots$$

wenn $j = \pm 1$ ist und unl
Es sei ferner

5. $$\varphi = [R_0, \ldots$$
$$f = [R_1, \ldots$$

wenn $n > 2$ und $\varphi = R_0$
ist; der Fall $n = 1$ setzt

ganze Zahl ist, und soll später behandelt werden. Es ist also $\frac{\varphi}{f}$ der dem Werth $\frac{\gamma}{\alpha}$ vorhergehende Näherungswerth des Kettenbruches 3.

Die Gleichung 5. Art. 1. giebt nun

$$\alpha.j\varphi - \gamma.jf = 1;$$

verbindet man dies mit der 5ten Gleichung 2., so folgt

$$\alpha(\delta - j\varphi) - \gamma(\beta - j\varphi) = 0.$$

Da nun α und γ relative Primzahlen sind, so ergiebt sich

6.
$$\delta = -\gamma\tau + j\varphi$$
$$\beta = -\alpha\tau + jf,$$

wo τ eine unbestimmte ganze Zahl vorstellt.

Aus diesen Gleichungen folgt

$$-j\delta = [R_0, \ldots, R_{n-1}, \tau]$$

$$-j\beta = [R_1, \ldots, R_{n-1}, \tau]$$

Ferner ist

$$-j\delta.\omega - j\gamma = [R_0, \ldots, R_{n-1}, \tau, \omega]$$

$$-j\beta.\omega - j\alpha = [R_1, \ldots, R_{n-1}, \tau, \omega].$$

Hieraus folgt

$$\frac{\delta\omega+\gamma}{\beta\omega+\alpha}=(R_0,\ \ldots.$$

Da aber nach unserer
Form (a, b, c) durch die S
sich selbst übergehen soll,
chung

7. $$\omega=\frac{\gamma+}{\alpha+}$$

es ergiebt sich also

8. $$\omega=(R_0,\ \ldots,$$

Bisher ist noch nicht G
den von der Eigenschaft de
reducirte zu sein, sondern n
den, ihre und der Formel (
seien absolut genommen $>$
Formel 2. Art. 3 zeigt, da
die 1. und 2. Wurzel von
weise >2 und $<\frac{1}{2}$ sind.
wiesen werden kann, dass d
regelmässiger ist, so kann
sen werden, dass die zu Gr
ducirt ist. Dieser Nachwe
werden, wenn $b<\sqrt{D}$
derartige Form, deren Wu
nen Ungleichheiten genüge
cirt ist.

Es ist dann in dem Ke
cher nicht $=-2$ und d
regelmässig ist und $\omega>2$
unsern Satz zu beweisen,
den, dass s absolut genomm

nicht $= +2$ ist. Da die vier Substitutionscoefficienten in unserm Fall positiv sind und aus einer am Schluss von Art. 3 gemachten Bemerkung folgt, dass in den Gleichungen 6. τ negativ ist, wenn δ und γ (und ebenso auch β und α) gleiche Vorzeichen haben, so muss $\tau < 0$ sein. Da überdies $\delta > 2\gamma$ und der absolute Werth von γ grösser als der von φ ist, so muss $-\tau$ mindestens $= 2$ sein, w. z. b. w.

7.

Ein ähnlicher Nachweis kann in dieser Weise nicht beigebracht werden, wenn $b > \sqrt{D}$ ist. Da in diesem Fall δ positiv, γ negativ und $\delta > -2\gamma$, γ absolut genommen $> \varphi$ ist, so schliesst man aus 6. Art. 6., dass τ positiv und mindestens $= 2$ ist. Da ferner in unserm Fall R_{n-1} nicht $= +2$, ω positiv und > 2 ist, so ist der Kettenbruch regelmässig oder unregelmässig, je nachdem $\tau > 2$ oder $= 2$ ist. Es soll jetzt bewiesen werden, dass der Fall $\tau = 2$ nicht vorkommen kann, unter der Voraussetzung, dass die zu Grunde gelegte Form reducirt ist, d. h. dass ihre erste Wurzel in einen regelmässigen rein periodischen Kettenbruch entwickelt werden kann.

Wir bemerken zunächst, dass der Beweis unserer Behauptung, dass durch die Entwicklungen des Art. 5. alle Lösungen der Gleichung

$$t^2 - Du^2 = \sigma^2$$

in positiven ganzen Zahlen gefunden werden, wesentlich darauf hinauskommt, zu zeigen, dass

der Kettenbruch 8. Art. 6. ein regelmässiger ist, wenn die Form (a, b, c) reducirt ist. Denn sowohl in Art. 5. als in den Formeln des Art. 6 erscheinen die Coefficienten der Substitution als Zähler und Nenner zweier auf einander folgenden dem Ende einer Periode entsprechenden Näherungswerthe. Ist also der Kettenbruch 8. Art. 6. regelmässig, so folgt aus dem Umstand, dass zwei regelmässige Kettenbrüche Glied für Glied übereinstimmen, wenn sie einander gleich sind, dass die Substitution, aus welcher er abgeleitet worden ist, zu der Reihe derjenigen gehört, welche aus der regelmässigen Kettenbruchentwicklung der 1ten Wurzel der reducirten Form hervorgehen; es geht hieraus insbesondere hervor, dass zu dieser Reihe auch diejenige Substitution gehört, die den kleinsten positiven Werthen von t und u entspricht. Und zwar zeigt Formel 4. Art. 5, dass diese aus der kleinsten (oder anders ausgedrückt ersten) Periode der Kettenbruchentwicklung hervorgeht.

Der Kettenbruch

$$1. \qquad \omega = (R_0, \ldots, R_{n-2}, R_{n-1}, 2, \omega),$$

in dem R_{n-1} nicht $= +2$ ist, kann nun mittelst der Umformung

$$(R_0, \ldots, R_{n-2}, R_{n-1}, (2, \omega)) =$$

$$(R_0, \ldots, R_{n-2}, R_{n-1} - \frac{1}{(2, \omega)}) =$$

$$(R_0, \ldots, R_{n-2}, R_{n-1} - 1 - (\frac{1}{(2, \omega)} - 1))$$

oder da $\frac{1}{(2,\ \omega)} - 1 = \frac{1-\omega}{2\omega-1}$ ist in den folgenden regelmässigen Kettenbruch

$$\omega = (R_0, \ldots, R_{n-2}, R_{n-1} - 1, \frac{2\omega-1}{1-\omega})$$

umgewandelt werden. Dass dieser wirklich regelmässig ist, ergiebt der Umstand, dass R_{n-1} nicht $= +2$ und $\frac{2\omega-1}{1-\omega}$ negativ und absolut genommen > 2 ist.

Setzt man nun

$$[R_0, \ldots, R_{n-2}, R_{n-1} - 1] = j\gamma'$$

$$[R_1, \ldots, R_{n-2}, R_{n-1} - 1] = j\alpha'$$

$$[R_0, \ldots, R_{n-3}] = \varphi'$$

$$[R_1, \ldots, R_{n-3}] = f' \text{ [1]},$$

so geben die Formeln 3 Art. 1, auf die Formeln 4 und 5 Art. 6 und die eben hingeschriebenen angewandt

$$j\gamma = R_{n-1}\varphi - \varphi', \quad j\alpha = R_{n-1} f - f',$$

$$j\gamma' = (R_{n-1} - 1)\varphi - \varphi', \quad j\alpha' = (R_{n-1} - 1) f - f',$$

aus denen

$$j\gamma = j\gamma' + \varphi, \quad j\alpha = j\alpha' + f$$

1) Für den Fall $n = 2$ ist $\varphi' = 1$, $f' = 0$, für den Fall $n = 3$ $f' = 1$ zu setzen.

ist. Ist nun h das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von h' und h'', so sind alle Lösungen (t, u) die der Gleichung

$$t + u\sqrt{D} = (T + U\sqrt{D})^{hm}$$

entspringen, wenn für m der Reihe nach alle positiven ganzen Zahlen gesetzt werden, in den beiden Reihen von Lösungen enthalten, die sich aus den beiden Kettenbruchentwicklungen ableiten lassen. Da aber diese beiden Reihen keine gemeinschaftlichen Lösungen besitzen, so kann eine Kettenbruchentwicklung der zu Grunde gelegten reducirten Form von der Beschaffenheit wie 1. nicht vorhanden sein.

Hiermit aber ist bewiesen, dass es keine andere Lösungen der Gleichnng $t^2 - Du^2 = \sigma^2$ giebt als diejenigen, die sich aus dem regelmässigen Kettenbruch in der früher dargelegten Weise ableiten lassen.

8.

Es sind jetzt noch die bisher ausgeschlossenen Ausnahmefälle zu erledigen, welche dem Werthe $\alpha = 0$ und der Vorsausetzung, dass $\frac{\gamma}{\alpha}$ eine ganze Zahl ist, entsprechen. Für den Fall $\alpha = 0$ folgt aus der Gleichung

$$1. \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

und dem Umstand, dass $\beta > 0$, dass $\beta = 1$, $\gamma = -1$ ist. Da $\delta > 2\beta$, so muss hiernach δ mindestens $= 3$ sein. Die Gleichung 7 Art. 6 wird also zu

$$\omega = \frac{-1 + \delta\omega}{\omega},$$

aus der sich die regelmässige Kettenbruchentwicklung

$$\omega = \delta - \frac{1}{\omega}$$

ergiebt.

Ist $\frac{\gamma}{\alpha}$ eine ganze Zahl, so ergiebt sich aus dem Umstand, dass γ und α relativ prim sind $\alpha = \pm 1$; die Gleichung 1. liefert dann

2. $$\delta = \pm(\beta\gamma + 1),$$

folglich ist

$$\omega = \frac{\gamma \pm (\beta\gamma + 1)\omega}{\pm 1 + \beta\omega},$$

woraus

3. $$\omega = (\pm\gamma, \mp\beta, \omega)$$

folgt. Da α und γ gleiche Vorzeichen haben, so ist γ positiv oder negativ, je nachdem das obere oder untere Zeichen gilt. Da ferner

$$\delta > 2\beta \text{ und } \delta > \pm 2\gamma,$$

so lehrt Gleichung 2, dass β und γ mindestens $= 2$ sind, wenn das obere, dass β und $-\gamma$ mindestens $= 3$ sind, wenn das untere Zeichen gilt. Hieraus aber folgt, dass 3 ein regelmässiger Kettenbruch ist.

Wir heben nun einige Beschränkungen auf, welche der Methode noch anhaften. Zunächst ist die Beschränkung nicht wesentlich, die bloss um einen bestimmt fixirten Fall vor Augen zu

haben, gemacht wurde, dass der 3te Coefficient der zu Grunde gelegten Form negativ sei. Doch ist es nicht nothwendig, die ganze Untersuchung für diesen Fall zu wiederholen. Es genügt, die Beziehungen in's Auge zu fassen, die Art. 4 zwischen den Formen (a, b, c) und $(-a, b, -c)$ und den Kettenbruchentwicklungen ihrer ersten Wurzeln aufgestellt sind, um augenblicklich zu erkennen, dass jeder Transformation einer dieser Formen in sich selbst eine bestimmte der andern in sich entspricht, so dass alle Transformationen der Form $(-a, b, -c)$ in sich selbst aus der Entwicklung ihrer ersten Wurzel in einen regelmässigen Kettenbruch abgeleitet werden können.

Nur sei noch bemerkt, dass für positive Werthe von $c\ \beta$ negativ wird und daraus folgt, dass γ und α nicht gleiche Vorzeichen haben, folglich γ positiv oder negativ ist, je nachdem $b > \sqrt{D}$ oder $< \sqrt{D}$ ist.

Durch die bisherigen Entwicklungen ist gezeigt, wie aus der Entwicklung bestimmter reducirter Formen in regelmässige Kettenbrüche sämmtliche Transformationen dieser Formen in sich selbst, die positiven Lösungen der Gleichung

$$2. \qquad t^2 - Du^2 = \sigma^2$$

entsprechen, also auch diese selbst sämmtlich gefunden werden können. Jede Periode der reducirten Formen enthält mindestens eine reducirte Form von der vorausgesetzten Beschaffenhit. Es soll jetzt noch gezeigt werden, dass mit demselben Erfolg jede reducirte Form gebraucht werden kann, d. h. dass es keine Lösung der Gleichung 2 giebt, die nicht aus der regelmässigen Ketten-

bruchentwicklung der 1. Wurzel der Form ableitbar wäre.

Die sämmtlichen Transformationen einer Form φ_0 in sich selbst können aus den Transformationen einer ihr äquivalenten φ_λ in sich selbst folgendermassen abgeleitet werden. Es sei (T) eine Substitution, die φ_0 in φ_λ transformirt, $(T)^{-1}$ die ihr inverse, d. h. die aus ihr abgeleitete, welche φ_λ in φ_0 transformirt; (S) sei eine Substitution, die φ_λ in sich selbst überführt. Dann erhält man alle Transformationen von φ_0 in sich selbst und jede nur einmal, indem man nacheinander die Substitutionen

$$3. \qquad (T)\ (S)\ (T)^{-1}$$

bildet und für (S) alle Substitutionen setzt, die φ_λ in sich selbst transformiren, während (T) unverändert bleibt.

Wir setzen voraus, dass φ_0 und φ_λ zwei reducirte Formen derselben Periode sind. Es sei m die Anzahl der Glieder in einer Periode und möge die Periode der Form φ_0 entwickelt und immer weiter fortgesetzt werden:

$$\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_\lambda, \cdots \varphi_{m-1};\ \varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_\lambda, \cdots \varphi_{m-1}; \cdots,$$

entsprechend der Entwicklung der 1. Wurzel von φ_0 in einen regelmässigen Kettenbruch[1]). Einem Fortschreiten von einer bestimmten Form φ_p zu einer andern φ_q in bestimmter Richtung

1) Eine Fortsetzung der Formenreihe nach links würde zu solchen Transformationen führen, denen positive Werthe von t und negative von u entsprechen.

entspricht eine bestimmte Transformation der 1. in die 2. Form, das Durchlaufen des nämlichen Weges in entgegengesetzter Richtung der inversen Substitution, da φ_q in φ_p transformirt. Ist φ_λ eine reducirte Form von der speciellen im Früheren vorausgesetzten Beschaffenheit, so entspricht sämmtlichen Transformationen in sich selbst, die zu positiven Werthen von t und u gehören, ein Fortschreiten nach und nach zu allen rechtsstehenden Formen φ_λ, die jedesmal um m Glieder von einander abstehen. Um nun für die Form φ_0 die sämmtlichen entsprechenden Transformationen in sich selbst abzuleiten, hat man nach dem Schema 3 zunächst irgend eine Transformation von φ_0 in φ_λ auszuführen, was einem Fortschreiten um λ Glieder in der Formenreihe entspricht, wenn wir bei der 1. Form φ_λ stehen bleiben; von da hat man um die Substitution (5) zu erhalten um hm Glieder vorzugehen, wo h irgend eine positive ganze Zahl bedeutet; schliesslich hat man die Transformation $(T)^{-1}$ auszuführen, d. h. um λ Glieder zurückzugehen. Man ist hierbei im Ganzen von φ_0 um hm Glieder vorgeschritten. Giebt man nun dem h alle seine Werthe, so erhält man alle Transformationen und jede nur einmal; zugleich aber erkennt man, dass diese übereinstimmen mit allen den Transformationen, die sich aus der Kettenbruchentwicklung in der früher auseinandergesetzten Weise ergeben, und ist also bewiesen, dass ausser diesen keine andern vorhanden sind w. z. b. w.

Verzeichniss der bei der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangenen Druckschriften.

Juli 1873.

In ungarischer Sprache.

(Fortsetzung).

Értekezések. Forschungen aus dem Gebiete der Geschichts-Wissenschaften, herausgegeben von der Ung. Akad. d. Wissensch. 1871. Stück 1. Pest 1871.

— aus dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften. 1871. Stück 8—11. Das. 1871. — 1872. Stück 1. Das. 1872.

— aus dem Gebiete der Naturwissenschaften. 1871. Stück 9—15. Das. 1871. — 1872. Stück 1—3. Das. 1872.

— aus dem Gebiete der Philologie und schönen Wissenschaften. 1871. Stück 7. 8. Das. 1871. — 1872. Stück 9—11. Das. 1872.

— aus dem Gebiete der Staatswissenschaften. 1872. Stück 5. Das. 1872.

— aus dem Gebiete der Philosophie. Stück 1. Das. 1871. — Stück 2. Das. 1872.

Mag. történelmi Tár (Thesaurus historicus Hungaricus). XVI. Pest 1871. — XVII. XVIII. Das. 1872.

Közlemények. Philosophische Mittheilungen, herausgegeben von der philosophischen Abtheilung der Ung. Akad. der Wissensch. redigirt von Paul Hunfalvy. Bd. 10. Heft 1. Pest 1871. Bd. 11. Heft 1. 2. 3. Das. 1872.

— statistische und volkswirthschaftliche, zur Beförderung der Kenntniss der heimathlichen Zustände, herausgeg. von der statistischen Abth. der Ung. Akad. der Wissensch. redig. von Karl Keleti. Bd. 8. Heft 1. Das. 1871. Heft 2. Das. 1872.

Török-Magyarkori történelmi Emlékek (Monumenta historica temporis Turco-Hungarici). Abth. 1. Diplomatarium. Bd. 7. Pest 1871.

Almanach der Ung. Akad. der Wissenschaften auf das J. 1872. Pest 1872.

Archivum Rákóczianum, herausgegeben von der historischen Commission der Ungar. Akad. der Wissensch. Abth. 2. Diplomatarium. Bd. 1. Pest 1872.

Monumenta Hungariae historica, herausgeg. von der historischen Commission der Ung. Akad. d. Wissensch. Abth. 1. Urkunden. Bd. 17. Pest 1872.

Kalevala, finnisches Volks-Epos, ins Ungarische übersetzt von Ferdinand Barna. Pest 1871.

A. M. T. Akadémia Évkönyvei. Jahrbücher der Ung. Akademie der Wissenschaften. Bd. 13. Lief. 3. 6. 7. 8.

Archaeologiai Közlemények. Archäologische Mittheilungen, zur Beförderung der Kenntniss der vaterländischen Kunstdenkmäler, herausgeg. von der archäol. Commission der Ung. Akad. d. Wissensch. Bd. 8. (Neue Folge. Bd. 6). Heft 3.

Gregor Czuczor und Joh. Fogarasi, Ungarischer Sprachschatz. Bd. 6. Heft 1. Pest 1871. Heft 2. Das. 1872.

Th. Wechniakoff, IIIième Section des recherches sur les conditions anthropologiques de la production scientifique et esthétique. Paris 1873. 8.

G. V. Schiaparelli, i precursori di Copernico nell' Antichità. Milano 1873. 8.

(Fortsetzung folgt).

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

3. September. № 24. 1873.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Ueber eine Base aus Nitrobenzanilid.

Von

H. Hübner und **H. Retschy.**

Wir haben früher schon in den Berichten der deutschen chemischen Gesellschaft 1873, 798 angeführt, dass wir eine Base $C_{13}H_{10}N_2$ erhalten haben. Hier sollen die Eigenschaften und die Salze derselben etwas genauer beschrieben werden.

Versuche die geeignet sind die Lagerung der Bestandtheile in dieser Base festzustellen haben wir noch nicht beenden können.

Behandelt man Nitrobenzanilid mit Zinn und Salzsäure so entsteht zunächst das bereits früher beschriebene monobenzoylirte Diamidobenzol $C_6H_4.NH_2.NH.C_6H_5.CO$.

Diese Verbindung liefert nach längerer Einwirkung von freiwerdendem Wasserstoff (aus Zinn und Salzsäure) die gewünschte Base.

Das Zinn Doppelsalz derselben krystallisirt in kleinen, fast farblosen Nadeln.

Die mit Schwefelwasserstoff entzinnte Lösung

desselben scheidet nach dem Abdampfen das salzsaure Salz: $C_{13}H_{10}N_2 . HCl$ in feinen farblosen Nadeln aus. Dies Salz lässt sich nur aus verdünnter Salzsäure umkrystallisiren da es sonst Salzsäure abgiebt.

Die freie Base bildet, aus der Lösung ihrer Salze mit Ammoniak abgeschieden, farblose, kurze Nadeln. Sie ist in Wasser fast unlöslich, wenig löslich in Benzol und Chloroform, leicht löslich in Alkohol. Aus der alkoholischen Lösung wird sie in glänzenden, durchsichtigen rhombischen Tafeln erhalten. Ihr Schmelzpunkt liegt über 240°.

Das Platindoppelsalz $(C_{13}H_{10}N_2)_2(HCl)_2PtCl_4$ bildet gelbe Nädelchen.

Das salpetersaure Salz $C_{13}H_{10}N_2 . HNO_3$ besteht aus durchsichtigen farblosen Nadeln.

Das schwefelsaure Salz $(C_{13}H_{10}N_2)_2 H_2SO_4$ krystallisirt in schönen farblosen Nadeln, die sich meist zu Büscheln vereinigen.

Schliesslich sei noch erwähnt, dass es gelungen ist, die freie Base zu nitriren.

Zur Kenntniss der aus Steinkohlentheer zu erhaltenden Xylidine.

Von

H. Hübner und G. Struck.

Genau bei 138 — 139,5° siedendes Steinkohlentheerxylol wurde nitrirt und amidirt. Das so erhaltene Xylidingemisch wurde dann mit einem gleichen Raummass Essig einige Tage gekocht. Es entstand eine stark braun gefärbte Flüssigkeit, welche nur bei einem Versuch zu einem Krystallbrei erstarrte. Durch Lösen in Wasser

und häufiges Umkrystallisiren wurde ein in langen farblosen Nadeln krystallisirendes Acetxylid erhalten, dessen Schmelzpunkt bei 127—128° C. lag. Diese Verbindung ist in Alhohol sehr leicht löslich. In 100 Th. Wasser lösen sich 2,67 Th. des Acetxylid's.

Beim Eindampfen der Mutterlauge dieser Acetverbindung schied sich eine röthlich gefärbte etwas ölige Verbindung ab. Durch Krystallisation aus Chloroform wurde dieselbe in grossen Blättern erhalten, welche aus Wasser krystallisirt, vierseitige Säulen bildeten. Die Säulen schmolzen bei 123—124°. Sie waren in Alkohol sehr leicht löslich. In 100 Th. Wasser lösten sich 2,36 Th. derselben. Ob diese zweite in sehr geringer Menge erhaltene Acetverbindung von der ersten verschieden ist, oder ob die geringen Unterschiede, die sie von der ersten Verbindung unterscheiden nicht nur durch eine sehr geringe Verunreinigung hervorgerufen werden, müssen spätere Versuche entscheiden.

Zunächst wurde aus der bei 127—128° schmelzenden Acetverbindung das Xylidin durch Behandlung mit Natronlauge abgeschieden und mit demselben folgende Salze dargestellt.

Da die verschiedenen Xylidine noch wenig erforscht sind, so geben wir neben dem Schmelzpunkt der zugehörigen Acetverbindung auch die Beschreibung einiger Salze unsrer Base um dieselbe scharf zu kennzeichnen.

Das salzsaure Xylidin $C_6H_3(CH_3)_2NH_2$. HCl. Krystallisirt aus Salzsäure in grossen farblosen Blättern. Das Salz ist in Alkohol und Wasser sehr leicht löslich.

Das salpetersaure Xylidin $C_6H_3(CH_3)_2$ $NH_2.NO_3.H$. Krystallisirt auch in farblosen

Blättern und verhält sich wie das salzsaure Sa
Diese Verbindung färbt sich leicht röthlich.

Das schwefelsaure Xylidin ($C_6H_3(CH_3$
$NH_2)_2 H_2 SO_4$ bildet schöne monobline Säul
die in Alkohol und Wasser leicht löslich sind.

Das saure oxalsaure Salz $C_6 H_3 (CH_3$
$NH_2 . H . COO$ bildet prachtvolle, rhomboëdris
$COOH$
Krystalle, die in Alhohol und Aether leicht lö
lich sind.

Aus der kleinen Menge des bei 123—12
schmelzenden Acetxylid's konnte nur ein in se
löslichen Blättern krystallisirendes salzsaures Sa
dargestellt werden.

Nitroacetxylid ($C_6 H_2 (CH_3)_2 (NH . CH$
$CO) . NO_2$. Diese Verbindung wurde dargest
durch Eintragen von, mit einem gleichen Raum
mass Eisessig verdünnter, rauchender Salpet
säure in die erkaltete Lösung des bei 127—12
schmelzenden Acetxylids in Eisessig. Nach zwe
tägigem Stehen hatten sich in dem Gemis
Krystalle abgesetzt. Das Gemisch gab nun m
Wasser zersetzt einen krystallinischen Nieder
schlag, der aus Alkohol krystallisirt hellgel
Octaëder bildete, die schwer in Wasser, leicht i
Alkohol löslich sind und bei 69—70° schmelze

Nitroamidoxylol $C_6H_2(CH_3)_2(NH_2)(NO_2$
wurde erhalten, als das Nitroacetxylid lange m
starker Natronlauge gekocht wurde. Die Ver
bindung ging mit den Wasserdämpfen sehr leic
über und schied sich in kleinen Nadeln ab. A
Alkohol krystallisirt die Verbindung in gelbr
then, etwa einen Zoll langen Nadeln, welche i
Wasser sehr schwer in Alkohol sehr leicht lö
lich sind und bei 173—174° schmelzen.

Diamidoxylol $C_6 H_2 (CH_3)_2 NH_2 . NH_2$
Diese Verbindung wurde aus dem Nitroamid

xylol durch Behandlung mit Zinn und Salzsäure erhalten. Zunächst bildet sich ein Zinndoppelsalz, wird dies mit Natronlauge gekocht so geht mit den Wasserdämpfen eine Base über die lauter sehr lösliche Salze bildet und aus denselben nur als Oel abgeschieden werden kann.

Nur das schwefelsaure Salz $C_6H_2(CH_3)_2(NH_2)_2 . H_2SO_4$ dieses Diamidoxylol's krystallisirt aus einer sehr eingeengten wässrigen Lösung auf Zusatz von Alkohol in farblosen Krüstallblättern.

Ueber die Verbindungen der Nitrile mit den Aldehyden.

Von

H. Hübner und G. Jacobsen.

Es ist früher nachgewiesen worden (Berichte d. deut. chem. G. 1873, 199), dass sich Acetonitril und Trichloraldehyd (Chloral) zu einer schön krystallisirten Verbindung umsetzen. Dieselbe konnte in wässriger Lösung mit Natriumamalgam nicht in eine entchlorte Säure übergeführt werden. Es entstand stets nur Essigsäure, wahrscheinlich nach folgender Gleichung:

$$CCl_3 . CH(CH_2 . CONH_2)_2 + 3H_2O + 4H_2 = CH_3 . CH_2 . OH. + 2CH_3 . COONH_4 + 3HCl.$$

Wir liessen darauf Aldehyd auf Acetonitril einwirken aber bisher ohne Erfolg.

Dagegen wirkt Aldehyd auf Benzonitril bei 220° ein. Neben harzigen Verbindungen entstanden derbe farblose Nadeln. Diese wurden von Benzoesäure durch Waschen mit ganz wenig kohlensaurem Natrium getrennt und aus Alkohol oder Chloroform umkrystallisirt. Die Ver-

bindung bildet dann derbe Tafeln, die in Wasser ziemlich, in Alkohol und Chloroform leicht löslich sind und bei 125° schmelzen. Diese Verbindung zeigt den Schmelzpunkt und ungefähr die Löslichkeitsverhältnisse des Benzamids. Ihre Analyse scheint aber für die Formel $CH_3 . CH(C_6H_4 . CONH_2)_2$ zu sprechen.

	Berechnet auf Benzanilid.	Berechnet auf $CH_3CH(C_6H_4 . CONH_2)_2$.	gefunden.
C	= 69,42	71,64	71,24
H	= 5,78	5,97	6,11
N	= 11,56	10,45	11,07
O	= 13,24	11,94	—
	100,00	100,00	

Mit Wasser oder mit Barytwasser gekocht giebt das Amid Benzoesäure, die sich durch den Schmelzpunkt (120°), das Aussehen, den Geruch ihres Dampfes und die Analyse ihres Baryumsalzes zu erkennen gab.

0,3625 Grm. wasserfreies Salz gaben 0,225 Grm. $BaSO_4$ entsprechend 36,4 % Ba.

Das Salz $CH_3.CH(C_6H_4COO)_2Ba$ verlangt 33,8 % Ba.
Benzoesaures Baryum » 36,15 % Ba.

Die Umsetzung scheint also nach folgender Gleichung erfolgt zu sein:

$$CH_3 . CH . (C_6H_4 . CONH_2)_2 + 3H_2O = CH_3 . CHO + 2C_6H_5 . COONH_4,$$

doch wagen wir nach diesen Versuchen die Entstehung der Verbindung $CH_3.CH(C_6H_4.CONH_2)_2$ noch nicht mit voller Sicherheit zu behaupten.

Wird ferner Trichloraldehyd mit Benzonitril auf 230° erhitzt, so entstehen in Wasser fast ganz unlösliche, feine, atlasglänzende Nadeln, die sich bei 260° zersetzen ohne vorher zu schmelzen.

0,381 Gr. dieser Verbindung gaben 0,127 Gr. Wasser und 0,721 Gr. Kohlensäure.

0,1968 Gr. dieser Verbindung gaben 0,2275 Gr. $AgCl_2$

d. h.:

$CCl_3.CH(C_6H_4CONH_2)_2$ verlangt:	gefunden.
C = 51,95	51,6 %
H = 3,49	3,67 —
Cl = 28,66	28,59 —

Ueber Thihydrobenzoesäure.

Von

H. Hübner und F. Frerichs.

In Gemeinschaft mit Jul. Upmann hat der eine von uns früher (Zeitschrift für Chemie 1870, 291) die Thihydro- und Dithiobenzoesäure dargestellt. Es konnten aber diese beiden Säuren nicht mit Sicherheit getrennt und unterschieden werden. Upmann hat dann später beobachtet, dass sich die eine Säure durch Verflüchtigung von der zweiten trennen lässt. Diese Angabe wird durch unsere Versuche vollständig bestätigt.

Wird die unreine, aus dem schön krystallisirten, sauren sulfobenzoesauren Barium gebildete, Thihydrobenzoesäure durch Papier verflüchtigt so erhält man der Benzoesäure überaus ähnliche zu Blättern vereinigte Nadeln. Der Schmelzpunkt dieser Säure liegt bei 146—147°, derselbe verändert sich nicht wenn die trockne Säure an der Luft liegt. Dagegen ist diese Säure bei Gegenwart von Wasser sehr verän-

derlich. Diese bei 146—147° schmelzende Säure ist die Thihydrobenzoesäure $C_6H_4.SH.COOH$. Für diese Annahme sprechen die hier folgenden Analysen, der niedrige Schmelzpunkt der Säure und ihre Unbeständigkeit, während die früher beschriebene bei 242—244° schmelzende sehr beständige Säure die Dithiobenzoesäure ist $(C_6H_4)_2S_2(COOH)_2$.

I. 0,1216 Gr. der Säure gaben 0,1908 Gr. $BaSO_4$
II. 0,1588 — — — — 0,2431 — — —

Die Bestimmung des Kohlenstoffs und Wasserstoffs in dieser Säure ist schwer auszuführen. Als wir die Verbindung mit chroms. Blei verbrannten erhielten wir stets zu geringe und um 2 % schwankende Werthe für den Kohlenstoff, während die Wasserstoffbestimmungen richtig ausfielen:

4,19 %; 4,72 %; 4,31 %; 4,80 %.

Erst als wir die in einem Verbrennungsschiffchen abgewogene Menge der Säure mehrere Tage zunächst über rauchender Salpetersäure, dann zur Trocknung über Schwefelsäure stehen ließen, erhielten wir eine richtige Kohlenstoffbestimmung:

0,2526 Gr. der Säure gaben 0,5003 Gr. CO_2
oder 54,98 % C.

$C_6H_4.SH.COOH$ verlangt:			gefunden.
C_7	— 84	= 54,54	54,98 %.
H	— 6	= 3,90	4,19; 4,72; 4,31; 4,80 %.
S	— 32	= 20,78	21,54; 21,13 %.
O_2	— 32	= 20,78	
	154	100,00	

Mit der weiteren Erforschung der Säure sind wir noch beschäftigt.

Göttingen, den 10. August 1875.

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

12. November. № 25. 1873.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Beiträge zur Kenntniss der ältesten Epoche neupersischer Poesie.

Von

Dr. Hermann Ethé.

(Der K. Ges. der WW. vorgelegt von Prof. Ewald).

Rûdagî, der Sâmânidendichter.

Einleitung.

Wenngleich schon unter der Regierung der Ṭâhiriden und der Familie Laith (in den zwei ersten Dritteln des 3ten Jahrh. d. H.) sich in Khurâsân das eingeborene persische Element gegen die dominirende Herrschaft arabischer Sprache und Literatur aufzulehnen begann, und dichterisch begabte Männer wie Meister Ḥanṭala (nach Anderen Ḥanżala حنظلة) aus Bâdaghîs, Ḥakîm Fîrûz Mashriqî (nach Sprenger, Cat. Oudh p. 3 Mustaufî) und Abû Salîk aus Jurjân eine einheimische Literatur anzubahnen suchten, so war der Erfolg dieser sehr vereinzelten Bemühungen doch nur ein äusserst geringer, und erst unter der für die Wiederbelebung des erstorbe-

nen Glanzes altpersischer Herrlichkeit begeisterten, mit feinem Kunstgefühl begabten Dynastie der Sâmâniden vermochte eine wirklich nationale persische Redekunst Wurzeln zu schlagen und lebenskräftige Schösslinge zu treiben. Ein reicher Flor von Sängern, die freilich vielfach neben ihren persischen Liedern noch Gedichte in der mehr officiellen arabischen Sprache verfassten, blühte auf an den Höfen dieser immer mehr vom Chalifat sich losreissenden und zur völligen Unabhängigkeit sich emporringenden Fürsten, besonders an den von Aḥmad bin Ismâ'îl Naçr bin Aḥmad und Nûḥ bin Naçr (zusammen von 295—343 d. H.). Abû Shakûr aus Balkh, — Abulḥasan Shahîd aus Balkh, — Abû 'Abdallah Muḥ. bin Mûsa فرالادى (nach Anderen غرالادى), — Abulfatḥ aus Bast, — Abû Schu'ûb Çâliḥ bin Muḥ. aus Harât, — Abul 'abbâs alfaḍl bin 'Abbâs, — Abû Zar'ah Ma'mar (auch Zarrâ'ah alma'marî genannt) aus Jurjân, — Abulmuẓaffar Naçr (oder Naçîr) bin Muḥ. aus Nîshâpûr, — Abû 'Abdallah Muḥ. bin 'Abdallah aljunaidî, — Abû Mançûr 'Umârah bin Muḥ. (oder bin Aḥmad) aus Marw, — Abulmathal aus Bukhârâ, — Abulmuwayyad aus Balkh, — Abulmuwayyad Raunaqî aus Bukhârâ, — Khabbâz (der Bäcker, auch Khabbâzî) aus Nîshâpûr, — Abû 'Abdallah Muḥ. ibn alḥasan Ma'rûf (oder Ma'rûfî) aus Balkh, — Abû Ṭâhir aṭṭabîb bin Muḥ. alkhusrawânî, — Abû Mançûr Muḥ. bin Muḥ. Aḥmad Daqîqî aus Ṭûs (nach Anderen aus Bukhârâ), der schon in die Zeit der Ghaznawiden hinüberreicht und auf Befehl des Sâmâniden Nûḥ bin Mançûr die Composition des Schâhnâma begann, sowie manche minder bedeutende Dichter feierten in vollkommenden Qaçîden das Lob ihrer Herrscher, sangen

in zarten Ghazelen der Liebe Lust und Leid und des feurigen Weines Preis, legten ihre innersten Gedanken über Gott und Menschheit, Weltenlauf und Schicksal in tiefsinnigen Sprüchen, die bisweilen schon einen leisen mystischen Anklang haben, nieder und bereiteten so jene erste grosse Glanzepoche der neupersischen Literatur vor, die kaum 50 Jahre später in der Tafelrunde Maḥmûd's von Ghazna und vor Allem in Firdûsî ihren vollendetsten Ausdruck fand. An der Spitze aller dieser Sâmânidendichter aber, sie alle weit überragend an poetischem Ingenium wie an Fruchtbarkeit, in sich wie in einem Brennpunkt alle die vereinzelten Strahlen ihres Talentes sammelnd und gleichsam das Facit aus allen den verschiedenartigen literarischen Bestrebungen seiner Vorgänger und Zeitgenossen ziehend, stand Meister Rûdagî, der daher wohl als der Vater der neupersischen Dichtkunst angesehen werden kann. Alles, was die zahlreichen literar-historischen Werke der Perser uns von seinen Erzeugnissen überliefert haben, ist in den folgenden Blättern sorgsam zusammengestellt, und wenn es auch nur »ein Tropfen aus jener Wolke und ein winziger Bruchtheil aus jenem Buche (seiner Poesien)« ist, so reicht es doch hin, darzuthun, dass Rûdagî mit vollem Recht auf den Namen eines Poeten ersten Ranges Anspruch erheben kann. 23 handschriftliche Quellen in zusammen 46 Copien haben das Material zu dieser Arbeit geliefert:

1) Muḥ. 'Aufî's Lubâb-ulalbâb, verf. in den ersten Decennien des 7ten Jahrh. Spreng. S. 318, alt, aber defect. (Vergl. Bland in Journ. of the Roy. As. Soc. IX, p. 112 ff. — Cat. Oudh p. 1 ff.). — 2) Daulatshâh's Tadhkirat-ushshu'arâ, voll. 892, in 14 Handsch. der Bodl. und der India Office:

Elliot 388 bis 393, und 345. — Ouseley 305. — Bodl. 120. — Ouseley Add. 20 und 34. — India Off. 401, 2337 und 2539. Die älteste Copie geschr. 942. — 3) Haft Iqlîm, geogr.-literar. Encyclopädie v. Amîn Aḥmad Râzî, verf. 10[illegible] in 3 Handschr. Elliot 158 (geschr. 1039) — [illegible] u. Ousel. 377. — 4) Butkhânah, grosse Anthol. in 2 Bd. von Maul. Çûfî und Mirzâbeg Khâṣṣ verf. 1010, erweitert durch ʿAbdallaṭîf bin ʿAbdallah al'abbâsî 1021. Elliot 31 u. 32 (unvollst. am Ende). — 5) Intikhâb-i-sad wa haftâd shâirân-i-fârsî, Anthol. datirt 1042 von Muḥ. Çâliḥ. Ouseley 198. — 6) Mirât-i-ʿâlam, allgem. Gesch. bis zu Aurangzîb von Muḥ. Bakhtâwârkhân (v. 1095) mit Dichterbiogr. in der Khâtimah. Elliot 242 — Ouseley 252 u. 53. (Vergl. Morley, descr. Cat. p. 52. — Nassau Lees in Journ. of the Roy. As. Soc. 1868 Sept.). — 7) Mirât-ulkhayâl von Shîrkhân Lûdî, verf. 1102. Ouseley Add. 2 — Elliot 397. — India Off. 2011. Ausgabe (1831) enth. in Ousel. Add. 35. Vergl. Bland a. a. O. p. 140. — 8) Khushgû's Safînah, verf. 1137—1147. Sprenger S. 330. 331. (Vergl. Cat. Oudh. p. 130). — 9) Tadhkirah v. ʿAlî Fitrat, gen. Nadrat, verf. 1149. India Off. 2578. — 10) Riâḍ-ushshuʿarâ von ʿAlî Qulîkhân aus Dâghistân, gen. Wâlih, verf. 1161. Spreng. S. 332 — Elliot 402 (Vergl. Bland a. a. O. p. 143. — Cat. Oudh. p. 132). — 11) Lubb-i-Lubâb von Qamar-uddîn alḥusainî. Ausz. des vor. India Off. 1013. — 12) Majmaʿ-unnafâis von Sirâj-uddîn ʿAlî Ârzû, voll. 1164. Elliot 399. (Vergl. Bland p. 172). — 13) Makhzan-ulgharâib, biogr. Diction. mit 3145 Dichtern von Aḥmad ʿAlî Hâshimî bin Muḥ. Hâdî voll. 1218. Elliot 395. (Vergl. Bland p. 173. — Cat. Oudh. p. 146). — 14) Khazâna-i-ʿâmirah von Ghulâm ʿAlî, gen. Âzâd, verf. 1176. Ousel.

Add. 6. — India Off. 1140 und 2736. Roy. As. Soc. 187. — (Vergl. Bland p. 150 ff. — Cat. Oudh. p. 143). — 15) Ḥâjî Luṭf-ʿAlîbeg's Atash-Kadah (um 1179) Shrankm. der Bodl. — Elliot 17 und 387. Ausg. (Calcutta 1849) vergl. Cat. Oudh. p. 161. — 16) Ḥadîqat-uççа-fâ, allgem. Gesch. v. Ibn Ghulâm ʿAlî-Khân Yusuf ʿAlî, voll. 1184. Am Schluss Biograph. Elliot 156. — 17) Ḥadîqat-ulaqâlîm, geogr.-encyclop. Werk von Murtaḍa Ḥusain Balgrâmî beg. 1170. Elliot 157. — 18) Khulâçat-ulafkâr von Abû Ṭâlib Ibn Maghfûr Ḥâjî Muḥ. Begkhân, verf. 1207—11. Elliot 181 (vergl. Bland p. 153. — Cat. Oudh. p. 163). — 19) Mirât-i-âftâbnâmah, Gesch. und Geogr. mit Dichterbiogr., verf. 1217 von Nawâb ʿAbdurrahmân Shâh Nuwâzkhân Hâshimî Banbânî v. Dihlî. Elliot 241 (vergl. Morley, a.a.O. p. 56). — 20) Zubdat-ulashʿâr, Poetik, Ouseley 57. — 21) Auszüge aus pers. Dichtern ohne Titel. Elliot 293. — 22) Samml. Rûdagîscher Lieder mit werthl. Comment., ganz modern, Ouseley Add. 127. — 23) Spreng. Samml. 1378 (enthält im Anhang einige Lieder Rûdagîs, die mir durch Hr. Dr. Jahn in Berlin gütigst collat. sind). Hierzu kommen noch ausser den genannten Ausgaben und Vullers pers. Lex. folgende gedruckte Werke: 24) Jâmî's Bahâristân, Ausg. v. Schlechta (Wien 1864). — 25 u. 26) Ḥadâiq-ulbalâghah von Mîr Shams-uddîn Faqîr v. Dihlî (Calcutta 1814) und Garcin de Tassy's französ. Bearb. desselben (Rhétorique et Prosodie des Langues de l'Orient Musalm. 2te Ausg. Paris 1873). —

ausdrücklich hervorgehoben wird. Aber, wen ihm auch das Gesicht fehlte, Einsicht besass er doch, und war ihm gleich das Augenlicht verhüllt, die Geheimnisse zarter Redefeinheiten lagen offen und hüllenlos vor ihm da. Seine vorzügliche Güte und sein liebenswürdiges Naturell liessen ihn zwar das äussere Auge geschlossen, das innere dagegen weitgeöffnet halten. Er war einer der seltensten Erscheinungen der irdischen Welt und unter den Menschenschaaren (als der Einzige) kundig der Wunderdinge aller Zeiten. Aber doch war sein Gemüth (in seiner Lauterkeit und Klarheit) der Gegenstand des Neides von Sonne und Mond, und trotzdem er vom Mutterleib an der Sehkraft entbehren musste, war er so feinsinnig und scharfverständig [1]), dass er schon im achten Jahre den Qurân vollständig auswendig wusste, auch die richtige Recitirung desselben sich aneignete, bereits Verse zu machen begann und subtile Gedanken zum Ausdruck brachte, so dass alle Welt davon beglückt wurde und das Verlangen nach ihm sich immer mehr und mehr steigerte [2]). Gott hatte ihm eine schöne Stimme und herzentzückenden Tonklang gegeben, so dass, wenn immer er das Schloss der Zunge im Recitiren öffnete, er den Engeln selbst die Herzen stahl, und wenn er mit dem Schlüssel des Vortrages den Mund erschloss,

1) Oder nach Khulâç: »war im Feinheitsschatze (در دیدِ معانی) ein würdiger دقیق und gehörte zu den Scharfsichtigen (تیز بینان) der Welt.«

2) Nach Mirât-i-'âl. schon im 7ten J. Dagegen Mirât-i-âftâbn.: »schon mit 20 Jahren hatte er den Qurân vollständig inne, war ein Ḥakîm, ein Dichter und Witzbold und ein davidgleicher Sänger von schönen Melodien.

Hoch und Niedrig, Alt und Jung ganz hingerissen von ihm wurde [1]). Durch diese seine schöne Stimme veranlasst widmete er sich dann dem Saitenspiel und lernte von Abuʾlabbâs Bakhtiâr, der in jener Kunst ganz auserlesen war, das Barbiton (nach Anderen die Laute بَرْبَط) und die Wissenschaft der Musik mit Hülfe des Gedächtnisses, und erwarb darin solche Geschicklichkeit, dass er im Spielen ebenso wie im Dichten der Fürst der Welt ward [2]). Ja! er brachte es in Gesang und Spiel soweit, dass das Wasser seiner Hand an der Station des Gesanges sowohl den Staub der Langeweile dem Winde preisgab, als auch das Feuer im Herzen löschte [3]). Als nun sein Ruf in alle Landstriche und Bezirke der Welt drang, — da zog ihn der Sâmânidenfürst Wâfî Abulfawâris Naçr bin Aḥmad bin Ismaʿîl [4]), der Herrscher von Khurâsân und Transoxanien, ein tüchtiger und tugendpflegender, durch Humanität, Gerechtigkeit und Freigebigkeit bekannter Fürst, der stets treffliche Männer und Dichter mit zahlreichen Huldgaben beschenkte und beständigen Verkehr mit solchen unterhielt, an seinen Hof und zeichnete ihn durch seine persönliche Gunst vor allen Anderen aus. Rûdagî ward sein Tafelgenosse, stieg durch ihn zu den höchsten Ehren auf und er-

1) Rhetor. Phrase d. Haft Iql.

2) Die nicht in ʿAufî sich findenden Zusätze sind aus dem Makhz. genommen.

3) Wieder rhetor. Schmuck des Haft Iql.

4) Einige Handschr. des Daulatsh. haben نُوح statt نَصْر und نصير statt نصر. Letzteres hat auch H. Iql., das ihm ebenso wie Wâlih u. Safîn. die Kunya Abulhasan giebt. Khas.-i-ʿâmir. nennt ihn fälschlich Naçr bin Nûḥ, Mirât-ulkhay.: Naçr-uddîn; ʿAufî an einer Stelle des Textes weiter unten: Naçr bin Muḥ.

schaffenden Dichter und den bekanntesten der früheren schönen Redekünstler [1]), das Vorbild und Muster aller Lobredner der Sâmânidenfamilie [2]), den Karawânenführer der Dichter und den Heeresvortrab der Beredten [3]), den Meister aller Meister, vor Allem aber den Sultân der Dichter [4]). Er war der Erste unter den Persern, der einen vollständigen Diwân gesammelt, d. h. alle seine Lieder in der fortan gang und gäbe gewordenen Weise zu einem Ganzen vereinigt hat [5]), und wenn man ihn auch nicht, wie vielfach von den einheimischen Literarhistorikern geschieht, als den ersten bezeichnen kann, der die Schatzkammer persischer Poesie mit dem Schlüssel der Zunge erschlossen, so kann man ihnen doch gewissermaassen Recht geben, wenn sie ihn den مخترع und den باز nennen, d. h. den, der zuerst in originneller Weise das Gebäude der Dichtkunst aufgeführt und allen verschiedenen Dichtungsgattungen, dem Mathnawî, der Qaçîde, dem Qit'a, dem Ghazel und dem Rubâ'î ihren eigenthümlichen Stempel, ihren individuellen Character aufgeprägt hat. Die spätern grossen Panegyriker Anwarî und Khâqânî, die grossen Erotiker, wie Ḥâfiẓ und Genossen, ja selbst die Didactiker haben von ihm gelernt und ihn trotz aller ihrer blendenden Vorzüge in sei-

1) Nadr.
2) H. Iql.
3) Khar-Âsm
4) 'Aufi.

ner Einfachheit und Ungekünsteltheit doch nie wieder erreicht. Alle Späteren sind nur Brosamenesser vom Tische seiner Beredtsamkeit und Aehrenleser von den reichen Garben seiner Redekunst[1]). Wie eine Wolke des Segens stand er da im Scheitel der Welt, und alle Erleuchteten erschlossen gleich der Perlenmuschel ihren Mund (um ihre Tropfen in sich aufzusaugen[2]). Auch hat er zuerst die schmähsüchtige Zunge der Araber von den Persern abgewehrt und jene dahin gebracht, dass sie selbst die Beredtsamkeit dieser zugestehen mussten. Mit seltener Einstimmigkeit haben daher auch die meisten angesehenen Dichter seiner und der späteren Zeit ihm neidlos die Superiorität über sich eingeräumt[3]).

1) u. 2) Wâlih u. Ousel. Add. 127.
3) So singt Abulhasan Shahid, Rûdagî's Zeitgenosse:

بسخن مانند شعر شعرا رودگی را سخنش تلوینست
شاعرانرا خه و احسنت مدیح رودگی را خه و
احسنت هجاست

»Sonst geht nicht über Worte hinaus das Lied der Dichter,
Doch Rûdagî mit Worten malt Farben mancherlei.
Man sagt wohl sonst zu Dichtern als Lob ein: »Bravo, trefflich!«
Zu ihm das sagen wollen, das wäre Spötterei!«

(Aufl. H. Isf. und Safîn.). Ebenso Daqîqî:

کرا رودگی گفته باشد مدیح [illegible] سخنور بود
دقیقی مدیح [illegible] نزد ا[illegible]

[illegible] gleicht [illegible]

Seine Gedichte sollen 100 Bände gefüllt und 1300,000 Verse umfasst haben [1]). Auf Befehl

('Aufî, H. Iql., Safîn. Der Text in 'Aufî ist ganz verwahrlost; H. Iql. hat das letzte Hemistich so:

چو خرما بسوی هجیور بود). — 'Unçurî singt:

غزل رودکی وار نیکو بود غزلهای من رودکی وار نیست
اگرچه بکوشم بباریک وهم بدین پرده اندر مرا بار نیست ،

»Ein gut Ghazel muss sein wie Rûdagîs,
Doch meinen ist sein Zauber nicht bescheert,
Und ring' ich nach Gedankenfeinheit auch,
In das Gemach ist Zutritt mir verwehrt«.
('Aufî, Makhz, H. Iql. u. Safîn).

Als ein Thor einst Rûdagîs Verse schmähte, dichtete Nizâmî 'arûḍî folgende Verse auf ihn:

ای آنکه طعن کردی درشعر رودکی این طعن کردن تو زجهل وز کودکیست
کانکس که شعر داند داند که در جهان صاحبقران شاعری ستاد رودکیست

»O du, der du die Gesänge Rûdagîs mit Spott beschüttest,
Du beweist nur durch dein Spotten, welch ein thöricht Kind du bist.
Wer mit Poesie vertraut ist, weiss gar wohl, dass hier auf Erden
Meister Rûdagî der Dichtkunst hochbeglückter Tîmûr ist.«
('Aufî, Makhz, H. Iql. und Safîn.).

1) So singt Rashîdî aus Samarqand (unter Sultân Khiḍr):

گر سری یابد بعالم کس بنیکو شاعری رودکی را بر سران شاعری زیبد سری

des Emîr's Naçr brachte er das berühmte Fabelbuch Kalîlah wa Dimnah in persiche Verse und empfing dafür von seinem Fürsten, nach der gewöhnlichen Angabe, 40,000 Dirhems[1]). Dass er daneben noch manche andere epische Gedichte, die freilich ebenso wie dieses Thierepos verloren gegangen sind, verfasst hat, beweisen die mannichfachen Mathnawî-Verse, die sich in den Originallexicis zerstreut finden und durch ihre verschiedenartigen Metra deutlich ihren Ursprung aus ganz verschiedenartigen Erzeugnissen dieser Dichtungsgattung bekunden. —

شعر اورا من شمردم سیزده ره صد هزار ☙ فزون آید
اگر چونانکه باید بشمری

»Macht sich Einer hier zum Fürsten je durch gute Poesie,
So gebührt vor all den Dichtern dieser Rang dem Rûdagî.
Sieh, ich zählte seine Verse — 1300,000 waren's,
Und es werden mehr noch, zählst du in der rechten Weise sie.«

(Aufî, Butkh., Mirât-ulkhay., H. Iql., Wâlih, Lubb-i-Lub., Safîn., Khulâç. und Ouseley Add. 127. Einige lesen das letzte Hemistich so: ☙ فزونتر آید ارچونانکه باید الخ).

Andere geben die Zahl auf 1328,000 — noch andere nur auf 1000,300 an.

1) Das wird belegt durch einen Vers 'Unçurî's in Daul. und Anderen: چهل هزار درم الخ, u. ebenso durch die Elegie Rûdagî's selbst (siehe weiter unten), wo er sagt, er habe 40,000 D. vom Fürsten und 60,000 von dessen Freunden erhalten. Zu Kalîla vergl. Firdûsî im Schâhn (ed. Mohl) VI, 455.

Rûdagî's Lieder.

Ich stelle hier zunächst die Gedichte zusammen, die dem Lobe des Emîr Naçr gewidmet sind, d. h. die eigentlichen Qaçîden (resp. Qiṭ'as) und ein paar kürzere, mehr ghazelenartige Lieder von gleicher Tendenz, die vielleicht auch nur Bruchstücke grösserer Lobgedichte sind. Bemerkenswerth ist bei den ersten derselben die ganz gleiche Schlusswendung, die manchmal sogar im Wortlaut übereinstimmt, so dass man sie für Theile eines förmlichen Liedercyclus halten könnte. —

1) Atashk. Ell. 387 f. 182 — 17 f. 190ᵇ. Intikhâb Ousel. 198 f. 86ᵇ:

1 منم غلام خداوند زلف غالیه گون تنم شده چو

سر[1]) زلف او نوان ونگون

همی ندانم در فجر چند پیچم چند همی ندانم

کز دوست چون شکیبم چون

زبس کزین دل پر خون من بر آید جوش زبس که

دیدهٔ بخواب من بریزد خون

فروز لاله چو عذرا بجلوهٔ وامق خروش ابر چو لیلی

بجلوهٔ مجنون

5 زخاک شوره برآورد بوی باد شمال زسنگ خاره عیان

کرد اشک ابر عیون

1) قن in Intikh. In Atashk. finden sich nur V. 1, 2 und 6.

زباد خاك معنبر بعنبر سارا زابر شاخ مكلّل بلولو مكنون

زسنگ خارا پيدا همیشود مینا زروز[1]) مینا مرجان همیشود بیرون

سرشك ابر پراگنده كرد در بستان نسيم باد پديدار كرد در هامون

همی بلرزد شاخ سهی زباد بهار چو چشم خصم زتيغ امير روز افزون

مكان نصرت و اقبال مير ابو نصران كه هست طالع او جفت طالع ميمون

زبان كهتر و مهتر بمدح او گردان روان عاقل و جاهل بمهر او مرهون

يكی عطاش همه گنجهای اسكندر يكی سخاش همه علمهای افلاطون

زدست او شده لولو بابر متواری زتيغ او شده آهن بسنگ دُر مدفون

اگر بباد بر از دست تو حديث كنند اگر زتيغ تو

1) روزی in der Handschr. روز scheint hier im Sinne von »Helle, Glanz« gebraucht. —

افتد خیال در جیحون

15 بسان گردون آنجا روان شود کشتی بسان کشتی آنجا روان شود گردون

دهان بمدح تو گردد ز گوهر آگنده زبان ز نکر تو گردد بغالیه معجون

گسسته بادت نوروز روزهٔ نیسان هزار روزه ونوروز بگذران ایدون

یکی بطاعت توبه بعهد پیغمبر یکی برامش و رادی برسم افریدون

همیشه تا که بنیسان برویدت نسرین همیشه تا مه کانون خوش آیدت کانون

»Eines Herrschers Dienst erkor ich, dessen Locken duftdurchzogen, 1
Und mein Leib, gekrümmt wie diese, schwankt wie diese her und hin.
Ach, wie lang ich mich noch winde in der Trennung Weh — nicht weiss ich's,
Weiss es nicht, wie ich's ertrage, dass so fern vom Freund ich bin.
Schon genug ist's, dass mir siedend wallt das Herz, das bluterfüllte,
Dass mir Blut das Auge träufelt, dem der Schlummer längst entrückt.
Glüht doch, wie ob Wâmiq's Reizen Adhra einst, aufs Neu die Tulpe,

Jauchzt doch das Gewölk wie Leila, von Majnûnens Huld entzückt!
Wohlgeruch entlockt der Nordwind selbst der Steppe salz'gem Boden,
Quellen weckt der Wolken Thräne selbst aus hartem Felsgestein;
Mit des Ambra reinem Dufte tränkt der Erde Staub der Lufthauch,
Und um Zweige lässt die Wolke Perlen sich zum Kranze reihn.
Aus dem Boden, undurchdringlich, drängt empor das lichte Grün sich,
Und aus grünem Blätterschmelze ringt Korallengluth sich los;
Feuchte Zähren hat im Garten weit umhergestreut die Wolke,
Und des Windes Wehn durchathmet sanft und lind des Blachfelds Schooss.
Und der schlanke Zweig erzittert vor dem Lenzhauch, wie des Feindes
Auge vor dem Schwert des Herrschers, dessen Macht sich wachsend mehrt,
Ja, bei ihm, dem Siegesfürsten, schlug den Wohnsitz Sieg und Heil auf,
Als des Glückssterns Zwillingsbruder hat sich sein Gestirn bewährt.
Seines Ruhmes Preis verkündet Hoch und Niedrig aller Orten,
Alle Weisen stehn und Thoren tief in seiner Liebesschuld;
Ein Geschenk von ihm wiegt reichlich auf Iskanders ganze Schätze,
Und nicht mehr gilt Platos Weisheit, als ein Zeichen seiner Huld.
O mein Fürst, die Wolken füllte deine Hand mit Perlenspende,

In des Steines Leib schuf Einen ganz allein
dein Schwert hinein,
Und sobald von deiner Hand nur Kunde kommt
dem Flug der Winde,
Und sich in des Oxus Fluthen spiegelt deines
Schwertes Schein,
O, dann stürmt mit Aetherschnelle hier das Fahrzeug durch die Wogen,
Und dem Fahrzeug gleich an Schnelle dreht
sich dort des Aethers Rund;
Wird doch, denkt sie rühmend deiner, moschusduftig jede Zunge,
Wird doch, singt er deinen Lobpreis, voll Juwelen jeder Mund!
Drum zum neuen Jahr erquicke stets dich reichster Frühlingssegen,
Und noch tausendmal hieniden blüh' dir Lenz
und Lenzeslust;
Sie geniesse fromm ergeben dem Propheten —
ihn verbringe [1])
Frohgelaunt, und gleich Feridûn sei des Wohlthuns dir bewusst,
Und so lebe fort, so lange Dir im Mai noch
sprosst die Rose
Und des Heerdes Gluth dir freundlich winkt in
Winterssturmgetose!«

1) Wörtlich würde es heissen: noch 1000 روز und نوروز verbringe hier, den einen in der reuigen Andacht des Propheten, den anderen in Lust und Freigebigkeit. Ich nehme روز hier im Sinne des türk. كوندلك وظيفه stipendium diurnum; es könnte freilich auch im Sinne von صوم Fasten hier stehen: »verbringe hier noch 1000 Fasten (im Fastenmonat Ram.) und Neujahre, erstere in, letztere in —.«

2) Ouseley 198 f. 175:

به ابروان چو کمان و بزلفکان چو کمند لبانت ساده
عقیق و رخانت ساده پرند

پرندلاله فروش وعقیق لولوبار کمانت غالیه تیر و
کمند مشکین بند

شکفته نرگس داری بزیر خمّ کمان دمیده سنبل داری
بزیر بند کمند

بخط جادوی آراسته پرند بمشك بدست نیکو آراسته
عقیق بقند

صبّات[1]) هوات بردل من چند گونه دام نهاد بر تن
من چند گونه بند افکند

میان دامم وچشمم همی نبیند دام بزیر بندم و
چشمم همی نبیند بند

بسان پشت منست آن دو زلف مشك آگین بسان
جان منست آن دو چشم سحر آگند

اگر نه پشت منست آن چرا شد ست دوتاه اگرنه
جان منست آن چرا شدست نژند

1) Dieser Vers ist theilweise unleserlich in der Handschrift. Die obigen Worte sind conjicirt.

چو نور قبلهٔ زردشت نور دو رخ تو نشسته کُردوی
اندر ز مشک غالیه اند

دلم بزلف ببردی بچشم بسپردی اگر بجان نگرانم
بدل شدم خرسند

بهیچ بند نترسم که طبع من بکشاد عطای خسرو
کشور کشای دشمن بند

بلند رای بلندی فزای ابو نصران که پَست پشّه
بآرایش آسمان بلند

مَلَک نهاد و مَلَک سیرت و مَلَک دیدار ملک نژاد و
ملک همّت و ملک پیوند

بسا کسان که وی از بند شاه پند آموخت که
روزگار ندانست بند اورا پند

چنان نیارد از آواز سایلانش جان که جان مادر از
آواز گم شده فرزند[1])

هدو ز خندهٔ تیغش همیشه مالامال ولی ز نالهٔ زرمش
همیشه خنداخند

هرآنچه دادور آنرا بسالها اندوخت هرآنچه قارون

1) Dieser eine Vers wird auch in Atashk. citirt.

آنرا بعمرها بتکند

یکی برزم ثنایش بلحظهٔ نگسست یکی بروزیٔ دشمن
به بزم بر آکند

بجود او نرسد وهم هیچ زیرک سار بفضل او نرسد دست
هیچ دانشمند

اگر بخواهی کز تو بلا گسسته شود هوای اورا با جان
خویش کن پیوند

بماه مانی با جام (1 می فراز سریر بشیر مانی با تیغ کین
فراز سمند

بسا کسان که خدایش جهان نداد تمام نداد مال
نه خود برخیٔ نه بوی بکند

ترا بداد خدا این جهان ونیکو داد بزرگ کرد ترا
زآنکه هست روزی مند

همیشه تا نکند کس قیاس قند ز زهر همیشه تا نکند
کس قیاس باز به پند

چو پند باد ابر دست دشمنانت (2 باز چو ز هر بادا

1) Die Handschrift hat ein mir unverständl. او (?).

2) So ist jedenfalls statt des in der Handschr. fälschlich stehenden پند پند zu lesen. —

در کام دشمنانش قند ء

»O du mit Brauen bogengleich und Locken kraus zum Netz verstrickt,
Mit Lippen, glühend wie Rubin und zarten, seidenweichen Wangen,
Von Tulpen sprosst die Seide dir — es träufelt Perlen dein Rubin,
Dein Bogen schiesst manch duft'gen Pfeil, und Moschus hält dein Netz umfangen.
In deiner Bogenwölbung Schirm hegst blühende Narcissen du,
Und Hyacinthen hauchen auf, von deines Netzes Band umschlungen;
Wie Moschusglanz der Zaub'rer Flaum mit Herrschermacht der Seide lieh,
So ward auch ganz von güt'ger Hand mit Zucker dein Rubin durchdrungen.
In wieviel Schlingen hat mein Herz die Liebe schon zu dir gelegt!
In wieviel Fesseln mir den Leib die Leidenschaft für dich geschlagen!
Ich bin umgarnt, und seh' es nicht, wie ich im Fallstrick mich verwirrt,
Ich bin im Bann, und seh' es nicht, wie ich der Kette Last muss tragen.
Das Ringelhaar, das duft'ge dort, ist meines Rückens Abbild ganz,
Das zaubervolle Augenpaar, es spiegelt meine Seele wieder;
Wenn jenes nicht mein Rücken wär', wie bög' es dann sich krumm und kraus,
Wenn dies nicht meine Seele wär', wie senkte dann sich's schmachtend nieder?
Wie Zarathustra's Qibla hell, so leuchtet deiner Wangen Schein,

Ein duft'ges Beet voll Moschus ist's, das sie zum Wohnsitz sich errangen;
In's Auge senktest du mein Herz, das deine Locken mir geraubt,
Drum stillt mein Herz nun fort und fort der Seele sehnendes Verlangen.
Doch Knechtschaft schreckt mich nicht! mein Sein erschloss ja ganz voll Huld der Fürst,
Der Länder aufschliesst mit dem Schwert, in Knechtschaft zwingt, die frech ihm wehren,
Und hochsinnsvoll so hoch sich schwingt, dass, wenn sein Siegerglanz sie trifft,
Sich selbst die winz'ge Mücke bläht und mit dem Himmel misst, dem hehren!
Er, dessen Wandel engelrein, dess Antlitz engelgleich erstrahlt,
Ihn zeugten Engel, und empor wie Engelflug geht all sein Streben;
Gar Manchem schon hat guten Rath der Sclavendienst des Schâhs geliehn,
Und bess're Lehre ihm ertheilt, als je das Schicksal ihm gegeben!
Ersehnt des Fürsten Seele doch der Hülfeflehen Ruf so sehr,
Wie des entschwund'nen Knäbleins Laut der Mutter Herz in bangem Sehnen.
Dem Feinde geht es durch und durch, erglänzt im Lächeln hell sein Schwert,
Doch frohes Lächeln zeigt der Freund, hemmt schluchzend er den Lauf der Thränen [1]).
Soviel erwarb er, wie der Fürst, der allgerechte [2]), Jahr auf Jahr,

1) So nach der Lesart وزرم; einfacher liesse sich vielleicht رزم lesen, »über sein Schlachtgeschrei freut sich der Freund«.

2) Ich verstehe unter dem دادور den durch seine

Soviel entzog er wie Qârûn sich selbst in langen Lebenstagen;
Und rühmt im Kampf er Jenen stets, so giebt er auch zum Unterhalt
Noch gar dies reich ersparte Gut dem Feind bei fröhlichen Gelagen [1]).
Drum fasst auch seinen Edelmuth wohl nimmer eines Denkers Geist,
Wohl nimmer wird des Weisen Hand hinan an seine Tugend reichen;
Und willst du jedes Missgeschicks auf immerdar entledigt sein,
O nimmer lass die Liebe dann zu ihm aus deiner Seele weichen!
Ja, Fürst, den Becher in der Hand, strahlst auf dem Thron du gleich dem Mond,
Und Löwen gleichst du, sieht man hoch zu Ross der Rache Schwert dich schwingen.
So manchen giebts, dem nicht von Gott die ganze Erde ward zu Theil,
Dem alles fehlt, die Hoffnung selbst, ein Stückchen Zucker zu erringen [2]),
Doch dir gab Gott dies Weltreich ganz, gab Schätze dir und Macht und Ruhm,

Gerechtigkeit sprüchwörtlich gewordenen Nûshirwân. Gewöhnlich bezeichnet dieser Ausdruck Gott selbst. Dieser und der folg. Vers sind übrigens, wie es scheint, nicht ganz correct — was ich gedeutelt habe, lässt sich sprachlich wenigstens rechtfertigen. —

1) In dem Sinne, wie ich den Vers gefasst, würde بروزی الخ bedeuten: »für den, zum Zwecke des Lebensunterhaltes des Feindes.« Misslich bleibt die Deutung der beiden یکی, wovon das eine mit dem ثنایش zusammen doch wohl auf eine Person, das zweite auf eine Sache bezogen werden zu müssen scheint.

2) Ich fasse hier بوی im Sinne von spes, siehe Ḥâfiz ed. Brockh. S. 3, V. 2.

Denn unumschränkt kann er und frei mit allen
Erdengütern schalten —,
Und drum, so lang noch irgendwer hienieden Gift
statt Zucker greift
Und nicht vom Falken scheiden kann die Bande,
die umspannt ihn halten,
Umspann' als Band von Eisen stets der Falke
deiner Feinde Hand,
Verkehr' in deiner Feinde Schlund zum Gift
sich stets der Zuckerkand[1])!«

3) Butkh. Elliot. 32, f. 330 Randz. unten. Ataskh. a. a. O. — Sprenger 1378.

1 مهٔ نیسان شبدیخون کرد گوئی برمهٔ کانون که گردون

گشت ازو پر گرد و صحرا گشت ازو پر خون

زاشك ابر نیسانی بدیبا شاخ شد معلم زبوی باد آزاری

بعنبر خاك شد مجمون

یکی بر چرخ پیدا کرد پنهان کردهٔ ایزد یکی بر دشت

پنهان کرد پیدا کردهٔ قارون[2])

بخندد لاله بر صحرا بسان چهرهٔ لیلی بگرید ابر بسر

گردون بسان دیدهٔ مجنون

5 از[3]) آب جوی هر ساعت همی بوی گلاب آید درو

1) Vergl. den Schluss des folg. Gedichtes.

2) Dieser Vers fehlt in Ataskh. Sprenger 1378 hat auch im ersten Hemistich: پنهان کرد پیدا.

3) Butkh. und Sprenger: از آن از جوی Buthk. und Sprenger im zweiten Hem.: بدو در شست.

شستست پنداری نگار من رخ گلگون

اگر[1]) یک زلف بفشاند ازو صد دل رها گردد و گر

یک چشم بگمارد دو صد دل را کند پر خون

الا تا سوزن و سوسن یکی باشد بَرِ کالبو الا تا شکّر و

افیون یکی باشد بَرِ مجنون

هوا خواهانت را در زیر سوزن باد چون سوسن بد

اندیشانت را در کام شکّر باد چون افیون ۰

»Fürwahr, es warf bei Nacht den Mond des Win- 1
ters der Maimond siegreich nieder in den Grund,
Nun füllt mit Staub sich ganz der Kreis der Sphä-
ren, des Blachfelds Teppich färbt mit Blut sich
bunt.
Die Thräne, die entströmt dem Lenzgewölke, sie
hat Brocat gewirkt in alle Zweige,
Und rings getränkt hat mit des Ambra Dufte des
Frühlingswindes Hauch der Erde Rund.
Was einst Qârûn an's Licht geschafft von Schätzen,
das birgt tief drinnen der im Schooss der
Fluren,
Und was geheimnissvoll verhüllt der Schöpfer,
das macht im weiten Weltall jene kund[2]).
Es träufelt Zähren hoch vom Himmelsbogen, wie
einst das Auge des Majnûn, die Wolke —
Und hold und lieblich lächelt im Gefilde, wie
Leilas Angesicht, der Tulpe Mund.

1) Die 8 letzten Verse fehlen in Atashk.
2) Hier und im folg. Verse habe ich die Hemistiche in der deutschen Uebersetzung umgestellt, lediglich des Reimes wegen.

Des Rosenwassers süssen Duft enthauchet zu jeder Stunde fort und fort die Welle,
Als ob sein rosig Antlitz drin gebadet der Schatz, mit dem mich eint der Liebe Bund.
Ja! wenn mein Lieb nur eine Locke schüttelt, wohl hundert Herzen werden los und ledig,
Und wenn nur einen Blick sein Aug' entsendet, zweihundert Herzen schlägt es blutig wund.
So lange drum der Lilie spitze Blätter von Nadeln nicht des Thoren Blick kann scheiden,
Und Süss wie Bitter [1]) gleiches Wohlgefallen dem Narrn erweckt, der nicht im Hirn gesund,
So lange wandle deinen Freunden allen zum Lilienblatt sich jedes Nadelkissen,
So lange wandle jeder süsse Tropfen zum bittren sich in deiner Feinde Schlund!« —

4) Butkh. Ell. 32 ff. 299ᵇ—300ᵇ.

1 تا دل من با هوای نیکوان [2]) گشت آشنا در سرشک
دیده گردانم چو مرد آشنا

تا مرا بیند [3]) هوا باکس نگیرد دوستی تا مرا [4]) یابد
بلا با کس نگردد آشنا

من بدی را نیکتر جویم که مردم را بدی من بلا را
پیشتر خواهم که مردم را بلا

1) eigentl.: »Zucker wie Opium.«
2) V. 1 und 2 finden sich auch in Ouseley 198. Dort steht شد statt گشت.
3) Ouseley: میان statt هوا.
4) Ouseley wieder: بیند.

من دلی دارم بسان آسیا گردان زغم وز سرشک من
بگردد بر سر کوه آسیا

را ست گونی کیمیا دارد همی باد خزان باغ را چون
کرد بر زر گر ندارد کیمیا

باد سرد آید چو آه عاشقان هنگام هجر بانگ زاغ آید
چو از معشوق پیغام جفا

باد خوارزمی کنار باغ چون دینار کرد چون کنار
زایرانرا ابر دست پادشاه

خسر و صافی نسب بو نصر ملان آنکه هست جسم
او صافی ز هر عیبی چو نور مصطفا

تا هدو دارد ندارد هیچ شغلی جز نبرد تا درم دارد
ندارد هیچ کاری خز سخا[1])

عادت او فی تغیّر وعدهٔ او فی خلاف کوشش او فی
تکلّف کیشش[2]) او فی ریا

آتش شمشیر او الماس بگذارد ولی زآب جود او بالماس

1) Dieser Vers, aber mit Umstellung der beiden Hemistiche, wird auch in Nadr. citirt.

2) کیشش habe ich eingefügt, da hier in der Handschrift eine Lücke ist. —

اندر دل روید گیا

از مَلَک خیزد بدی در طبع او ناید بـدی درقـرآن

افتد خطا در لفظ او ناید خطا

تیر او مانند روزی که زیّ مردمـ رسد تیر دشمن باز

گردد سوی دشمن چون صدا

پادشاها پارسائی و زتو مردم شاد دل خوش زیَد مردم

بعهد پادشاه پارسا

گر تو بفروشی مرا چون بندگانت حق تراست زآنکه

ده بارم دیَت دادی و صدباره بهـا ء

»Seit mein Herz vertraut geworden mit der
Neigung holder Schönen,
Bad ich gleich dem Gottvertrauten stets in
Thränen meinen Blick;
Seit sie mich geschaut, befreundet sich mit Kei-
nem sonst die Liebe,
Seit es mich gefasst, vertraut sich Keinem
sonst das Missgeschick [1]).
Eifriger nach Elend jag' ich, als nach Menschen
jagt das Elend,
Früher als das Leid die Menschen, such' ich
selbst das Leid mir auf;
Wie mein Herz sich dreht vor Kummer müh-
lengleich, so dreht die Mühle

1) Dreifaches Wortspiel mit آشنا; das zweite Mal mit entschieden mystischem Anklang.

Selbst sich wohl auf Bergeshöhen, netzt sie meiner Thränen Lauf.
Wahrlich ja, es führt der Herbstwind mit sich her den Stein der Weisen,
Könnt' er wohl den Hain vergolden, ständ' ihm solche Kunst nicht bei?
Doch der Wind ist kalt wie Seufzer Liebender zur Trennungsstunde,
Und wie Trübsalspost vom Liebchen tönt in's Ohr mir Rabenschrei.
Ja! es schüttet in des Haines Schooss Khorazmias Wind Denare,
Wie der Wolke gleich des Fürsten Hand in der Besucher Schooss —
Jenes hehren, mimlângleichen [1]), edelbürt'gen Siegesfürsten,
Der wie Lichtglanz des Propheten strahlt an Körper makellos.
Ja, so lange ihm ein Feind noch lebt, ist nur auf Kampf bedacht er,
Und so lang ein Dirhem sein noch, schenkt er immer, schenkt er gern, —
Wandellos ist all sein Wandel, nimmer bricht er sein Versprechen,
Mühelos ist all sein Mühen — ewig bleibt ihm Heucheln fern.
Ueberstrahlt schon seines Schwertes Glanz Demanten, sprossen gar noch
Kräuter im Demanten, netzt ihn seiner Spende Vollerguss; —
Ob auch Engel straucheln, nimmer strauchelt er; ob selbst der Qurân
Irren mag, von keinem Irrthum trübt sich seiner Rede Fluss.

1) Mimlân ist der Name eines oft als Muster und Vorbild citirten alten Königs von Adharbijân.

So unfehlbar wie die Menschen trifft ihr Schicksal, trifft sein Pfeil auch;
Aber echogleich zum Feinde prallt des Feindes Pfeil zurück!
Ja! voll frommen Sinnes bist du Fürst, und alles freut sich deiner,
Unter frommer Fürsten Scepter glücklich leben, welch ein Glück!
Ja, und wenn du gar als Sklaven mich verkaufst, — nicht darf ich klagen,
Hast so Kauf- wie Sühngeld zehnfach, hundertfach mir abgetragen!« —

5) Elliot 293 f.

1 خیال رزم تو گر در دل عدو گذرد ز بیم تیغ تو بندش
جدا شود از بند

زعدل تست بهم باز و صعوه را پرواز زحکم تست شب
وروز را بهم پیوند

بخوشدلی گذران بعد ازین که باد اجل درخت عمر
بد اندیش را زپا افکند

همیشه تا که بود از زمانه نام و نشان مدام تا که بود
گردش سپهر بلند

5 ببزم عیش و طرب باد نیکخواه تو شاد حسود جاه
تو بادا ز غصّه زار و نژند

»Wenn Kampf mit dir der Feind nur plant, so 1 packt ihm Furcht vor deinem Schwert

Die Glieder all, dass sie vereint nicht mehr mitsammen hausen wollen;
Doch eint zum Flug sich Falk und Spatz, seit als gerecht sie dich erkannt,
In Freundschaft eint sich Tag und Nacht, seitdem dein Richterspruch erschollen!
So lebe frohbeglückt dahin, hat doch der Sturmwind des Geschicks
Zu Boden ganz herabgestürzt den Lebensbaum der Ränkevollen;
Und stets, so lang' ein Name noch und eine Spur von dieser Welt,
So lang der Himmel müde nicht, im Kreislauf fort und fort zu rollen, —
Erfreue Jeden, der dir hold, so Zechgelag wie Sangeslust,
Verzehre Alle Sorg' und Pein, die neidisch deiner Würde grollen!«

An diese grösseren Lobgedichte schliesse ich zunächst die schon erwähnte Elegie, und lasse dieser dann die eigentlichen Ghazelen folgen, die freilich vielfach auch das Lob des Naçr zum Gegenstande haben.

6) H. Iql, Elliot 158 f. 529^b—33. 159 f. 166^b—169. Ouseley 377 f. 515 — 518^b.

1 مرا بسود وفرو ریخت هرچه دندان بود نبود دندان

لابل[1]) چراغ تابان بود

سپید و سیم‌زده بود و در و مرجان بود ستارهٔ سحری

بود و قطر باران بود

1) Arabischer Ausdruck: »nein — sondern.«

یکی نماند کنون[1]) زآن همه بسود و بریخت چه
نحس بود همانا که نحس کیوان بود
نه نحس کیوان بود و نه روزگار دراز چه[2]) بود راست
بگویم قضای یزدان بود
جهان همیشه چنین است گرد گردانست همیشه تا
بود آئینش گرد گردان بود
همان که درمان باشد بجای درد شود وباز درد همان
کز نخست درمان بود
کهن کند بزمانی همان کجا نو بود و نو کند بزمانی
همان که خلقان بود
بسا شکسته بیابان که باغ خرّم گشت وباغ خرّم
گشت آن کجا بیابان بود
همی چه دانی ای ماه روی غالیه موی که حال خادم
تو پیش ازین بچه سان بود
بزلف[3]) چوگان نازش همی کنی تو مدد ندیدی اورا
آنکه که زلف[4]) چوگان بود

1) Ouseley 377: آن statt زان.
2) Ell. 158 u. 156: چه بودنست بگویم. —
3) u. 4) Ouseley 377 schiebt ein و zwischen beiden ein.

شد آن زمانه که او شاد بود و خرّم بود نشاط او
بفزون بود و سیم نقصان بود
همی خرید و همی سخت بیشمار درم بشهر هرچه
یکی ترک نار پستان بود
بسا کنیزک نیکو که میل داشت بدو بشب زیارت
او نزد او به پنهان بود
نبیذ روشن ودیدار خوب وروی لطیف اگر گران بدر
من همیشه ارزان بود
15 همیشه شاد ندانستمی که غم چه بود دلم نشاط
طرب را فراخ میدان بود
بسا دلا که بسان حریر کرد بشعر ازآن سپس که
بکردار سنگ و سندان بود
همیشه چشمم زین زلفکان چابک بود همیشه گوشم
زین مردم سخندان بود
عیال نی زن و فرزند نی مؤنث نی ازین همه تنم آسوده
بود و آسان بود
تو رودکی را ای مُغ کنون همی بینی بدان زمانه

ندیدی که زین[1] خسیسان بود

بدان زمانه ندیدی که در جهان رفتی سرود گویان
گفتی هزار دستان بود

شد آن زمانه که شعرش همه جهان[2] بنشست شد
آن زمانه که او شاعر خراسان بود

کرا بزرگی و نعمت ازین و آن بودی مرا بزرگی و
نعمت زآل سامان بود

بداد میر خراسان[3] چهل هزار درم وزو فزونی یک
پنج میر پاکان بود

و زاولیاش پراگنده نیز شصت هزار بمن رسید بدان
وقت حال خوبان بود

کنون زمانه دگر گشت و من دگر گشتم عصا بیار که
وقت عصا و انبان بود«

»Abgebröckelt ist mir mählig Zahn um Zahn und 1
hingeschwunden,
O kein Zahn nur war's, als Leuchte strahlte je-
der hell und licht!

1) Ouseley 377: چنین سان.
2) Ell. 158: بنوشت.
3) Ouseley 377: چهار.

Ja, den Perlen, den Korallen glich er, weiss und silberglänzend [1]),
Glich dem Morgenstern, dem Tropfen, der aus feuchter Wolke bricht.
Keiner blieb mir! abgebröckelt, hingeschwunden sind sie alle,
Und des Unglücks Schuld, wer trägt sie? — nun, Saturn, der Unglücksstern —
Nein, fürwahr, Saturn sowenig als der Zeitlauf! und wer sonst denn?
Gottes ew'ger Rathschluss war es, glaubt, das ist der Wahrheit Kern.
Immerdar ist's so hienieden — nur ein Staub- 5
ball, ewig kreisend,
Ist das All, und kreisen musst' es ballgleich seit der Schöpfungszeit;
Nur weil Schmerzen uns beschieden, giebts Arznei — und weil's auf Erden
Seit Beginn Arznei gegeben, giebt es Schmerzen auch und Leid!
Muss auch endlich einmal altern, was da prangt in Jugendfrische,
Neu verjüngt sich einst doch alles, fiel's dem Alter gleich zum Raub.
Ist zur wüsten Trümmerstätte mancher Blüthenhain geworden,
Neue Blüthenhaine sprossen aus der Wüste dürrem Staub.
Wie kannst du, o mondgesichtig, lockenduftig Liebchen, wissen,
Wer und wie dein armer Sclave einst vor langen Jahren war?
Nährst du jetzt mit Lockenschlägeln seines 10
Schmachtens Lust, du sahst ihn
Damals nicht, da sich gekräuselt schlägelgleich sein eignes Haar.

1) Nach Qazwînî giebt es auch weisse Korallen.

Ach! dahin sind jene Zeiten, da er stets im Freudenrausch war,
Und je ärmer er an Silber, um so mehr an Frohsinn reich —
Da mit Dirhems ohne Zahl er in der Stadt hier aufgewogen
Jede Schöne, der des Busens Knospe schwoll granatengleich.
Huldvoll neigte sich in Liebe ihm so manches holde Mägdlein,
Und so mancher gab verstohlen er ein nächtig Stelldichein;
Ja, ob noch so hoch im Werth auch, stets um niedren Preis erstand ich's:
Hellen Trunk und süsse Wangen und ein Antlitz, zart und fein.
Allzeit war ich heit'ren Muthes, wusste nie, was Gram bedeutet,
Da mein Herz zum Tummelplatze stets der Frohsinn sich erkor;
Und manch' andres Herz, durch Lieder schuf ich's um zu weicher Seide,
War es gleich wie Stein und Ambos undurchdringlich hart zuvor.
Allzeit labte ich mein Auge gern an leichten Flatterlocken,
Redekraftbegabten Männern lieh mein Ohr ich allzeit gern; —
Nimmer nannt' ich einen Haushalt, nimmer Weib noch Kind meineigen,
Frei von Allem blieb ich immer — immer blieb mir Sorge fern.
Freilich du, mein greiser Meister, du siehst jetzt den Rûdagî nur,
Sahst ihn nicht in jenen Tagen, da er lebte wild und toll,
Sahst ihn nicht in jenen Tagen, da er hin- und hergepilgert,

Und in tausend Melodien frisch ihm Sang auf Sang entquoll.
Ach! dahin sind jene Zeiten, da sein Lied die Welt durchzogen,
Hin die Zeit, da seinen Sänger ihn ganz Khurâsân genannt;
Wem hat je schon solch ein Treiben Ruhm und Schätze eingetragen?
Ich empfing so Ruhm wie Schätze aus der Sâmâniden Hand!
Khurâsâns Gebieter schenkte mir der Dirhems vierzigtausend
Und der Frommenseelenfürsten Vierzahl [1]) zählte einen mehr, —
Sechzigtausend Dirhems sandten seine Freunde nah und fern mir,
Wahrlich ja, in jenen Tagen ging's auf Erden trefflich her.
Ach, ein andrer bin ich heute, and're Zeiten sind gekommen,
Her den Stab drum — Stab und Ranzen will mir heut allein noch frommen!«

7) Ouseley Add. 127 f. 17[b] und 22 (diese Sammlung hat nämlich dieselbe Reihe von Gedichten zweimal, einmal den blossen Text, das andere Mal Text und Commentar): Wâlih, Ell. 402 f. 124[b] — Spreng. 332 f. 177.

1 یکبار بود عید بهر سال بیکبار هموارهٔ مرا عید ز دیدار

تو هموار[2])

1) Wenn der Vers in diesem Sinne verstanden wird, und ich weiss keinen besseren, so lässt sich die Vierzahl der میران پاکان wohl nur auf die 4 ersten Khalifen (die gewöhnl. die 4 Freunde genannt werden) beziehen. —
2) Der erste und der letzte Vers dies. Gedicht, fin-

هربار بسال اندر یکبار بود گل روی تو مرا هست
همیشه گل پر بار

یکبار[1]) بنفشه چنبر از باغ بدسته زلفین تو پیوسته
بنفشست بخروار

یکبار[2]) پدیدار بود نرگس دشتی و آن نرگس چشم
تو همه سال پدیدار

نرگس نبود بار که بیدار نباشد بازست سیه نرگس
تو خفته و بیدار

سرو اسست که در باغ همه سال بود سبز با قدّ تو آن
نیز بود کج و نگونسار

یکچند بود لاله و گلنار همیشه تو لاله بکف داری
و گلنار برخسار

بیرایهٔ گلهای تو از عنبر ساراسست و آن لاله تـرا[3])

det sich auch in Sprenger 1378 und Butkh. Ell. 32 f. 299b Randzeile. Statt یکبار liest. Spr. یکروز u. statt یهر سال beide: بسال اندر یکبار بیکبار.

1) Ell. 402 یکروز.

2) Wâlih: یکهفته und im zweiten Hem. ساله statt سال.

3) Wâlih: وآن لالهٔ تر.

Und als Punkt im Cirkelkreise stellt dein enger Mund sich dar.
Mond- und Hûrîgleich im Heere strahlend bist Cypresse ganz du,
Hältst du Rast — und bist im Laufe schnell, wie je die Wachtel war.
Doch, ob du als Hûrî Panzer trägst — als Mond den Bogen spannst auch,
Als Cypresse singst, als Wachtel dich gesellst der Zecher Schaar,
Nimmer könntest du mit Ketten herzentflammte Liebchen binden,
Wärst du je der Schmeichelworte, je der süssen Rede baar!«

8) Makhz-algh. Ell. 395 f. 128. Ouseley Add. 127 f. 14^b u. 21. Wâlih. Lubb-i-Lub. (nur V. 2 und 3).

1 زِ فزوده جمال تو زیب وآرارا شکسته سنبل زلف تو مشکسارارا

قسم برآن دل آهن خورم که ازسختی هزار طرح نهادست سنگ خارارا

که از تو هیچ مروّت طمع نمیدارم که کس ندیده ز سنگین دلان مدارارا

تو رودگی بغلامی قبول[1]) اگر نکنی به بندگی نه پسندد هزار دارارا

1) Wâlih in Sprenger 332: اگر قبول کنی.

»O du, dess Schönheit fort und fort der Erde Schmuck und Zier vermehrt,
Dess Hyacinthgelock an Glanz dem Moschus selbst den Vorrang wehrt,
Bei deinem Herzen schwör' ich's laut, das, undurchdringlich gleich dem Erz,
Noch tausendfache Härte mehr dem härtesten Gestein gelehrt:
Auch nicht die allerkleinste Huld will ich begehren je von dir,
Wess Herz von Stein, wohl Keinem noch hat der ein freundlich Wort gewährt,
Und sollt' es dir zuwider sein, dass Rûdagî dir sclavisch dient,
Nun — ihm wär' selbst der Sklavendienst von tausend Königen nichts werth!

9) Butkh. Ell. 32 f. 300 Randz. Sprenger 1378.

1 صبر من کوتاه گشت از عشق آن زلف دراز کو گهی
با گل بسرّست[1]) و گهی با پل براز
تا بدیدم زلف او گردم بدیدم[2]) گل بسیر تا بدیدم
چشم او نرگس ندیدم مهره باز
آن همی آزاردم دل کش خریدارم بجان و آن همی
رنجاندم جان کش بپرورم بناز

1) Sprenger: بسیرست.

2) ندیدم گل, dann in dem Sinne »seit ich u. s. w., habe ich keine Rose mehr beschaut (arab. سیر).

گر همی خواهی که دولت سوی تو تازان[1] شود گرد
درگاهش بگرد و سوی ایوانش بتاز
او مرا شیرین چو جانست و کرامی چون جهان از
جهان و جان ندارد کس به یاری دست باز
مردم نی برگ را یک خدمتش صدساله[2] برگ مردم
نی ساز را یک مدحتش[3] صدساله سازء

»Gekürzt ward die Geduld mir durch die Liebe zu seines Haares langen Lockenwogen,
Die gleich auf's Neu des Fusses Sohl' umflüstern, wenn kaum sie Zwiesprach mit dem Staub gepflogen.
Seit ich als Scorpion sein Haar gesehen, hab' selbst im Lauch ich Rosen wahrgenommen,
Und seit sein Aug' ich als Narcisse schaute, hat mich zum Schau'n kein Gaukler mehr bewogen.
Um den ich meiner Seele Kaufpreis gebe, derselbe ach hat mir das Herz verwundet,
Und den mit Kosen ich gepflegt, derselbe hat mich um meiner Seele Ruh' betrogen.
Und doch — will je in dir der Wunsch sich regen, dass sich das Glück dir nahe raschen Fluges,
O dann umkreise einzig seine Schwelle, zu seinem Schloss komm raschen Laufs geflogen!

1) بازان in Sprenger.
2) Sprenger: یکساله.
3) Butkh. hat wieder خدمتش; ich habe in der Uebers. die beiden Hemist. umgestellt.

Er ist ja doch gleich süss mir wie das Leben,
steht mit der ganzen Welt mir gleich im Werthe,
Denn wahrlich, sehnen wird nach Welt und Leben sich keiner, dem ein holder Freund gewogen.
Lobpreist ihn einmal nur der Mittellose, er hat der Mittel dann für hundert Jahr,
Und reich auf hundert Jahre ist der Arme, der seinem Dienst sich einmal unterzogen.«

10) u. 11) Zwei im Metrum und Reim ganz übereinstimmende kurze Ghazelen, deren Verse ganz verschiedenartig zusammengeordnet werden. Dass es zwei Gedichte sind, geht aus dem doppelten Anfang hervor. Atashk. Khulâç Ouseley Add. 127 f. 16b und 21b. Wâlih. Safîn. (nur den zweiten Vers des zweiten Ged. enth.) Lubb-i-Lub. (nur die zwei ersten Verse des zweiten):

1 فغان من همه زان زلف تابدار سیاه که گاه پردهٔ لاله
ست و گاه محجر ماه

بوقت رفتنش از سیم ساده باشد جای بگاه خفتنش
از مشک سوده باشد گاه

خبر دهد بسیاهی زروی دشمن میر نشان دهد
بدوتائی ز پشت حاسد شاه

خدای گوئی از بهر زایرانش سرشت که شغل ایشان
دارد همی گه و بیگاه

نیاز نگذرد آنجا که شاه کرد گذر ملال ننگرد[1]) آنجا

که شاه کرد نگاه

ز بهر آمدگان دست او همیشه بکار ز بهر نامدگان

چشم او همیشه براه «

»Sein Lockenhaar voll Nachtglanz ist's, dem
meine Seufzer all entsprangen,
Bald hält es Tulpengluth umhüllt, bald sanftes
Mondenlicht umfangen.
Eilt raschen Laufes er dahin, so schimmert's
lautrem Silber gleich,
Und sinkt in Schlaf er, haucht es Duft, als sei's
in Moschus ganz zergangen!
Wenn seiner Locken Krümmung lehrt, wie sich
des Neiders Rücken krümmt,
So conterfeit in ihrem Schwarz der Schâh des
Feindes schwarze Wangen.
Fürwahr, es schuf ihn Gott, so scheints, nur
den Besuchern all zu Lieb,
Die allzeit ihn um Hülfe flehn, die nie um Ort
noch Stunde bangen.
Denn wo des Fürsten Fuss geweilt, macht Noth
und Mangel nie sich kund,
Und nie wird seines Umgangs satt, wer seines
Huldblicks Gunst empfangen.
Stets wirkt geschäftig seine Hand für jeden, der
sich ihm genaht,
Stets sucht nach dem, der fern noch weilt, sein
Aug' voll sehnendem Verlangen.«

1) Wieder نگذرد in Wâlih.

1 سماع و بادهٔ رنگین و ساقیان چو ماه اگر فرشته بود

بیفتد نمی رود از راه

نظر چگونه بدوزم که بهر دیدن دوست زخاك[1]) من

همه نرگس دمد بجای گیاه

کسی که آگهی از ذوق عشق جانان یافت ز خویش

حیف بود گر دمی بود آگاه

»Ha Reigentanz und farb'ger Wein und mondes- 1
lichte Schenkenwangen,
Vom Pfade wich' ein Engel selbst, dem solch
ein Anblick aufgegangen!
Wie schlösse ich mein Auge denn? wird einst
doch, um den Freund zu schaun,
Auf meinem Staub statt Gras und Kraut manch
hold Narcissenauge prangen!
Verschmäht doch ganz sein eig'nes Ich, gedenkt
er je noch seines Ich,
Wer einmal nur ein süsses Lieb im höchsten
Liebesrausch umfangen[2])!«

12) Butkh. Ell. 32, f. 299[b] Randz. unten.

1) Khulâç.: زخاکی.

2) Durchaus mystisch von der Selbstentäusserung in der Liebe; daher auch der technische Ausdruck ذوق. Atashk. citirt V. 1—4 u. 6 des ersten Gedichtes, Ouseley Add. u. Wâlih V. 1—8 des zweiten u. V. 5 u. 6 des ersten als ein Ganzes.

من آن کشیدم و آن[1]) دیدم از غم هجران که هیچ آدمیٔ نیست دیده از دوران

کنون وصال تو بر دلم فرامش کرد خوشا وصال بتان خاصه در پیٔ هجران

چو من بشادی باز آمدم بلشکر گاه گشاده طبع و گشاده دل و گشاده زبان

بسان بنده فَنُز[2]) بر گشاده گامده بود زراه سوی من آن سروقدّ موی میان

بناز گفت که نی من چگونه بودت دل بشرم گفت که بی من چگونه بودت جان

جواب دادم و گفتم که ای بهشتی روی بلای جان من و فتنهٔ بتان جهان

چو حلقه کرده جهانم بزلف چون عنبر که هیچ سو گوی جهانم بجعد چون چوگان

چنان بدم زغم آن دو چشم تیر انداز چنان بدم زغم آن دو زلف مشک افشان

1) Das zweite آن habe ich des Metrums wegen eingeschaltet.

2) Handschr. fälschl.: فغوز.

کجا بودشب بی ماه وروز بی خورشید کجا بود گلبی
آب و گشت بی باران
بناز گشته برم عنبرین از آن سنبل ببوس گشته لبم
شکّرین از آن مرجان
گه او عقیق‌خر و من شده عقیق فروش گه او نبیذ
ده و من شده نبیذ ستان ؛

»Ich hab' soviel des Grams erfahren, soviel der Trennung Bitterkeit
Gekostet, wie kein Staubgeborner im schicksalsvollen Lauf der Zeit.
Nun hat für immer wohl dem Herzen Valet gesagt die Liebeswonne,
Und doch — mit süssen Liebchen kosen, wie schön, zumal nach Trennungsleid!
Ja, damals, als gelösten Herzens, gelösten Sinns, gelöster Zunge
Zum Lagerzelt ich heimwärts wieder gekehrt, die Freude im Geleit,
Da trat noch ganz nach Sclavenweise hochaufgeschürzt, wie sie gekommen,
Mir auf dem Wege sie entgegen, die haarfein schlankgestalt'ge Maid,
Und schmachtend sprach sie: »o wie ward es dem Herzen dein, von mir so ferne?«
Und schaamroth sprach sie: »o wie ward es der Seele dein, von mir so weit?«
Und Antwort gab ich ihr und sagte: »o du, die paradieseswangig
Die Seele mein und alle Schönen der Welt in Aufruhr setzt und Streit,

Der ambragleichen Locken wegen ward kreisrund
wie ein Ring die Welt mir,
Ganz ward als Ball dem krausen Haar sie, dem
schlägelgleichen, dienstbereit.
So hat der Gram um deine Augen, draus Pfeile
blitzen, mich verwundet,
Der Gram um deine beiden Locken, die Moschus
streuen weit und breit.
Kann wohl die Nacht des Monds entrathen? der
Tag der Sonne? kann in Dürre
Die Rose blühn? die Flur gedeihen in regen-
leerer Trockenheit?«
Doch nun — mit Ambra füllt' im Kosen ihr
Hyacinthgelock die Brust mir,
Und ihr Korallenmund im Kusse lieh meiner
Lippe Süssigkeit.
Bald musste ich zum Kauf ihr reichen den Car-
neol[1]), und sie erstand ihn,
Bald bot sie selbst des Weines Spende, und ich
that ihr im Wein Bescheid.«

13) Ouseley 198 f. 175.

1 صرصر هجر تو ای سرو بلند ریشهٔ عمر من از بیخ بکند

پس چرا بستهٔ اویم همه عمر اگرآن زلف دوتائیست کمند

به یکی جان نتوان کرد سوال کز لب لعل تو یکبوس بچند

1) عقیق Carneol ist Bild für Lippe und Wein zugleich.

به فکند آتش اندر دل حسن آنچه هجران بود از سینه فکند ؛

»Es warf der Sturm der Trennungsqual von dir, 1
Cypresse, hoch und hehr,
Mir meines Lebens Fasern all entwurzelt weit
vom Stamm umher,
Was soll ich drum an sie allein gebunden sein
mein Leben lang,
Das doppelzüngig krause Haar gleicht doch der
Schlange gar zu sehr.
Und kann ich dir noch bittend nahn mit ganzer Seele, ungetheilt?
Es schenkt den gleichen Kuss wie mir dein
ros'ger Mund ja andren mehr.
Gewiss, es war ein Feuerbrand, den mir in's
Herz die Schönheit warf,
Was Trennung heisst, er hat's getilgt — drum
macht kein Gram die Brust mir schwer.

14) Butkh. f. 299b. Randz. Sprenger 1378.

1 ای جان من از آرزوی تو رنجان بنمای یکی روی و به بخشای برین جان

دشوار نمائی رخ و دشوار دهی بوس آسان برهای دل و آسان ببری جان [1])

نزدیک من آسانی تو باشد دشوار نزدیک تو دشواری من باشد آسان

1) Dieser Vers wird auch von Wâlih citirt.

»Mir krankt die Seele, weil sie bange sich sehnt nach deinem Angesicht,
Ach, einmal gönne meiner Seele, nur einmal deiner Wange Licht!
Dir schafft es Pein, Dich zu entschleiern, und nur voll Unmuth schenkst du Küsse,
Indess zum Herz- und Seelenraube dir nie der leichte Muth gebricht.
Gar schwer erscheint in meinen Augen, was dir so wenig Mühe kostet,
Und was mir bitt'res Leid bereitet, dich selber ach! beschwert es nicht[1]).«

15) Wâlih. Ouseley Add. 127 ff. 17 u. 22. Khulâç. (enthält nur den dritten Vers).

1 ای دل آشوب و دل[2]) آرام و دل آزار پسر عهد بسته

بوفا با من و نا برده بسر

من بیارایم هر روز رخان را بسرشک تو بیارائی هر روز

رخان را به کهر

تا فراق تو خبر بود عیان بود تنم چون فراق تو

عیان گشت تنم گشت خبر

»O die dem Knabenherzen du viel Freuden schufst und Leiden,
Du schwurst mir Treu' und konntest doch des Treubruchs Schuld nicht meiden.

1) In Sprenger 1378 hat dies Gedicht noch 30 Verse, in deren Besitz ich bis jetzt leider noch nicht gekommen.

2) Ouseley Add. 127 hat auf Z. 17: دل آرای.

So schmück' ich mir die Wangen nun mit Thränen täglich aus,
Indess die deinen Tag für Tag in Perlenschmuck sich kleiden [1]).
So lang dein Scheiden Sage nur, war Wirklichkeit mein Leib,
Doch ach! zur Sage ward er selbst, seit Wirklichkeit dein Scheiden!«

16) Haft Iql. a. a. O.

1 ای آنکه غمکشی و عزا داری اندر نهان سرشك همی
باری
غوار کرد خواهی گیتی را گیتیست کی پذیرد غواری
مُستی مکن که ننکرد او مُستی زاری مکن که نشنود
او زاری
شو تا قیامت اندر زاری کن کی رفته را بزاری باز آری
5 ابری پدید نه[2]) و کسوفی نه بگرفت ماه و گشت
جهان تاری

»O du, den Kümmernisse viel und Gram und 1
Leid beschweren,
Der heimlich in Verborgenheit vergiesst so manche Zähren,

1) گوهر (Perlen) sind aber zugleich ebenfalls ein sehr geläufiges Bild für »Thränen«.
2) Ell. 158: لی.

Du fülltest, ach, mit Milde gern, mit Sanftmuth wohl die Welt —
Doch Welt bleibt Welt — wie würde je sie mild auf dein Begehren?
Sie sieht ja doch die Trauer nicht — drum stell dein Trauern ein,
Sie hört kein Jammern, besser drum, dem Jammerruf zu wehren!
Den Abgeschied'nen rufst du nie durch deinen Gram zurück,
Und magst du bis zum jüngsten Tag dich auch in Gram verzehren!
Sieh, keine Sonnenfinsterniss, kein einzig Wölkchen droht,
Da trübt der Mond sich und in Nacht muss sich die Welt verkehen!«

17) Das schon von Hammer übersetzte Gedicht, durch welches der Emîr Naçr zur Rückkehr nach Bukhâra angestachelt wurde. Daulatsh. Jâmî (p. ٨٣ u. 95). Haft Iql. Atashk. Khulâç-ulafk. Mirât-ulkhay. Nach Daul. und den ihm Folgenden waren es die Reize von Harât und seiner Umgebung, die den Emîr so fesselten, dass er der Abneigung seiner Grossen zum Trotz dort blieb; nach Jâmî und dem H. Iql. dagegen Marw-i-Shâhjahân. Auf Antrieb der Hofleute improvisirte dann eines Morgens beim Frühtrunk Rûdagî unter Zitherbegleitung jene Verse, deren Text freilich in den einzelnen Documenten, ja selbst in den verschiedenen Copien desselben Werkes sehr variirt. Ich lege die Lesart Jâmîs (a. a. O.) zum Grunde und füge meiner Uebersetzung die Hauptabweichungen in den Anmerkungen hinzu:

»Her weht die Luft [1]) des Stroms von Mûliân [2]), 1
ich fühl des lieben Freundes Duft [3]) mir nahn,
Und tritt auf Âmûs rauhes Land [4]) mein Fuss,
scheint mir sein Sand mit Seide angethan.
Des Oxus Fluth und seine Reize all, schon kann
sie meines Zelters Bug umfahn [5]).
Bukhâra, juble auf in Lebenslust — es kommt
dein Schâh als Gast, es ist kein Wahn!
Denn Himmel ist Bukhâra, Mond der Schâh, und 5
sicher geht der Mond die Himmelsbahn;
Bukhâra ist der Hain, Cypresse er — und die
Cypresse kommt zum Gartenplan [6])!«

18—22) Weinlieder, von denen das letzte, ein Qit'ah, den richtigen Uebergang zu den Qit'ahs und Rubâ'îs bildet.

'Aufi. Makhz-ulgh. Khulâç-ulafk. Atashkadah und Majma'-unn. (nur die beiden ersten Verse) H. Iql. Wâlih. Safîn. Ouseley Add. 127 f. 14 u. 21. Mirât-i-âftâbn.

1) Atashk. und Khulâç: بوی (Duft) statt یاد H. Iql. یاد (Erinnerung).

2) Mûliân, Stadt am Oxusufer.

3) Mirât-ulkh. und einige Copien d. Daul.: یاد statt بوی.

4) Amû ebenfalls am Oxusufer. Atashk. Khulâç. und H. Iql.: ریگ هامون des Blachfelds Sand.

5) H. Iql.: خنك شه را تا میان آید همی (des Schâhs Zelter).

6) In einigen Cop. des Daul. und ebenso in Atashk. und Mirât-ulkh. besteht das Gedicht nur aus 5 Versen, und zwar so, dass V. 1, 4 und 5 den obigen 1, 5 und 6 entsprechen und 2 und 3 eine Combination aus obigen 2—4 sind. —

1 شاد زی با سیاه چشمان شاد که جهان نیست جز فسانه و باد

زآمده شادمانه[1]) باید بود وز گذشته نکرد باید[2]) یاد

من وآن جعد موی غالیه بوی من وآن ماه روی حور نژاد[3])

نیک بخت آنکسی که داد و بخورد[4]) شور بختآنکه او نخورد[5]) و نداد

5 باد و ابرست این جهان افسوس باده پیش آر هرچه بادا باد

»Sei doch froh, bei süssen Liebchen[6]) winkt dir süsses Wohlergehn,
Nur ein Mährlein ist die Welt ja, flüchtig wie des Windes Wehn!
Kommt das Glück, empfang getrost es und geniesse es mit Freuden,

1) Khulâç. und H. Iql. haben deutlich شادمان نه, wodurch der ganze Sinn geradezu umgedreht wird.

2) Khulâç.: هرگز.

3) V. 3 u. 4 fehlen in Khulâç.; V. 3 u. 5 fehlen in H. Iql.

4) و نخورد (und selber nicht isst) in Wâlih. Ell. 402.

5) بخورد و نداد (selber isst, aber Anderen nicht giebt) nach H. Iql. Ell. 158 u. Ouseley 377.

6) eigentl.: bei Schwarzäugigen.

Geht's, so musst du nicht dran denken, musst ihm stolz den Rücken drehn!
Sieh, ich kose mit dem Schätzchen, krausgelockt und moschusduftig,
Kose mit der Mondgesicht'gen, hold wie Hûrîs anzusehn.
Heil dir wonniglich Beglücktem, giebst du Andren und dir selber,
Weh Unsel'gem dir, lässt Andre und dich selbst du darbend stehn!
Flüchtig, ach, wie Wind und Wolke ist dies arme Erdendasein,
Drum zur Hand nimm flugs den Wein dir, und dann mag, was will, geschehn!« —

19) 'Aufî. Makhz.-ulgh. Jâmî (ohne den ersten Vers). H. Iql. Ouseley Add. 127 f. 15b und 21b. Butkh. Ell. 32 f. 300. Wâlih. Lubb-i-Lub. Sprenger 1378 (letztere 4 ebenfalls ohne den ersten Vers). Safîn. —

1 رودکی چنگ بر گرفت و نواخت باده انداز کو سرود انداخت

وآن[1] عقیقی می که هرکه بدید از عقیق گداخته نشناخت

هردو یک گوهرند لیک بطبع این[2] بیفسرد وآن دگر بگداخت

1) آن ohne و in Sprenger 1378. Jâmî und Safîn.

2) آن in Sprenger 1378.

تابسوده دو دست ر نگین کرد تا چشیده بتارک اندر

تاخمی ء

»Zur Laute griff und sang dies Lied er, der aus
Rûdags Flur entsprossen:
Den Quell des Weins erschliesst der Mund, der
des Gesanges Born erschlossen,
Er träufelt jenen ros'gen Trunk, den zweifelnd
anstaunt, wer ihn schaut,
Ob Wein er wirklich, ob Rubin, der sich in
flüss'gem Strom ergossen.
Wohl sind von gleichem Stoff die zwei — doch
durch die Urkraft der Natur
Ist jener dort erstarrt zu Stein, und dieser hier
in Nass zerflossen.
Es färbt die Hände rosenroth sein Glanz, noch
eh' sie ihn berührt,
Tief dringt in's Hirn sein Duft hinein, eh' noch
die Lippen ihn genossen.«

20) Buthk. H. Iql. Atashk. (nur den ersten Vers enthaltend), Sprenger 1378:

1 بیار آن می کہ پنداری روان یاقوت نابستی[1]) ویا

چون بر کشیدہ تیغ پیش آفتابستی

بپاکی گوئی اندر جام مانند گلابستی بخوشی گوئی

اندر دیدہ[2]) بخواب خوابستی

1) بابستی nach Atashk.
2) کاندر nach Sprenger.

سحابستی قدح گوئی ومی قطر[1]) سحابستی طرب گوئی
که اندر دل دعای مستجابستی
اگر می نیستی یکسر همه دلها خرابستی وگر درکالبد
جانرا ندیدستی[2]) شرابستی
5 اگر این می بابر اندر بچنگال عقابستی ازآن تا ناکسان
هرگز نخوردندی صوابستی ،

»Den Wein her, der so leuchtend strahlt, als sei 1
es schier Rubinenregen,
Als spiegle sich in voller Gluth der Sonnenglanz
auf blankem Degen;
Als wären's Tropfen, wie sie rein im Blätter-
schooss die Rosen hegen,
Als wollt' es sich wie Schlummer süss auf schlum-
merlose Augen legen.
Der Wolke gleich ist der Pokal und drin der
Wein dem Wolkensegen,
Ein Bild der Lust, wenn Wünsche sich erfüllt,
die uns das Herz bewegen!
Ja, ohne Wein, wie glichen all die Herzen öden
Wüstenstegen,
Es müsste, wär' er leblos auch[3]), im Leib durch
Wein sich Leben regen.
Und wär' in Adlers Klau'n der Wein, in Wol- 5
kenräumen weit entlegen,
Wenn nur die Lumpe dann nicht mehr ihn trin-
ken könnten, — meinetwegen!« —

1) قطره in fast allen Handschriften.

2) Sprenger: بدیدستی سرابستی.

3) Das »er« bezieht sich natürlich auf den »Leib«.

21) H. Iql.

1 بر خیز و بمیخانه خرام ای بُت کشمیر می خور که
بمی گردد اندوه جوان پیر
زان ناقد هر گوهر وزآن کاشف اسرار کز رَطْل همی
خندد چون برق بشبگیر
گر روی[1]) بسنگ آرد سنبل دمد از سنگ[2]) گر گونه
بقیر آرد شنگرف شود قیر
بر یاد یکی بار خدای[3]) که تو گوئی با نصرت هم
پشتست و با دولت هم شیر

»Mach dich auf und eil' zur Schenke, holdes 1
Lieb aus Kaschmîrs Gauen,
Trinke Wein, dein junger Kummer wird im
Wein gar bald ergrauen.
Trink' von ihm, der jeden Urstoff sichtet, der
Verborg'nes aufhellt
Und so hell entblitzt dem Becher, wie der Blitz
dem Morgengrauen!
Wendet er zum Stein sein Antlitz, sprosst aus
dem die Hyacinthe,
Kehrt er zum Asphalt die Wange, ist der rosig
anzuschauen.

1) Ell. 158 u. 159: سوی.
2) 158 u. 159 fälschlich: مشک.
3) Elliot 158: خدایا.

Wahrlich, ja bei Gott dem Einen, ja! verbündet
ist das Heil ihm,
Wahrlich ganz wie einem Bruder schenkt das
Glück ihm sein Vertrauen.«

22) H. Iql. Safîn. (nur der zweite Vers).

1 آن می کہ گر سرشکی ازو[1]) در چکد بہ نیل هوارہ
مست گردد از بوی او نهنگ
آهو بدشت گر بخورد قطرهٔ از آن غرّندہ شیر گردد و
نندیشد از پلنگ ؛

»Ja, das ist Wein, dess duft'ger Hauch, fällt in 1
den Nil nur eine Zähre,
Des Crocodiles Nüchternheit in endlos trunk'nen
Rausch verkehrt,
Durch den der Hirsch dort auf der Flur, hat
einen Tropfen er genossen,
Zum brüllend wilden Lõwen wird und selbst
um Tiger sich nicht scheert.«

23) Ein entschieden mystisches Qit'ah. Atashk.

1 برای پرورش جسم جان چہ رنجہ کنم کہ حیف
باشد روح القدس بسکبانی
مرا ز منصب تحقیق انبیاست نصیب چہ[2]) آب
جویم در جوی خشک یونانی

1) Andre Lesart: ازآن.
2) Ell. 17: چو.

بحسن صوت چو بلبل مقیّد نظمم بجرم حسن چو یوسف اسیر زندانی

بسی نشستم من با اکابر واعیان بیازمودمشان آشکار و پنهانی

تخواستم زتمنا مگر که دستوری نیافتم ز عطاها مگر پشیمانی

»Was soll ich, mir den Leib zu pflegen, noch länger meine Seele kränken?
Es schafft den Hundewärter spielen dem Himmelsgeist doch bass Verdruss!
Auch mir ward ja ein Theil beschieden vom Wahrheitslehramt der Propheten,
Was such' im trocknen Griechenstrome ich frischen Trunkes Vollgenuss[1])?
Nur meiner Stimme Wohllaut dank ich's, dass liedverstrickt ich bin gleich Bulbul,
Der Schönheit nur, dass ich in Banden wie weiland Joseph schmachten muss.
Wohl oft im Kreis der Grossen weilt' ich, bei Edlen oft, und über alles,
Was kund, was nicht, ergoss belehrend sich meiner Weisheit Redefluss.
Wohl galt mein Sehnen einem Ziel nur, ein Vorbild einst zu sein für alle,
Und dennoch blieb von allen Gaben mir nichts als Reue zum Beschluss.«

1) Die griech. Philosophen (فلاسفه) bilden stets in der Mystik den stricten Gegensatz zu den gottbeseligten Çûfis, den عارفان.

24) Atashk. und Safîn.

1 نگارینا شنیدستم که گاه محنت وراحت سه پیراهن
سلب بوده است یوسف را بعمر اندر
یکی از کید شد پر خون دوم شد چاک از تهمت
سیم یعقوب را از بوش روشن گشت چشم تر
رخم ماند بآن اوّل دلم ماند بآن ثانی نصیب من شود
در وصل آن پیراهن دیگر ،

»O holdes Liebchen, wie mir kund geworden, 1
so büsste Joseph, da er lebt' auf Erden,
In frohen theils und theils in schlimmen Tagen
der Hemden drei von seinem Leibe ein.
Mit Blut gefärbt ward eins aus list'gen Ränken,
ihn anzuschwärzen ward zerfetzt das zweite,
Und Jakobs thränenfeuchtem Aug' erglänzte beim
Duft des dritten neu des Lichtes Schein.
Nun, jenem ersten gleicht mein blutend Antlitz,
und gleich dem zweiten ist zerstückt das
Herz mir,
Doch winkt mir einst die Nacht der Liebeswonnen, dann nenn' ich frohentzückt das dritte
mein [1]) !«

25) Makhz-ulgh. Khulâç. Safîn.

چمن عقل را خزانی اگر گلشن عشق را بهار توئی

1) Das erste ist jenes von den Brüdern dem Vater präsentirte blutige; das zweite das ihm von Potiphars Frau zerrissene, das dritte dasjenige, welches Joseph dem Jakob aus Egypten zuschickte und dessen Duft jenem das Augenlicht zurückgab.

عشق را گر پیمبرم[1]) لیکن حسن را آفریدگار توئی ؛

»Wenn du des Verstandes Flur auch gleich
des Herbstes Wehn entblätterst,
Stets doch glänzt durch dich der Liebe Ro-
senau in Frühlingspracht.
Ja! und bin ich selbst der Liebe Heilverkün-
der und Prophet auch,
Du doch riefst in's Sein die Schönheit wie
ein Gott mit Schöpfermacht!«

26) 'Aufî. Jâmî. Makhz. Atashk. Mirât-al'âl. H. Iql. Majma'-unn. Safîn.

1 زمانه پندی آزاده وار داد مرا زمانه را چو نکو بنگری همه پندست

بروز نیک کسان گفت[2]) غم مخور زنهار بسا کسا که بروز تو آرزومندست ؛

»Gar prächt'ge Mahnung predigt mir der Zeiten
Wechsellauf —
Er ist ja, schaust du recht ihn an, ganz voll
von weisen Lehren.
Sei nimmer, spricht er, drob ergrimmt, wenn's
Andren wohl ergeht,
Gar manche giebt's, die neidisch schon nach
deinem Glück begehren!« —

1) Diese Lesart von Safîn scheint mir weit zutreffender als die der übrigen Handschr.: پیمبری (ja und bist du auch u. s. w.).

2) Makhz.: بسیار statt زنهار; Jâmî: آرزو مبر زنهار; 'Aufî: تا تو غم نخوری.

27) ʿAufî. Makhz. Khulâç. Wâlih und Ouseley Add. 127 (beide haben nur den ersten Vers). Majmaʿ-unnaf.

1 زلف ترا جیم که کرد آنکه[1]) او خال ترا نقطهٔ آن

جیم[2]) کرد

وآن دهن تنگ تو[3]) گوید کسی دانگکی نار بدو نیم

کرد،

»Der jîmgleich dir geringelt deine Locken, — 1
hat mit dem Maal als Punkt dies Jîm geziert,
Und schaut man gar dein enges Mündchen, 2
wähnt man — ein Stück Granate sei's, das
er halbirt'« —

28) ʿAufî. Wâlih und Ouseley Add. 127 (ff. 15 und 21).

1 روی بمحراب نهادن چه سود دل به بخارا و بتان طراز

ایزد ما[4]) وسوسهٔ عشقی ازتو پذیرد نه پذیرد نماز،

»Was frommt dir's, willst du dein Gesicht zur 1
Nische des Gebetes kehren?
Kehr' doch dein Herz Bukhârâ zu und all den
Schönen von Ṭarâz[5])!

1) Andre: آنکه کرد.

2) Ouseley fälschlich: چشم.

3) Makhz.: گوئی. Andre Handschr.: گویا. Majmaʿ: تنگ چو گوید.

4) Andre fälschlich: ایزد با.

5) Zu ergänzen ist نهاد باید. Ṭarâz in Turkistân war bekannt durch schöne Liebchen.

Wenn flüsternd du von Liebe sprichst, das will
dem Hergott wohl behagen,
Doch wenn du nichts als beten kannst, das
macht fürwahr ihm wenig Spass!« —

29) Atashk.

1 زهی سوار و جوان وتوانگر از ره دور بخدمت آمد نیکو
سگال ونیک اندیش
چند باشد مر خواجه را پس از ده سال که باز گردد
پیر و پیاده و درویش

»Seht jenen dort, der edlen Sinns und brav hie- 1
her in Dienst gekommen,
Von fernen Pfaden, hoch zu Ross, in Jugend-
kraft, mit Gold beschwert!
Nun, lasst zehn Jahre nur vergehn — dann ist
er wohl zu Dank dem Alten,
Wenn er zu Fuss als armer Greis in seine Hei-
math wiederkehrt!« —

30) Daul.

1 دردا و حسرتا که مرا دور روزگار بی آلت و سلاح بزد
راه کاروان
چون دولتی نمود مرا محنتی[1]) فزود بی کردن ای
شگفت نبودست گردران[2]) ،

1) زحمتی nach Anderen.

2) Dieses Gedicht, wenigstens der 2te Vers, wird von Burhânî dem Mas'ûd Sa'd Salmân zugeschrieben, siehe Vullers Lex. II, 968b.

»O bittres Leid, dass auf den Pfad der Erden- 1
karawane
Der Zeitenlauf mich ausgesetzt so wehr- und
waffenlos!
Ein jeder Glücksfall schuf mir mehr der Klagen
— seltsam wahrlich,
Dass Keiner ohne schwere Müh' erkauft ein
heitres Loos!«

31) 'Aufî und H. Iql.

1 مرا جود او تازه دارد همی مگر جودش ابرست و[1]) من
گشت زار
مرا[2]) یکسو افکن که خود همچنین بیندیش و[3])
دید و خرد برگمار[4])

»Unablässig fort erneuert er mir seines Wohl- 1
thuns Spende,
Nun — ist Wolken gleich sein Wohlthun, gleich'
ich saatbestelltem Land.
Aber — gieb getrost mich auf nur — ist's für-
wahr doch ganz dasselbe,
Denk ein bischen nach und lasse Auge walten
und Verstand!« —

32) 'Aufî und Vullers Lex. II, 3ª.

1) و fehlt in 'Aufî.

2) مگر in 'Aufî.

3) و fehlt wieder in 'Aufî.

4) Dieses Qiṭ'ah ist gedichtet auf den Vezîr Abuṭṭayyib aṭṭâhir مصعبی (od. مصبعی). —

1 حاتم طائی تونی اندر سخا رستم دستان تونی اندر نبرد

نی که حاتم نیست با جود تو راد نی که رستم نیست در جنگ تو مرد

»Ja, Ḥâtim Ṭai bist du im Gabenspenden — bist 1
Rustam, Dastans Sohn, im Schlachtrevier. —
Doch nein, kein Ḥatim giebt wie du so reichlich — kein Rustam misst als Kämpfer sich mit dir!«

33) ʿAufî.

1 حجاب اندرون شود خورشید گر تو داری از آن دو لاله جیب

وآن زنخدان بسیب ماند راست گر از[2] مشک خال دارد سیب

»Gleich in den Schleier schlüpft beschämt die 1
Sonne — wenn deines Tulpenpaares Schleier fällt,
Und dort dein Kinn, es gleicht fürwahr dem Apfel — wenn Moschusstaub ihn zart umfangen hält.« —

34) Ḥadâîq-ulbalâgh. p. 58. Garcin de Tassy's Rhétorique et Prosodie p. 32.

1 چاکرانت بکه رزم خیّاطان اند گرچه خیّاط نیند ای ملک کشور گیر

1) از habe ich des Metrums wegen eingeschoben.

بگز نیزه قد خصم تو می پیمایند گه ببرّند بشمشیر

و بدوزند به تیر ‹

»Alle deine Diener, wahrlich Schneider sind am 1
Tag der Schlacht sie,
Nahm auch keiner, mächt'ger König, je am
Schneiderhandwerk Theil!
Mit der Lanzenelle messen die Statur sie deines
Feindes,
Und dann schneiden mit dem Schwert sie und
dann näh'n sie mit dem Pfeil!‹ —

35) Schilderung des Schreibrohrs (قلم). ʿAufī und H. Iql.

لنگ روندهٔ است گوش نه و سخن[1]) یاب گنگ

فصیحست چشم نه و جهان بین

تیزیٔ شمشیر دارد و روش مار[2]) کالبد عشقان و گونهٔ

غمگین ‹

»Gelähmt ists und doch läuft's und hört, ob 1
ohne Ohr auch, jeglich Wort;
Stumm ist's und doch beredt und schaut die
Welt, ob auch das Aug' ihm fehlt.
Des Schwertes Schärfe nennt es sein und doch
der Schlange Gang zugleich,
Ist schlank wie Liebende und hat sich doch des
Grames Farb' erwählt!‹ —

1) ʿAufī: یافت.

2) Ell. 158: یار. —

Zum Schluss noch einige Rubâ'îs und Einzelverse.

36) Atashk. und H. Iql.

1 ای از گل سرخ رنگ بربوده و بو رنگ از پیٔ رخ
ربوده بو از پیٔ مو
گلرنگ شود چوروی شوئی همه جو مشکین گردد چو
مو فشانی همه کو،

1 »Schatz, der du der rothen Rose Farb' und Duft mit list'ger Hand,
Für dein Wangenpaar die Farbe, für dein Haar den Duft entwandt,
Rosenroth wird jede Stromfluth, badest du in ihr dein Antlitz,
Lässt du deine Locken flattern, moschusduftig jedes Land.« —

37) Atashk. Ḥadîq-uççafâ f. 398ᵇ. Ouseley Add. 127 f. 19 und 22ᵇ. Wâlîh. Lubb-i-Lub.

1 چون کار دلم ز زلف او مانده[1] گره بر هر رگ جان صد[2]
آرزو مانده گره
امید ز گریه بود افسوس افسوس کانهم شب وصل در
گلو مانده گره،

1) Ḥadîq.: ماند alle 3 Mal; Ouseley Add. 127: im ersten Hemist.: تابد, im zweiten: یابد, im dritten ماند (!!)

2) Ḥadîq-uççaf.: زآرزو.

»Weil ganz und gar das arme Herz ihr Locken- 1
haar mir festgeschnürt,
Hat jeden Nerv der Seele auch der Lüste Schaar
mir festgeschnürt.
Vom Weinen hofft' ich Rettung noch — doch
ach! der Liebeswonnen Nacht
Hält nun auch dies wohl tief im Schlund auf
immerdar mir festgeschnürt.« —

38) H. Iql.

1 در منزل غم فکنده مفرش[1]) مائیم وزآب دو دیده دل
پرآتش مائیم

ملامچو سقم کند ستمکش مائیم دستخوش روزگار
ناخوش مائیم ؛

»Die ihre Lagerstatt im Herbergshaus des Gra- 1
mes aufgeschlagen, das sind wir,
Und die entfacht vom heissen Augennass im
Herzen Flammen tragen, das sind wir.
Die Welt, sie plagt nun einmal gar zu gern,
und Opfer dieser Plagen, das sind wir.
Das Schicksal grollt, doch die voll guten Muths
ihm froh Willkommen sagen, das sind wir!«

39) Wâlih und Ouseley Add. 127 (in letzterem ganz verwahrlost).

1 بچشم دلبر دید باید جهان که چشم سر تو نه
بیند نهان

1) Ouseley 877: مشرب.

بدین آشکارت ببین آشکار نهانیت را بر نهانی گمار

»Die Welt schau mit dem inneren Gesicht, 1
Verborg'nes sieht dein äuss'res Auge nicht.
Schau offnen Aug's, was offen liegt und klar,
Dem unsichtbaren lass, was unsichtbar!« —

40) H. Iql. Ouseley Add. 127 ff. 19 u. 22ᵇ. Wâlih.

1 در عشق چو رودکی شدم سیر زجان وزگریهٔ خونین

مژه ام شد مرجان

القصّه که از[1]) بیم عذاب هجران در[2]) آتش رشکم

دگر از دوزخیان

»Wie Rûdagî, so raubte mir auch die Liebe 1
allen Lebensmuth,
Es färbte rosig wie Korallen die Wimpern mir
der Thränen Blut.
Und ach! aus Furcht vor Trennungsqualen ver-
zehrt des Neides Flammengluth
Mich obendrein — denn ich beneide um ihre
Qual die Höllenbrut[3]).«

1) از دستی nach Ouseley Add. 127.

2) از آتش in Ouseley.

3) Nach der Lesart von Ouseley müsste übersetzt werden:

»Und nicht genug der Trennungsqualen! sie schüren noch
des Neides Gluth,
Dich mich verzehrt, denn ich beneide um ihre Qual die
Höllenbrut!«

41) H. Iql. Ouseley Add. 127 ff. 19ᵇ u. 22ᵇ. Majmaʿ-unnaf. Wâlih. Lubb-i-Lub.

1 چون[1]) کُشته به بینیم دو لب کرده فراز وز جان

تهی این قالب فرسوده نیاز

بر بالینم نشین و میگوی بناز کای کُشته ترا من و

پشیمان شده باز ،

»Siehst du einst im Tod erkaltet mit erschloss'- 1
ner Lippe mich,
Siehst du wunschlos dieses Leibes Hülle, draus
die Seele wich,
O auf meine Bahre nieder sinke dann und
schmachtend sprich:
Ja, nun reut mich's tief, denn wahrlich, die den
Tod dir gab, war ich!« —

42) Ḥadîq.-uççafâ:

1 دل خسته و بستهٔ مسلسل موئیست خون کُشته

و کُشتهٔ بت فند وئیست

سودی ندهد نصیحتت[2]) ای واعظ این خانه خراب

طرفه یک پهلوئیست ،

»Es krankt das Herz mir, ach! es ward von 1
Lockenketten fest umwunden,

1) H. Iql.: فردا چو به بینیم دهن کُشته فراز.

2) So lese ich statt des نصیحتش der Handschrift.

Es füllt mit Blut sich — ach! ihm schlug ein
indisch Liebchen Todeswunden.
Was nützt mir nun dein guter Rath, du Mah-
ner? bleibt doch diese Welt
Nur darin wandellos sich treu, dass jammervoll
sie stets erfunden.« —

43) Zu den wunderbaren Eigenschaften Rûdagîs soll, nach dem Lubb-i-Lub. gehört haben, dass, was immer einer vor ihm (in seiner Gegenwart) im Geiste erfasste (d. h.: woran er gerade dachte), er etwas dem Homogenes sofort auf der Laute spielte. Ein Kluger wollte das nicht glauben und begab sich, um ihn auf die Probe zu stellen, zu ihm. Da spielte Rûdagî das folgende Liedchen auf der Laute, und jener wurde von seiner Meisterschaft überzeugt.

1 گر بر سر نفس خود امیری مردی بر کبر و کر آر نکته نگیری مردی

مردی نبود فتاده را پای زدن گر دست فتادهٔ بگیری مردی ؛

»Nur dann, wenn deiner bösen Lust du sieg- 1
reich wehrst, bist du ein Mann!
Wenn nie du den, der blind und taub, mit Spott
versehrst, bist du ein Mann!
Mit Füssen treten den, der fiel — fürwahr, das
ist nicht Mannesart —
Nur dann, wenn als sein Retter du dich flugs
bewährst, bist du ein Mann [1]).«

1) Dies ist das einzige Lied, in dem der Blindheit, freilich auch der Taubheit, gedacht wird.

44) Khulâç. Ouseley Add. 127 ff. 19b u. 22b. Wâlih. Lubb-i-Lub.

1 دیدار بدل فروخت نفروخت گران بوسه بدروان

فروخت[1]) وصلت[2]) ارزان

آری ملکه چو آن ماه بود بازرگان دیدار بدل فروشد

و بوسه بجان ء

»Sein Antlitz hat er um ein Herz verkauft, das 1
ist nicht theuer eben,
Um eine Seele seinen Kuss, auch das ist billig
hingegeben!
Wär' jener Mond ein Handelsmann, dann wahr-
lich gäbe für ein Herz
Er seiner Wange Anblick wohl, doch seinen
Kuss nur für ein — Leben!«

45) Safînah.

1 من موی خویش را نه ازآن میکنم سیاه تا باز نو جوان

شوم و نو کنم گناه

چون جامها بوقت مصیبت سیه کنند من موی از

مصیبت پیری کنم سیاه

»O nicht deshalb reib' in's Haar ich schwarze 1
Farbe mir hinein,
Um, aufs Neue jung, aufs Neue nun der Sünde
mich zu weihn,

1) Andre: فروشد.

2) Ell. 402 hat ein نیمست statt وصلت.

Nein, wie man wohl seine Kleider schwarz zur
Zeit des Unglücks trägt,
Leih' ich ob des Alters Unglück meinem Haar
auch schwarzen Schein [1]).«

46) Auf den Tod des Dichters Abulḥasan Murâdî von Bukhârâ (einen mit Rûd. gleichz. arabischen Dichter). ʿAufî. Khazâna-i-ʿâm. (As. Soc. 187 f. 220) Atashk. H. Iql. Ouseley Add. 127 ff. 16 u. 21ᵇ. Wâlih u. Safîn.

1 مرد مرادی نه همانا که مُرد مرگ چنان خواجه نه
کاریست خُرد

جان کرامی بپدر باز داد کالبد تیره بمادر سپُرد

»Murâdî starb, doch dass er starb, noch kann 1
es Niemand fassen,
Nichts Kleines ist es, muss im Tod ein solcher
Mann erblassen.
O nein, die edle Seele gab dem Vater er zurück,
Und nur die finstre Hülle hat der Mutter er
gelassen.« —

47) Auf den Tod des Sheikh Abulḥasan Shahîd (des pers. Dichters und Zeitgen. Rûd.). ʿAufî f. 80. Nadr. f. 33ᵇ. Makhz. f. 183 etc. (überall unter Shahîd aufgeführt):

1) Dies Lied ist jedenfalls eine Erwiederung auf ein anderes kurzes Gedicht Khusrawânîs, das ich in dem demnächst in den Sitzungsb. der K. bayr. Acad. erscheinenden zweiten Artikel über »Firdûsî als Lyr.« mitgetheilt und in dem der Dichter sich über Greise lustig macht, die sich aus Eitelkeit ihr Haar färben. Khusrawânî war also ein Zeitgenosse Rûdagîs.

1 کاروان شهید رفت از پیش وآن[1]) ما رفته کیسرو اندیش

از شمار دو چشم یکی[2]) شد کم وزحساب[3]) خرد هزاران بیش

»Voraus ging mir Schahîd und mit ihm schwand, 1
Bedenk' es, alles, was ich mein genannt!
Mit ihm verlor ich meiner Augen Hälfte,
Und mehr wohl tausend Mal noch an Verstand!«

48) Vullers Lex. I, p. 198[a].

1 چون بانگ آمد از هوا بخنو می خور وبانگ چنگ ورود بشنو

»Wenn hoch her aus dem Luftrevier des Don- 1
ners lauter Ruf erdröhnt,
Dann zeche Wein und horch, wie sanft in's Ohr
Guitarr' und Zither tönt!«

49) Wâlih. Ouseley Add. 127 ff. 16 u. 21[b].

1 بیار هان بده آن آفتاب کش چو خوری زلب فرو شود و از رخان برآید زود

»Herbei und reich den Wein mir her, der son-
nenhell, wenn du ihn schlürfst,

1) Nadr.: آن ohne و; 'Aufî: وآن زما.
2) 'Aufî und Makhz: شد statt تن.
3) Nadr.: شمار.

Von Lippen niederrinnt und flugs durch Wangen wieder aufwärts steigt!«

50) Ouseley Add. ff. 16 u. 21ᵇ. Wâlih. Lubb-i-Lub. Safîn.

1 کار بوسه چو آب خوردن شور بخوری بیش تشنه تر گردی

»Mit Küssen ist es, wie mit salz'gem Wasser — 1
Je mehr du trinkst, je grösser wird der Durst.«

51) Vullers Lex. I, 656ᵇ.

1 با دو سه بوسه رهاکن این دل از غم و خباك تا بمنت احسان باشد احسن الله جزاك

»Löse, ach! mit zwei drei Küssen mich aus die- 1
ser Angst und Qual,
Will zum Dank dann für dich beten: Gott vergelt dir's tausendmal!«

52) Safîn.

1 هر که تا محنت گذشت از روزگار هیچ ناموزد ز هیچ آموزگار

»Wer dem Geschick entronnen leidenfrei, 1
Dem bringt kein Lehrer je noch Lehren bei!«

Nicht veröffentlicht sind in dieser Sammlung ausser den schon oben erwähnten Berliner Versen und mehreren unbedeutenden kleinen Versstückchen ein grösseres Qiṭ'ah auf Naçr und ein Gedicht auf den قلم. Beide sind so verwahrlost im Text, dass es mir bisjetzt nicht gelungen, sie leserlich und verständlich herzustellen.

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

19. November. № 26. 1873.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 1. November.

Schering, die Hamilton-Jacobische Theorie für Kräfte, deren Maass von der Bewegung der Körper abhängt. (Erscheint in den Abhandl.)

Derselbe, zur Theorie der Poisson'schen Störungsformeln. (Erscheint in den Abhandl.)

Derselbe, Fundamental-Satz des Pfaff'schen Problems.

Bjerknes, Verallgemeinerung des Problems von den Flüssigkeitsbewegungen in einem ruhenden, unelastischen Medium, durch die Bewegungen eines Ellipsoids. (Vorgel. von Schering.)

Enneper, Bemerkungen zur allgemeinen Theorie der Flächen.

Hattendorf, Bemerkungen zu den Sturm'schen Functionen.

Lüroth, über das Rechnen mit Würfen. (Vorgel. von Stern.)

Tollens, über Verbindungen von Amylum mit Alkali.

Derselbe (mit v. Grote), über eine aus Rohrzucker durch verdünnte Schwefelsäure entstehende Säure.

Derselbe (mit Wagner und Philippi), Untersuchungen über die Allyl-Gruppe. (Vorgel. von Wöhler).

Hamilton-Jacobische Theorie für Kräfte, deren Maass von der Bewegung der Körper abhängt.

Von

Ernst Schering.

Seit Eulers grossen Entdeckungen in der Lehre von der Bewegung der Körper hat sich diese Wissenschaft vorzugsweise in ihrer formalen Seite ausgebildet. Zunächst erreichte Lagrange durch die ausgedehnteste Anwendung des Princips der virtuellen Bewegung eine allgemeinere und mehr analystische Darstellung der Mechanik, und ferner eine grosse Vereinfachung durch Einführung der Function, die wir nach Gauss das Potential oder nach Hamilton die Kräftefunction nennen. Diejenigen uns von der Natur gestellten Probleme der analytischen Mechanik, für welche wir die Differentialgleichungen nicht vollständig integriren können, die aber durch das Auftreten nur schwacher Kräfte sich von vollständig auflösbaren Problemen unterscheiden, hat Lagrange in der Weise umgeformt, dass statt der Coordinaten und der Geschwindigkeiten als die die Bewegung des Systems bestimmenden Grössen die Elemente der bei dem einfacheren lösbaren Probleme stattfindenden Bewegung auftreten. In dieser Behandlungsweise der Störungstheorie gebraucht er mit grossem Vortheil neben den Coordinaten, welche die Lage des Systems bestimmten, und neben den Geschwindigkeiten noch ein drittes System von Grössen, welche als die nach Geschwindigkeiten genommenen partielle Derivirten des Ausdruckes für die lebendige Kraft definirt werden. Mit Hülfe dieser Grössen und

der Coordinaten, als Functionen der Elemente der ungestörten Bewegung betrachtet, bildet Lagrange Differentialausdrücke, die wir nach dem von Jacobi eingeführten Begriffe der Functionaldeterminanten, eine Summe von Functionaldeterminanten zweiter Ordnung nennen können. Diese Differentialausdrücke sind von grosser Bedeutung in der Theorie der Störungen, weil ihre Werthe allein von den Elementen abhangen und weil mit ihrer Hülfe die Aenderungen der Elemente bestimmt werden, sie leiden aber an der Unvollkommenheit, dass alle die erwähnten Grössen als Functionen von den Elementen der ungestörten Bewegung und von der Zeit dargestellt sein müssen.

Poisson fand im Jahre 1809 Differential-Ausdrücke, welche von diesem Uebelstande frei sind, aber doch demselben Zwecke dienen und Werthe von analoger Form haben. Jeder solcher Differential-Ausdruck setzt nemlich nur die Kenntniss zweier Elemente und zwar als Functionen der Coordinaten und der Geschwindigkeiten voraus.

In Folge dieses Umstandes besitzen die Poissonschen Differential-Ausdrücke, wie Jacobi im Jahre 1839 nach Poissons Tode hervorhebt, die merkwürdige Eigenschaft, dass, wenn man statt der beiden Elemente zwei Integrale eines mechanischen Problemes setzt, der Poissonsche Differential-Ausdruck einen constanten Werth annimmt und also, wenn er sich nicht identisch auf eine absolute Constante reducirt, ein Integral wird, welches unter Umständen von den beiden ersten unabhängig und demnach im Allgemeinen ein neues Integral ist.

In Verfolgung des Gedankens von Lagrange neben den Coordinaten die nach den Geschwindig-

keiten genommenen partiellen Derivirten des Ausdrucks für die lebendige Kraft als Veränderliche zu benutzen, hat Hamilton im Jahre 1834 den Differential-Gleichungen für die Bewegung in dem Falle, wo die einwirkenden Kräfte die partiellen Derivirten einer Potentialfunction sind, auf die merkwürdig einfache Form gebracht, dass die vollständigen nach der Zeit genommenen Derivirten der Coordinaten und der Lagrangeschen Variabeln gleich den nach diesen Veränderlichen und nach den negativen Coordinaten gebildeten partiellen Derivirten einer gemeinsamen Function werden. Für diese gebraucht Hamilton den Namen characteristic function, nach Jacobi bezeichnen wir sie bestimmter als Hamiltonsche Function.

Von besonderer Wichtigkeit ist aber die von Hamilton aufgestellte principal function, welche er als Integral definirt, dessen Element das Product aus dem Differential der Zeit multiplicirt in die Summe der halben lebendigen Kraft und der Kräftefunction ist.

Dies von Jacobi als das Hamiltonsche bezeichnete Integral besitzt zunächst die Eigenschaft, dass, wenn man dessen Variation bei festen Grenzen gleich Null setzt, man wieder die fundamentalen Differential-Gleichungen der Bewegungen erhält. Wird diese Function als allein von den Coordinaten von eben so viel verschiedenen Integrations-Constanten und von der Zeit abhängig dargestellt, so sind die partiellen Derivirten nach den Integrations-Constanten wieder und zwar neue Integrale, welche mit den erstern ein vollständiges System von Integralen bilden. Die partielle Derivirte nach der Zeit ist gleich der negativ genommenen Hamiltonschen Function und die Lagrangeschen Veränderlichen

können als die nach den entsprechenden Coordinaten gebildeten Derivirten dargestellt werden. Durch Elimination der Lagrangeschen Veränderlichen zwischen allen diesen Derivirten erhält man eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung und zweiten Grades mit den Coordinaten und der Zeit als unabhängigen Veränderlichen und mit dem Hamiltonschen Integral als abhängiger Function. Diese partielle Differentialgleichung kann auch zur unmittelbaren Bestimmung jener Function dienen und Jacobi hat gezeigt, dass letztere daraus in der Mehrzahl der Fälle, wo wir die betreffenden mechanischen Probleme lösen können, leicht abzuleiten ist, wenn man für jedes Problem die geeigneten Coordinaten einführt.

Das Hamiltonsche Integral gewährt nun den grossen Vortheil, die Differentialgleichungen für ein Störungsproblem in ebenso einfacher Form darzustellen wie die Hamiltonschen Fundamental-Gleichungen für die Bewegung, wenn man nemlich die gestörte Bewegung durch diejenigen Elemente bestimmt, welche bei dem ungestörten Problem als solche Constanten auftreten, die auf die zuvor angegebene Weise theils in dem Hamiltonschen Integral vorkommen, theils den partiellen Derivirten des Hamiltonschen Integrals mit entgegengesetzten Vorzeichen gleich werden.

Diese in den Grundzügen von Hamilton gefundene neue Methode der Behandlung der mechanischen Probleme wurde von Jacobi im Jahre 1837 aufgenommen und zunächst von einigen nicht nothwendigen hier nicht erwähnten Voraussetzungen befreit, zu denen auch die Gültigkeit des Princips der Erhaltung der lebendigen Kraft gehört. Jacobi bereicherte diese Wissenschaft durch eine grosse Zahl neuer all-

gemeiner Lehrsätze, insbesondere durch einen sehr wichtigen Satz, der sich auf die Variation der Elemente einer von Störungskräften beeinflussten Bewegung bezieht, und der unmittelbar die Werthe der Lagrangeschen und Poissonschen Differentialausdrücke für die von Jacobi als cononische bezeichneten Veränderlichen und Elemente ergibt. Jacobi fand dann bei diesen Untersuchungen seinen wichtigen Satz über die Variations-Rechnung und seine Erweiterungen der Theorie der partiellen Differential-Gleichungen erster Ordnung, eine Reihe von Entdeckungen, die ausser in eigenen Veröffentlichungen vorzugsweise durch die Vorlesungshefte seines ausgezeichneten Schülers Herrn Borchardt und durch mehrere nachgelassene Abhandlungen der Wissenschaft erhalten sind, und welchen als Ausgangs-Punkt die neue Methode der Behandlung der analytischen Mechanik dient.

Diese Methode habe ich zu vereinfachen gesucht in einer Abhandlung, welche im 18. Bande der Schriften der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften erscheint. Zunächst leite ich darin Grundgleichungen für die Bewegung in einer allgemeineren Form ab als es bisher üblich ist. Nemlich in der Weise, dass sie nicht nur für ganz beliebige Arten von Coordinaten gelten, sondern auch noch für alle solche Räume, in welchen das Quadrat des Längenelementes allgemein durch einen homogenen Ausdruck zweiten Grades in den dem Längenelement entsprechenden Differentialen der Coordinaten dargestellt wird, also für Räume, wie sie zuerst von Riemann, dann von Herrn Beltrami, Helmholtz, Christoffel und Lipchitz untersucht sind.

Als Grundprincip der Mechanik dient mir das von Gauss im Jahre 1829 bekannt gemachte

Princip des kleinsten Zwanges. Auf diese Weise kommt zu den von Gauss selbst schon hervorgehobenen Vorzügen der Einfachheit und der Allgemeinheit dieses Princips noch eine neue, so viel mir bekannt, bisher nicht bemerkte Erweiterung hinzu.

Aus dem Maass des Zwanges, welches das System der Massen bei irgend einer virtuellen Bewegung erleidet, ergibt sich ein in diesen virtuellen Bewegungen der einzelnen Theilchen linearer Ausdruck, welcher nach dem Gausschen Principe keinen negativen Werth annehmen darf. Dieser Ausdruck besteht aus der Summe von zwei wesentlich verschiedenen Arten von Gliedern, nemlich die einen enthalten als Factoren von den virtuellen Bewegungen nur Grössen, die von den einwirkenden Kräften abhangen, während die Factoren in den andern Gliedern durch die wirklich entstehenden Bewegungen sich bestimmen. Diese letztern Glieder haben die Eigenschaft, dass sie als die algebraische Summe eines vollständigen nach der Zeit genommenen Differentials und einer vollständigen Variation erscheint, wenn nemlich die virtuelle Bewegung analytisch durch die Variation dargestellt wird. Sind nun die Kräfte die partiellen Derivirten einer Function, eines sogenannten Potentials, so haben in jenem Ausdruck die von den Kräften abhängigen Glieder auch die Form, dass sie die Summe einer vollständigen Variation und eines vollständigen Differentials bilden, nur wird dies letzte gleich Null.

Hangen die Kräfte aber nicht nur von der Lage der Massentheilchen, sondern auch von deren Bewegung mit ab, so erhalten die Bedingungen dafür, dass die Glieder in dieser Form darstellbar sind, eine wesentlich andere Gestalt.

Sind nemlich die Kräfte von solcher Beschaffenheit, dass die in dem oben erwähnten Ausdrucke davon abhängigen Glieder als die Summe einer vollständigen Variation und eines vollständigen Differentials erscheinen, so werden alle Kräfte auch noch durch Eine Function bestimmt, welche man Potential oder Kräftefunction im verallgemeinerten Sinne des Wortes nennen kann, aber die Kräfte sind nicht mehr einfach den Derivirten gleich.

Gauss hat durch seine Untersuchungen der galvanischen Ströme gefunden, wie es scheint im Jahre 1835, dass deren Wechselwirkungen durch Kräfte dargestellt werden können, welche nicht nur von der augenblicklichen Lage, sondern auch von der Bewegung der electrischen Theilchen abhangen. Ohne diese nur im handschriftlichen Nachlasse von Gauss erhaltenen Arbeiten gekannt zu haben, fand ich 1857 in meiner Preisschrift zur Theorie der electrischen Ströme den strengen Beweis, dass alle Wechselwirkungen zwischen linearen galvanischen Strömen aus solchen Kräften erklärt werden können, wenn man die Wechselwirkungen zwischen electrischen Theilchen und ihrem ponderablen Träger oder Leiter als der Art annimmt, dass die auf beide electrische Theilchen in derselben Richtung ausgeübte Kraft unmittelbar auf den Leiter übertragen wird, und dass die auf die positiven und negativen electrischen Theilchen in entgegengesetzter Richtung ausgeübte Kraft einen durch den ganzen linearen Leiter gleichmässigen augenblicklichen Strom hervorbringt.

Dass diese electrodynamischen Kräfte die oben erwähnten Bedingungen erfüllen, habe ich 1862 gefunden und damals in meinen Academischen Vorlesungen mitgetheilt, auch gezeigt, wie man

daraus das von Hr. W. Weber 1852 veröffentlichte Gesetz ableiten hann.

Herr Helmholtz hat durch seine tiefer in die Natur der electrodynamischen Kräfte eindringenden Untersuchungen gefunden, dass, wenn man die Annahme der fernwirkenden Kräfte beibehalten und nicht solche Bewegungsgesetze zulassen will, die unseren Grundanschauungen über Naturgesetze widersprechen, es nöthig wird, die Wechselwirkungen zwischen den electrischen Theilchen und ihren Trägern anders und vollständiger zu bestimmen, als es bis jetzt geschehen ist.

Zur Vereinfachung der weiteren Untersuchungen führe ich eine allgemeine, von der vollständigen Differentiation d nach der Zeit und von der Variation unabhängige Differentiation D ein. Mit Hülfe derselben erhält man zur Bestimmung der Bewegung eine einzige Differentialgleichung

$$\mathrm{D}(T+V-\Sigma p_l q'_l)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(T+V-\Sigma p_l q'_l)\,.\,\mathrm{D}t + \Sigma p'_l\,\mathrm{D}q_l - \Sigma q'_l\,\mathrm{D}p_l$$

worin T die halbe lebendige Kraft, V das Potential, q_1, q_2 . . q_l . . die unabhängigen Coordinaten, q'_1 q'_2 . . q'_l . . die nach der Zeit t genommenen vollständigen Derivirten der Coordinaten, p_1, p_2 . . p_l . . die beziehungsweise nach den Grössen q'_1 q'_2 . . q'_l . . genommenen partiellen Derivirten der Function $T+V$ bedeuten. Hieraus folgen bei speciellen Annahmen für die allgemeine Differentiation D unmittelbar die Bewegungsgleichungen in der von Hamilton unter einfachern Voraussetzungen gegebenen

S
heit
da
vc
Γ

Form. Dieselbe Gleichung in der folgenden Anordnung

$$D(T+V)=\frac{d}{dt}\{(T+V-\Sigma p_l q'_l)\,Dt+\Sigma p_l\,Dq_l\}$$

lässt das Verschwinden der Variation des Hamiltonschen Integrals $\int (T+V)dt$ erkennen.

Führt man statt der Veränderlichen $t\ q_1\ q_2\ \ldots\ q_l\ \ldots$ ein neues System von Veränderlichen $t\ \psi_1\ \psi_2\ \ldots\ \psi_\lambda\ \ldots\ \varphi_1\ \varphi_2\ \ldots\ \varphi_\lambda\ \ldots$ ein, so müssen, damit die dadurch entstehenden Gleichungen in Bezug auf diese letztern Veränderlichen die analog einfache Form wie die vorhergehenden in Bezug auf die $q\ p$ erhalten, die beiden Systeme von Veränderlichen durch die Relation

$$DS = \Sigma p_l\,Dq_l - \Sigma \varphi_\lambda\,Dq_\lambda - E\,Dt$$

worin S und E beliebige Functionen bedeuten, verbunden sein.

Ersetzt man hierin die D Differentiation durch eine von ihr unabhängige Δ Differentiation, differentiirt jede dieser beiden Gleichungen mit der nicht darin vorkommenden Differentiation, und subtrahirt die dadurch entstandenen Gleichungen von einander, so ergibt sich

$$\Sigma(Dq_l\,\Delta p_l - \Delta q_l\,Dp_l) = \Sigma(D\psi_\lambda\,\Delta\varphi_\lambda - \Delta\psi_\lambda\,D\varphi_\lambda) + Dt\,.\,\Delta E - \Delta t\,.\,DE.$$

Diese Gleichung enthält als specielle Fälle, nemlich unter besonderen Voraussetzungen über die D und Δ Differentiationen, die von Lagrange, Poisson, Hamilton, Jacobi aufgestellten Störungsformeln, sie mag deshalb die allgemeine Störungsformel genannt werden.

In der Abhandlung wird dann noch gezeigt, welche Störungsformeln dieser Autoren ein vollständiges System bilden, aus welchen nemlich wieder die allgemeine Störungsformel folgt und wie aus dieser sich die Substitutions-Gleichung ergibt.

Diese Behandlungsweise der Theorie der Störungen habe ich im Jahre 1862 in meiner academischen Vorlesung über analytische Mechanik mitgetheilt und 1868 in einer Abhandlung der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen vorgelegt. Hiemit stehen noch einige Lehrsätze in Verbindung, welche ich jetzt in einer dem 19. Bande der Gesellschafts-Schriften angehörenden Abhandlung über die Theorie der Poissonschen Störungsformeln aufgenommen habe. Da mir zuvor durch meine Herausgabe der Gaussischen Werke die Zeit zur weitern Ausführung dieser Lehrsätze fehlte und ich jene ersteren Untersuchungen nicht ohne die letzteren veröffentlichen wollte, so wird die Abhandlung über diese neue Behandlungsweise der Hamilton-Jacobischen Methode erst jetzt für den 18. Band der Gesellschafts-Schriften gedruckt.

Die Abhandlung enthält dann noch die vollständige Bestimmung der Bahnen zweier in einem beliebig vielfach ausgedehnten ebenen Raume und unter Wechselwirkungen, welche auch von den Geschwindigkeiten abhangen, sich frei bewegender Massentheilchen, ebenso die vollständige Bestimmung des analogen Problems in einem beliebigen homogenen Raume, unter der Voraussetzung, dass der eine Massenpunkt fest liegt.

Untersuchungen über die Allylgruppe.

Von

R. Wagner, O. Philippi und B. Tollens.

Unter obigem Titel ist von dem Einen von uns in Gemeinschaft mit verschiedenen Mitarbeitern eine Anzahl Abhandlungen veröffentlicht worden, welche nach Auffindung einer neuen Methode der Darstellung des Allylalkoholes die Feststellung der Constitution desselben, sowie der sich daran schliessenden Verbindungen, besonders der Acrylsäure, zum Ziele hatten.

In Hinsicht der Acrylsäure war von Wislicenus [1]) die Meinung geäussert worden, dass sie eine von der Structur der übrigen Säuren ganz verschiedene Constitution besitze, nämlich nicht die Carboxylgruppe enthalte, und wenn wir auch aus unseren früheren Versuchen schon diese Ansicht bekämpfen zu können glaubten, haben wir doch gesucht, neue Beweise dafür zu bringen, dass die Acrylsäure wie die Essigsäure, Propionsäure und alle übrigen organischen Säuren die Gruppe CO^2H enthält, somit in natürlichem Zusammenhange mit jenen steht.

Dies ist uns völlig gelungen, indem wir die aus der Acrylsäure durch Anlagerung von 2 Atomen Brom entstehende Säure von der Propionsäure ausgehend dargestellt haben, ohne irgend gewaltsame Reactionen anzuwenden, welche störende innere Umsetzungen hätten veranlassen können.

Ueber die ersten Resultate dieser Arbeiten haben wir uns schon erlaubt, zu berichten [2]) und fügen jetzt die neu gewonnenen Thatsachen

1) Annalen der Chemie und Pharmacie 166 S. 50.

2) Nachrichten v. d. Kgl. Ges. der Wissensch. 1873, S. 320 u. 324.

hinzu, welche im weiteren Verlaufe der Untersuchung gewonnen wurden.

O. Philippi und T. haben ausser den früher beschriebenen Kalium-, Baryum- und Calciumsalzen und dem Aethyläther der aus Propionsäure gewonnenen α Bibrompropionsäure folgende Salze und Aether hergestellt und analysirt:

Das Natriumsalz α $C^3H^3Br^2O^2$. Na bildet derbe Blätter.

Das Ammoniumsalz α $C^3H^3Br^2O^2$. $NH^4 + {}^1/_2H^2O$ bildet schöne perlmutterglänzende Blätter.

Das Strontiumsalz α $(C^3H^3Br^2O^2)^2Sr + 6H^2O$ krystallisirt in langen haarfeinen Nadeln.

Der Methyläther α $C^3H^3Br^2O^2.CH^3$ ist eine bei 175—179° siedende kampferartig riechende Flüssigkeit von 1.9043 spez. Gew. bei 0°.

Der Propyläther α $C^3H^3Br^2O^2.C^3H^7$ siedet bei 200—204° und besitzt das spec. Gew. 1.6842 bei 0°.

Der Isobutyläther α $C^3H^3Br^2O^2.C^4H^9$ siedet bei 213—218° und zeigt bei 0° die Dichte 1.6008.

Hierdurch wird die Constitution der α Bibrompropionsäure als $\begin{matrix}CH^3\\CBr^2\\COOH\end{matrix}$ sowie ihre Verschiedenheit von der β Säure oder $\begin{matrix}CH^2Br\\CHBr\\COOH\end{matrix}$ weiter bestätigt (l. c. S. 329).

Die früher schon angedeutete Monobromacrylsäure haben wir in etwas grösserer Menge durch Kochen von α Bibrompropionsäure mit alkoholischem Kali bereitet und die früher angegebenen Eigenschaften bestätigt gefunden, weiter aber ihre Verschiedenheit von der isomeren aus β Bibrompropionsäure von R. Wagner und T. auf analoge Weise (l. c. S. 320 s. u.) erhaltenen Monobromacrylsäure constatirt, indem das Kalium-

salz der ersteren in schönen Rhomben krystallisirt, während das isomere Salz rechtwinklige Tafeln und Säulen bildet, welche beiden Krystallformen völlig constant bleiben und nie durch Beimengung einer Spur des isomeren Salzes modificirt werden, so dass wir die oben beschriebene Monobromacrylsäure als α Säure von der isomeren β Säure unterscheiden. Nach der Bildung aus α Bibrom-

propionsäure oder $\begin{matrix}CH^2\\CBr^2\\COOH\end{matrix}$ durch Verlust von HBr

kann sie nur $\begin{matrix}CH^2\\CBr\\COOH\end{matrix}$ sein.

Beim Erwärmen mit gesättigter Bromwasserstofflösung verbindet sie sich mit HBr, bildet jedoch nicht wieder α Bibrompropionsäure, aus welcher sie durch Verlust von HBr entstanden war, sondern β Bibrompropionsäure, so dass die Eingangs dieser Abhandlung erwähnte Umwandlung Statt findet. Noch einfacher lässt sich jedoch die Ueberführung von α Säure in β Säure bewirken durch 8tägiges Erhitzen von α Säure mit gesättigter Bromwasserstoffsäure auf 100°, wodurch man eine Flüssigkeit erhält, welche beim Abdampfen die schönen Rhomben der β Säure liefert, welche genau bei 64° oder der von Minder und T. an der β Säure beobachteten Temperatur schmelzen und mit einer Spur ihrer Isomeren versetzt sich verflüssigen.

Somit ist der Beweis der Existenz von Carboxyl in der β Bibrompropionsäure und folglich der Acrylsäure geliefert, denn bei Erhitzung der sicher CO^2H enthaltenden α Säure mit Bromwasserstoff auf 100°, oder auch bei Ueberführung derselben in α Monobromacrylsäure und Wiederanlagern von HBr kann unmöglich die Carboxylgruppe angegriffen werden.

R. Wagner und T. haben die von ihnen aus β Bibrompropionsäure dargestellte β Monobromacrylsäure weiter untersucht und dem (l. c. S. 322) beschriebenen Kaliumsalz folgende Salze hinzugefügt:

Natriumsalz β $C^3H^2BrO^2.Na$ bildet mikroscopische zu Büscheln vereinigte Krystalle.

Ammoniumsalz β $C^3H^2BrO^2.NH^4$, schöne Blättchen.

Calciumsalz β $(C^3H^2BrO^2)^2Ca + 4H^2O$, seidenglänzende an der Luft verwitternde Nadeln.

Baryumsalz β $(C^3H^2BrO^2)^2Ba + 4H^2O$, mikroscopische zu Nadeln vereinigte rhombische Tafeln.

Strontiumsalz β $(C^3H^2BrO^2)^2Sr + xH^2O$, feinverzweigte verwitternde Nadeln.

Bleisalz β $(C^3H^2BrO^2)^2Pb$, mikroscopische zu Blättern vereinigte Täfelchen.

Zinksalz β $(C^3H^2BrO^2)^2Zn$, mikroscopische, oft kreuzförmig verwachsene Täfelchen.

Silbersalz β $C^3H^2BrO^2Ag$ bildet in Wasser schwerlösliche glänzende Blättchen.

Der β Monobromacrylsäure-Aether $C^3H^2BrO^2.C^2H^5$ ist eine bei 155—159° siedende Flüssigkeit, welche sich sehr leicht in einen festen weissen Körper verwandelt (s. u.). Wir erhielten ihn nur einmal durch Erwärmen des Silbersalzes mit Bromäthyl auf 100°, denn in mehreren anderen Darstellungen wandelte sich der, wie es schien, zuerst entstandene Aether unter Verlust von Bromäthyl in fast feste mit Wasser weich werdende Massen um (s. u.).

Wie oben angegeben, ist das Kaliumsalz der β Monobromacrylsäure bestimmt verschieden von dem Kaliumsalze der isomeren α Säure, und folglich muss der β Säure die Formel $\begin{matrix}CHBr\\CH\\COOH\end{matrix}$

zukommen, wie aus folgender Zusammenstellung ersichtlich.

CH^2	CH^3
CH	CH^2
COOH	COOH
Acrylsäure.	Propionsäure.
CH^2Br	CH^3
CHBr	CBr^2
COOH	COOH
β Bibrompropionsäure.	α Bibrompropionsäure.
CHBr	CH^2
CH	CBr
COOH	COOH
β Monobromacrylsäure, (Wagner.)	α Monobromacrylsäure. (Philippi.)

Die α wie die β Bromacrylsäure wandeln sich nach kurzer Zeit unter Verlust von HBr in eine weiche in Wasser aufquellende Masse um, ein ähnlicher in Wasser zu einem sehr voluminösen Schleim aufquellender Körper scheidet sich sehr leicht bei der Darstellung der Salze der β Bibrompropionsäure wie des β bromacrylsauren Kaliums ab, und endlich wandelt sich der β Bromacrylsäure-Aether unter Abspaltung von Bromäthyl in einen solchen weissen in Wasser unlöslichen Körper um. Alle diese Substanzen sind nach den Analysen gleich zusammengesetzt nach der Formel $C^3H^4O^3$, d. h. sie besitzen die Zusammensetzung der Säure $C^3H^2O^2$, welche aus Monobromacrylsäure durch Verlust von HBr, und aus ihrem Aether durch Verlust von Bromäthyl entstehen muss, und sich dann mit H^2O verbunden hat, z. B.

$C^3H^2BrO^2.C^2H^5 + H^2O = C^3H^4O^3 + C^2H^5Br$

β Monobromacrylsäure-Aether — Acryl-Colloïd — Bromäthyl

Wahrscheinlich ist jedoch nicht $C^3H^4O^3$,

sondern ein vielfaches die wahre Formel, denn die Eigenschaften (in Wasser unlösliche, nicht saure zu Gallerten aufquellende Massen) deuten auf stattgefundene Polymerisation, und ebenfalls deuten diese Eigenschaften auf Analogien mit im Pflanzenreiche vorkommenden Dextrin- oder Schleimartigen Körpern, bei denen bekanntlich ebenfalls Polymerisation angenommen wird. Ohne hierüber eine nähere Ansicht zu äussern, bezeichnen wir diese Stoffe als Acryl-Colloïde, um ihre Abstammung anzudeuten.

Ueber eine aus Rohrzucker durch verdünnte Schwefelsäure entstehende Säure.

Von

A. von Grote und B. Tollens.

Grosses Interesse bieten Untersuchungen, welche die Prüfung des Verhaltens von Stoffen, wie sie die Natur uns liefert, z. B. Zucker, Stärke u. s. w. gegen verschiedenartige Reagentien zum Gegenstande haben. Man hat auf diese Weise nicht nur die Aussicht, nähere Kenntniss über die häufig wenig bekannte innere Constitution dieser Substanzen zu gewinnen, sondern auch die Hoffnung, durch passend variirte Versuchsverhältnisse vielleicht einmal die Bedingungen zu realisiren, welche die Natur anwendet, wenn sie die oben besprochenen Substanzen im Pflanzenorganismus bildet oder sie unter Neuformirung anderer wieder zersetzt, somit nähere Einblicke in die Chemie des Pflanzenorganismus zu thun.

Die genauere Untersuchung der Reaction von Schwefelsäure auf Zucker besitzt ausserdem noch ein weiteres practisches Interesse wegen der Anwendung zur Inversion zum Zweck der Bestimmung des Zuckers, wobei bekanntlich leicht Bräunung der Flüssigkeit und Verminderung des Zuckergehaltes eintritt, deren Ursache zu ergründen von Wichtigkeit ist.

Ueber die Einwirkung von verdünnten Säuren auf Rohrzucker liegen verschiedene Arbeiten vor. Von Mulder sind die hierbei entstehenden Säuren untersucht und mit den Namen Glucinsäure und Apoglucinsäure belegt, und ähnliche Substanzen haben Peligot, wie neuerdings Reichardt, aus Zucker durch Einwirkung von Kali erhalten; die Eigenschaften dieser Stoffe sind jedoch wenig definirt und die für dieselben gegebenen Formeln complicirt, so dass der Gegenstand noch nicht als abgeschlossen erscheint.

So haben wir die beim Kochen von Rohrzucker mit verdünnter Schwefelsäure auftretenden Reactionen einer erneuten Untersuchung unterzogen, deren Resultate wir uns vorläufig mitzutheilen erlauben.

Kocht man 200 Grm. Rohrzucker (weissen Candis), 100 Grm engl. Schwefelsäure und 2000 Grm. Wasser in einem mit Rückflusskühler versehenen Kolben, so schwärzt sich die Mischung bald, scheidet braune Substanz ab und enthält eine eigenthümliche Säure, welche man gewinnt, wenn man nach 2tägigem Kochen die Flüssigkeit durch Digestion mit Bleiglätte und Baryt von Schwefelsäure, darauf vorsichtig mit wenig Schwefelsäure vom Barytüberschuss befreit, eindampft und dann mit Aether ausschüttelt. Durch Verdunsten des Aethers haben wir darauf eine

gelbliche sehr saure Flüssigkeit erhalten, welche mit Zinkoxyd und Kohlensäure behandelt und eingedampft krystallinisch erstarrte, und woraus absoluter Alkohol unter Lösung geringer Mengen von Verunreinigungen ein leicht lösliches, in Schuppen krystallisirtes Zinksalz abschied, das bei der Analyse auf die Formel $(C^5H^7O^3)^2Zn$ passende Zahlen gab. (Gefunden C 40.25 p. c., H 4.99 p. c., Zn 21.16 p. c.; statt C 40.67 p. c., H 4.75 p. c., Zn 22.34 p. c.) Es gehört also das Salz einer Säure $C^5H^8O^3$ oder einer wasserstoffärmeren Milchsäure der Valerylreihe an.

Durch Versetzen der Lösung des Zinksalzes mit Schwefelsäure, Ausschütteln mit Aether und Sättigen mit Kalk stellten wir das schön strahlig krystallisirte, sehr leicht in Wasser lösliche Kalksalz dar, dessen Calcium- und Wassergehalt der Formel $(C^5H^7O^3)^2Ca + H^2O$ entsprechen. (Gefunden Ca 14.78 p. c. und H^2O 5.80 p. c., statt Ca 14.82 p. c. und H^2O 6.25 p. c.), und auf ähnliche Weise entsteht das schuppig krystallisirte Silbersalz.

Aus den oben gewonnenen, durch Ausschütteln mit Aether der neuen Säure beraubten Flüssigkeiten krystallisiren nach einiger Zeit beträchtliche Mengen ziemlich reinen Traubenzuckers, so dass es den Anschein hat, als ob unsere Säure ganz oder theilweise der Levulose des Rohrzuckers ihre Entstehung verdankt, während die Glycose länger der Einwirkung der Schwefelsäure widersteht. Hierüber, sowie über die Säure selbst, hoffen wir bald nähere Mittheilung zu machen, ebenfalls über ihr Verhältniss zur Glucinsäure Mulder's und Reichardt's.

Eine Säure $C^5H^8O^3$ kann aus Zucker sehr einfach durch Abspaltung von Ameisensäure und

Wasser entstehen und in der That ist Ameisensäure in dieser Reaction beobachtet worden.

$C^6H^{12}O^6 = C^5H^8O^8 + CH^2O^2 + H^2O$

Zucker. Neue Säure. (Glucinsäure?) Ameisensäure. Wasser.

Ueber Verbindungen von Stärke mit Alkali.

Von

B. Tollens.

Nur um Prioritätsrechte zu wahren, erlaube ich mir, die ersten Resultate einer Untersuchung über Verbindungen von Stärke mit Alkalien einzusenden, angestellt zum Zweck, ein Urtheil über die Moleculargrösse der Stärke zu gewinnen. Wie bekannt verlieren Stärkekörner beim Behandeln mit Kali- oder Natronlösung sogleich ihre Form, indem sie zu einer Gallerte aufschwellen. Diese Gallerte wird durch Alkohol flockig und, wie schon Bechamp fand, alkalihaltig präcipitirt und lässt sich durch geduldiges Durcharbeiten mit neuen Mengen Alkohol und zuletzt Aether in ein körniges, rasch trocknendes Pulver verwandeln, welches sich zu Wasser ganz wie z. B. Traganth verhält, indem es sogleich zu einer Gallerte aufschwillt, übrigens mit Jod und etwas Säure die schönste blaue Reaction zeigt.

Auf solche Weise mit Kali und Natron aus Weizen- und Reisstärke hergestellte Pulver habe ich der Elementaranalyse unterworfen, ferner

den Gehalt an Kalium und Natrium bestimmt und einen nie ganz fehlenden Gehalt an Kohlensäure auf Alkali berechnet und abgezogen.

So habe ich in mehreren Versuchen Resultate erhalten, welche auf eine Formel passen, die 4 oder 5 Mal die bis jetzt angenommene oder $C^6H^{10}O^5$, mit 1 Atom des Alkalimetalles verbunden, enthält, was also auf eine Formel der Stärke mit 24 oder 30 Atomen Kohlenstoff deuten würde. Doch möchte ich mir ein bestimmtes Urtheil vorbehalten bis zur Zeit, in welcher ich die Versuche in genügend grosser Zahl werde wiederholt haben.

Solche lösliche Verbindungen ven Stärke mit Alkali mögen vielleicht auch in der Natur eine nicht unbedeutende Rolle spielen.

Agricultur-chemisches Laboratorium
in Göttingen.

Verzeichniss der bei der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangenen Druckschriften.

August, September, October 1873.

(Fortsetzung.)

Nature. 197—205.

Illustraded Catalogue of the Museum of Comparative Zoology. Nr. IV. Deep-Sea Corals. By L. F. de Pourtalès. Cambridge. 1871. 8.

Derselbe Nr. V. The immature state of the Odonata. By L. Cabot. Ebd. 1872.

Derselbe No. VI. Ophiuridae and Astrophytidae. By Th. Lyman. Ebd. 1871.

Annual Report of the Trustees of the Museum for 1871. Ebd. 1872.

Application of photography to illustrations of Natural History. Mit 2 Photographien.

H. Allmers, der Altarschrein der Kirche zu Altenbruch. Stade 1873. Fol.

Ohio Ackerbau-Bericht. 1871. Zweite Reihe. Columbus, Ohio 1872. 8.

Proceedings of the California Academy of Sciences. Vol. IV. Part V. 1872. San Francisco. 1873. 8.

Monthly Reports of the Department of Agriculture for the year 1872. Washington. 1873. 8.

Report of the Commissioner of Agriculture for the year 1871. Ebd. 1872. 8.

Proceedings of the American Association for the Advancement of Science. Twentieth Meeting. August 1871. Cambridge 1872. 8.

Washington Astronomical and Meteorological Observations 1870. Washington 1873. 4.

Proceedings of the Academy of Natural Sciences of Philadelphia 1872. Part 1. 2. 8. Philadelphia 1872. 8.

Proceedings of the American Philosophical Society. 1872. Vol. XII. No. 88. 89. — 8.

W. H. Dall, sechs Abhandlungen, zoologischen und botanischen Inhalts. 8.

Zones of Stars. Observed at the United States Naval Observatory. Washington 1872. 4.

On the right ascensions of the equatorial fundamental stars. Ebd. 1872. 4.

Catalogue of Stars observed at the U. S. Naval Observatory 1845—71. Ebd. 1873. 4.

Results of Washington Observations. 1853—1860. Ebd. 1872. 4.

Mémoires de la Société de Physique et d'Histoire naturelle de Genève. T. XXII, XXIII, 1re part. 1873. 4.

Mag. Fr. Schmidt, über die Petrefacten der Kreideformation von der Insel Sachalin. St. Petersburg. 1873. 4.

J. Doell, die Sammlung Asnola. Ebd. 1873. 4.

M. Brosset, des historiens arméniens des XVII et XVIII siècles, etc. St. Petersb. 1873. 4.

A. Schiefner, Awarische Texte. Ebd. 1873. 4.

L. Stieda, Studien über den Amphioxus lanceolatus. Ebd. 1873. 4.

A. Redtenbacher, die Cephalopodenfauna der Gosauschichten in den nordöstlichen Alpen. Wien. 1873. Fol.

Jahrbuch der k. k. geologischen Reichsanstalt. 1873. Bd. XXIII. Nr. 2. Ebd. 1873. 8.

Verhandlungen der k. k. geologischen Reichsanstalt. 1873. Nr. 7–10. 8.

ΑΡΧΑΙΟΛΟΓΙΚΗ ΕΦΗΜΕΡΙΣ. Nr. 54–65. Athen. 1872–73. Fol.

Tableau général du commerce de la Grèce pendant les années 1867 et 1868.

Dasselbe von den Jahren 1869, 1870 und 1871. Athen. 1873. 4. (In griech. Sprache.)

Schriften der k. physik.-ökonom. Gesellschaft zu Königsberg. 1872. Abth. 2. 4.

Verhandlungen des Vereins für Kunst und Alterthum in Ulm und Oberschwaben. Neue Reihe. Heft 5. Ulm. 1873. 4.

Bulletin de l'Acad. roy. des Sciences etc. de Belgique. T. 35. Nr. 6. T. 36. Nr. 7 et 8. Bruxelles. 1873.

Société des Sciences phys. et natur. de Bordeaux. Procès-verbaux. 1869. 8.

Mémoires de la Soc. des Sciences de Bordeaux. T. IX. 1. Cah. Bordeaux. 1873. 8.

F. de Müller, Fragmenta Phytographiae Australiae. Vol. VII. Melbourne. 1869–71. 8.

Monatsbericht der Berliner Akad. der Wiss. Februar, März, April, Mai Nr. 1 und 2. 1873.

Annales de la Société d'Agriculture etc. de Lyon. 4e Série. T. III. 1870. Lyon. 1871.

Mémoires de l'Acad. des Sciences etc. de Lyon. Classe des Sciences. T. XIX. Lyon. 1871—72.

Annales de la Société Linnéenne de Lyon. 1872. T. XIX. Ebd. 1872.

Oversigt over det K. Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlingar och det Medlemmers Arbeider i aar 1872. Nr. 2. Kjöbenhavn. 1872.

G. Storm, Snorre Sturlassöns historieskriwning. Ebd. 1873.

O. Paludan-Müller, studier till Danmarks Historie i det 13de Aarhundrede. Fjirde Stykka. Ebd. 1872. 4.

H. F. Rördam, Bemärkningar om den historiske Kritik. Ebd. 1873. 4.

A. Colding, om lovene forvandets bevägelse i jorden. Ebd. 1873.

H. Topsöe, och C. Christiansen, kristallografisk-optiske Undersögelser. Ebd. 1873. 4.

E. Warming, forgreningsforhold hos Fanerogamerne. Ebd. 1872. 4.

J. Thomsen, thermochemiske Undersögelser. Ebd. 1873.
The Penu Monthly. Vol. IV. Nr. 44. Aug. 1873. Philadelphia.
Jahresbericht des Vereins für Naturkunde zu Zwickau.
Schweizerisches Urkundenregister. Bd. II. Hft. 3. Bern. 1872.
Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Bd. III. 1873. H. 1. Berlin. 1873.
L. R. Landau, das Dasein Gottes u. der Materialismus. Wien. 1873.
Jahresbericht des physik. Vereins zu Frankfurt a. M. Für 1871—72. Frankf. 1873.
Mittheilungen aus dem Archive des Voigtländ. alterthumsforschenden Vereins in Hohenleuben, mit dem 41.—43. Jahresbericht.
Proceedings of the mathematical Society. Nr. 56—61.
A. Preudhomme de Borre, y a-t-il des Faunes naturelles, distinctes, etc. Bruxelles. 1873.
Giebel, Zeitschrift für die gesammten Naturwissenschaften. 1873. Bd. VII. Berlin. 1873.
XIV. Bericht der Oberhess. Gesellsch. für Natur- und Heilkunde. Giessen. 1873.
Zeitschrift der deutschen morgenländischen Gesellschaft. Bd. 27. Hft. 1—3. Leipzig. 1873.
C. F. von Stälin, Wirtembergische Geschichte. 4. Theil. 2. Abth. Stuttgart 1873.
Verhandlungen der naturforsch. Gesellsch. in Basel. 5. Theil. 4 Hft. Basel 1873.
Mittheilungen des histor. Vereins für Steiermark. Hft. 20. Graz 1873.
Beiträge zur Kunde Steiermarks. Geschichtsquellen. 9 Jahrg. Graz 1872.
The Canadian Ornithologist, a monthly record of information etc. Torento 1873.
Mittheilungen der deutschen Gesellsch. für Natur- und Völkerkunde Ostasiens. 1. Heft. Mai 1873. Yokohama 1873.
C. Beyer, Leben u. Geist L. Feuerbachs. Frankfurt a. M. 1873.
Annales de l'Observatoire Royal de Bruxelles. Bogen 3. 4. 1872. Bogen 4. 1873.

(Fortsetzung folgt.)

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

26. November. № 27. 1873.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Ueber das Rechnen mit Würfen.

Von

Prof. J. Lüroth in Carlsruhe.

Von Staudt hat in seinen »Beiträgen zur Geometrie der Lage« §. 19 und ff. Operationen mit Würfen angegeben, die er als Rechnen mit Würfen bezeichnet und die eine vollständige Analogie mit den Operationen des Zahlenrechnens zeigen. Ich erlaube mir im Folgenden kurz darzulegen, wie durch passende Einführung neuer Begriffe diese Analogie sich weiter fortsetzen lässt bis zum Beweise des Satzes, dass eine ganze Function n. Grades eines Wurfes für n Würfe verschwindet. Da dieser Beweis ohne Einführung von Maass- und Zahlbegriffen (positive ganze Zahlen und den Bruch $\frac{1}{2}$, als Coefficienten und Exponenten, ausgenommen) geführt ist, so kann er die Grundlage abgeben zur rein geometrischen Theorie der algebraischen Curven und Flächen.

§. 1.

V. Staudt nennt einen Wurf $(abcd)$ aus 4 reellen Elementen a, b, c, d eines einförmigen Gebildes einen ordentlichen Wurf, wenn die Elemente ac durch bd getrennt sind. Der Analogie mit den Zahlen wegen wollen wir einen solchen Wurf negativ nennen, und unter einem positiven einen solchen verstehen bei dem ac durch bd nicht getrennt sind. In Bezug auf die Veränderungen dieser Bestimmungen beim Rechnen verhalten sich nun die Würfe wie positive oder negative Zahlen. So ist das Product von zwei negativen Würfen ein positiver Wurf. Um dies zu beweisen, stellen wir hier, wie im Folgenden stets, einen Wurf dar durch 3 feste reelle Punkte abc einer reellen Geraden oder eines reellen Kegelschnitts in Verbindung mit einem vierten, beweglichen Punkt. Die beiden gegebenen Würfe seien $u = (abcd)$, $u_1 = (abcd_1)$. Das Produkt uu_1 sei $= (abcp)$. Dann ist p so zu bestimmen, dass $ac.dd_1.bp$ eine Involution, also $abcd \; \overline{\wedge} \; cpad_1$ ist. Weil u negativ ist sind die Punkte ac durch bd getrennt, folglich auch wegen der projectivischen Beziehung durch die Punkte pd_1. Aus der Annahme, dass u_1 negativ ist, folgt aber, dass ac auch durch bd_1 getrennt sind. Somit sind die Punkte ac durch bp nicht getrennt d. h. $(abcp)$ ist positiv.

Aehnlich beweist man die übrigen bei der Multiplication auftretenden Fälle.

Um zu beweisen, dass die Summe $u + u_1 = (abcs)$ der beiden negativen Würfe wieder negativ ist, beachte man, dass der Punkt s durch die Bedingung bestimmt wird, dass $cc.dd_1.as$ eine Involution ist. Wären nun die Punkte ac

durch die ds getrennt, so würde aus $adcs \barwedge sd_1ca$ folgen, dass auch cs durch ad_1 getrennt wäre, also ac durch d_1s nicht getrennt sein könnte. Da nun ac durch bd und bd_1 getrennt sind, so müssten gleichzeitig ac durch bs getrennt und nicht getrennt sein, was unmöglich ist. Daher können die Punkte ac durch ds nicht getrennt sein, müssen also durch bs getrennt sein, so dass $abcs$ negativ ist. Auf dieselbe Art wird bewiesen, dass die Summe zweier positiven Würfe wieder positiv ist.

Es soll nun ferner ein Wurf u grösser heissen, als ein anderer u_1, wenn $u - u_1$ positiv ist. Diese Bestimmung kann man auch anwenden auf die beiden uneigentlichen Würfe $(abca)$ und $(abcb)$ die v. Staudt mit den Zeichen 0, 1 bezeichnet und die alle Eigenschaften der Zahlen 0, 1 haben. Es ergibt sich dann, dass ein negativer Wurf < 0, ein positiver > 0 ist. Die positiven kann man wieder in zwei Klassen theilen, je nachdem sie < 1 oder > 1 sind. Seien die beiden Würfe u, u_1 beide < 1, so ist $1 - u$ positiv, daher auch $u_1 - uu_1$ folglich $uu_1 < u_1 < 1$, wie dies auch von den Zahlen gilt; ebenso ist das Produkt von zwei Würfen, die beide > 1 sind, selbst > 1. Ist $u_1 > u$, $u = (abcd)$ $u_1 = (abcd_1)$ und $u_1 - u = (abct)$, so ist, weil $u_1 - u > 0$, der Sinn abc mit dem atc übereinstimmend. Weil aber die Involution $cc.td.ad_1$ zwei Ordnungselemente besitzt, ist der Sinn atc dem d_1dc entgegengesetzt, stimmt also mit dem cdd_1 überein. Daher ist auch der Sinn abc mit dem cdd_1 übereinstimmend. Ist ein dritter Wurf $u_2 = (abcd_2) > u_1$, so ist auch der Sinn cd_1d_2 mit abc übereinstimmend, also ist der Sinn dd_1d_2 derselbe, wie der abc.

§. 2.

Seien nun w, w' zwei nicht neutrale conjungirte Würfe. Wir stellen sie dar durch $(abcd)$, $(abcd')$, wo nun abc drei reelle Punkte eines reellen Kegelschnitts sein sollen, folglich dd' zwei imaginäre conjungirte Punkte desselben sein werden. Die Verbindungslinie dd' ist dann der reelle Träger beider Punkte, also eine Gerade die mit dem Kegelschnitt keinen reellen Punkt gemein hat und folglich ac in einem Punkte e trifft, der ausserhalb des Kegelschnittes gelegen ist, und von dem sich zwei reelle Tangenten ef und ef' mit dem Berührungspunkte f, f' ziehen lassen. Die Linie eb möge den Kegelschnitt noch in p treffen. Dann ist $ac.dd'.bp$ eine Involution also $(abcp) = ww'$. Weil diese Involution die beiden reellen Ordnungselemente ff' hat, können die Punkte ac durch bp nicht getrennt sein, so dass $ww' > 0$ ist. Nach der Construction ist ferner $(abcf)^2 = (abcf')^2 = (abcp) = ww'$. Da aber ac durch ff' getrennt sind, ist einer der beiden Würfe etwa $(abcf) > 0$. Es gibt also immer einen positiven Wurf, dessen Quadrat dem Producte von zwei conjungirten gleich ist. Dieser soll der absolute Werth der letzteren heissen. Aus dieser Definition folgt, dass der absolute Werth eines Productes gleich dem Producte der absoluten Werthe der Factoren ist.

Wenn nun I ein nicht neutraler Wurf ist und w noch ein Wurf, so hat v. Staudt bewiesen (Beiträge Nr. 278) dass stets und nur auf eine Weise zwei neutrale Würfe u, v angegeben werden können, so dass $w = u + vI$ ist. Für I wollen wir einen speciellen Wurf setzen. Es b' bestimmt durch die Gleichung $(abcb) + (abcb'$

$= 0$. Wenn die Punkte *abc* auf einem reellen Kegelschnitte gewählt sind, so sind *ac* durch *bb'* harmonisch getrennt. Sei *i* eines der imaginären Ordnungselemente der Involution *ac.bb'*, also der Berührungspunkt von einer der beiden imaginären Tangenten, die sich vom Schnittpunkte der Linien *ac* und *bb'* an den Kegelschnitt legen lassen. Für I soll dann der nicht neutrale Wurf (*abci*) gesetzt werden. Ist *i'* der zweite, zu *i* conjungirte Ordnungspunkt der Involution, so ist (*abci'*) der zu I conjungirte Wurf I'. Die Construction am Kegelschnitt zeigt dann, dass $I + I' = 0$ $II' = 1$ ist.

Der zu w conjungirte Wurf w' ist dann $= u + vI'$ und folglich $ww' = u^2 + v^2$, so dass der absolute Werth von w derjenige positive Wurf ist, dessen Quadrat $= u^2 + v^2$ ist. Da $w + w' = 2u$ so ist $w + w'$ kleiner als der doppelte absolute Werth von w. Hiemit beweist man ohne Schwierigkeit, dass der absolute Werth einer Summe von Würfen kleiner ist als die Summe der absoluten Werthe der Summanden.

§. 3.

Da die Begriffe der Addition und Multiplication von Würfen gegeben sind, so ist auch der einer ganzen Function eines Wurfes aufzustellen, und man kann für jeden gegebenen Wurf den zugehörigen Functionswerth construiren.

Aus den vorangegangenen Sätzen ergibt sich nun durch genau dieselben Schlüsse, die man bei Zahlen anwendet, die Richtigkeit der folgenden beiden Sätze.

1. Wenn eine ganze Function eines Wurfs vorliegt, so kann man stets einen positiven

Wurf G angeben, so dass für jeden Wurf, dessen absoluter Werth $> G$ ist, der Functionswerth $>$ als ein gegebener positiver Wurf K ist.

2. Ist für einen Wurf w_0 die Function dem Wurfe W gleich und ist δ ein beliebig gegebener positiver Wurf, so kann man stets einen andern positiven Wurf ε finden, so dass zu jedem Wurf $w_0 + h$, bei dem der absolute Werth von $h < \varepsilon$ ist, ein Functionswerth $W + H$ gehört, bei dem der absolute Werth von $H < \delta$ ist.

Da die absoluten Functionswerthe stets positiv sind, so müssen sie eine untere Grenze K besitzen, die von keinem absoluten Functionswerth unterschritten werden kann, während jeder grössere Werth unterschritten wird.

Es soll gezeigt werden, dass stets mindestens ein Wurf existirt, welcher den absoluten Functionswerth $= K$ macht. Wir übertragen zu dem Zwecke den von Darboux (Bulletin 1872) gegebenen Beweis. Um jeden Wurf durch einen reellen Punkt einer reellen Ebene darzustellen, nehmen wir in derselben zwei Punkte AB an, deren Verbindungslinien c sei. Durch A legen wir noch die beiden Linie ab, durch B die $a'b'$. Ist nun der Wurf $w = u + vI$ und sind die Strahlen d, d' der Büschel AB so bestimmt, dass $u = (abcd)$, $v = (a'b'cd')$, so soll der Schnittpunkt w von d und d' den Wurf w repräsentiren. Sind ef zwei andere Strahlen des Büschels A, so wollen wir der Kürze wegen sagen, w liege zwischen e und f wenn der Strahl d von c durch e und f getrennt ist. Dann liegt der Wurf $(abcd)$ auch der Grösse nach zwischen $(abce)$ und $(abcf)$. Aehnliche Bestimmungen sollen für Strahlen $e'f'$ des Büschels B gelten.

Diejenigen Punkte der Ebene, die gleichzeitig zwischen ef und $e'f'$ liegen, sollen im In-

nern des Vierecks $efe'f'$ liegend genannt werden. Ferner soll von einem Strahle g gesagt werden er halbire den Winkel ef, wenn er der Bedingung genügt $2(abcg) = (abce) + (abcf)$. Ist $(abce) < (abcf)$, so ist dann $(abcf) - (abcg) = (acbg) - (abce) = \frac{1}{2}[(abcf) - (abce)]$ und $(abcg) > (abce)$ aber $< (abcf)$.

Seien nun $(abca_1)$, $(a'b'ca'_1)$ zwei Würfe < 0 und $(abcb_1)$, $(a'b'cb'_1)$ zwei > 0, deren absolute Werthe grösser sind, als die oben (Satz 1) bestimmte Grenze G. Ausserhalb oder auf dem Umfang des Vierecks $a_1b_1\ a'_1b'_1$ ist der absolute Werth eines Wurfes $> G$, so dass die Punkte, in welchen der absolute Werth der Function dem Wurfe K gleich werden kann, nur im Innern des Vierecks liegen können.

Wir halbiren nun den Winkel a_1b_1 und den Winkel $a_1'b_1'$ und theilen so das Viereck in 4 neue ein. In mindestens einem von diesen muss die Function wieder die untere Grenze K haben. Dessen Seiten seien a_2b_2, $a_2'b_2'$ (wobei natürlich zwei von diesen Linien mit zwei Seiten des ersten Vierecks identisch sind), die beiden ersten die andern durch B gehend. Dieses Viereck theilt man wieder durch zwei Halbirungslinien in 4 neue, von welchen wieder mindestens eines $a_3b_3\ a_3'b_3'$ die untere Grenze K der Functionswerthe liefern muss u. s. w. Die Bezeichnung möge dabei so gewählt sein, dass $(abca_i) < (abcb_i)$ und $(abca'_i) < (abcb'_i)$. Dann ist $(abcb_2) - (abca_2) = \frac{1}{2}((abcb_1) - (abca_1))$ u. s. w. und $(abca_i) \gtreqless (abca_{i-1})$, $(abcb_{i-1}) \lesseqgtr (abcb_{i-1})$. Die Linien $a_1\ a_2\ a_3 \ldots$ folgen also in einem und demselben Sinne auf einander und es muss demnach eine Grenzlinie p existiren, die nicht überschrit-

ten wird. Ebenso nähern sich die Linien $b_1 b_2 \ldots$ einer Grenzlinie q. Diese beiden können aber nicht verschieden sein. Denn es ist:

$$(abcq) - (abcp) < (abcb_i) - (abca_i).$$

Nun soll sofort bewiesen werden, dass man durch gehörig weit fortgesetztes Halbiren eines positiven Wurfes einen Wurf erhalten kann, der kleiner als ein gegebener positiver Wurf ist. Setzt man dies voraus, so kann man auch eine Differenz finden $(abcb_i) - (abca_i)$ die $< (abcq) - (abcp)$ ist. Daher müssen beide Strahlen coincidiren in einem einzigen α. Ebenso erhält man im Büschel B einen Strahl β, der die gemeinsame Grenzlage der Strahlen $a'_1 a'_2 a'_3 \ldots b'_1 b'_2 b'_3 \ldots$ ist.

Für den Wurf w, der dem Schnittpunkte von α und β entspricht, muss nun der absolute Functionswerth $\geqq K$ sein. Wäre er $= K + 2\delta$, so wähle man ein den Punkt w umschliessendes Viereck so aus, dass die Aenderung des absoluten Functionswerthes in ihm $< \delta$ ist, was nach dem 2ten Satze und dem noch zu beweisenden stets möglich ist. Dann ist jedenfalls im Innern des Vierecks der absolute Functionswerth $> K + \delta$, kann also nicht die untere Grenze K haben. Daher muss für jenen Punkt der absolute Functionswerth $= K$ sein.

§. 4.

Der Angelpunkt dieses Beweises ist der Satz, dass man durch fortgesetzte Halbirung eines positiven Wurfes jeden gegebenen positiven Wurf

unterschreiten kann. Wäre der Satz nicht richtig, so müsste ein grösster Wurf $(abck)$ existiren, der nicht unterschritten werden könnte, während dies bei jedem grösseren Wurf möglich wäre. Es sei nun $(abck') = 2(abck)$. Denkt man sich die Würfe auf einer reellen Geraden oder auf einem reellen Kegelschnitt construirt, so werden die beiden Punkte $k\,k'$ verschieden sein, so lange nicht k mit a zusammenfällt. Weil ferner $(abck) \geqq 0$, ist $(abck') > (abck)$. Daher ist der Sinn akk' mit dem abc identisch. Man kann also zwischen k und k' den Punkt l so annehmen, dass auch der Sinn $aklk'$ mit dem abc übereinstimmt. Dann ist einerseits $(abcl) > (abck)$, andererseits $\frac{1}{2}(abcl) < \frac{1}{2}(abck') < (abck)$.

Wegen der ersten Ungleichung kann man durch eine gehörige grosse Zahl, von Halbirungen des gegebenen Wurfes einen Wurf erhalten, der $< (abcl)$ ist. Die zweite zeigt, dass man durch eine weitere Halbirung $(abck)$ unterschreitet, gegen die Voraussetzung. Dieser Widerspruch ist möglich, solange k nicht mit k', also k selbst nicht mit a zusammenfällt. Hiermit ist aber der Satz oben bewiesen.

Sei nun W der Functionswerth, der dem Wurf w entspricht, und dessen absoluter Werth das Minimum ist. Es ist zu zeigen, dass W nothwendig $= 0$ ist. Wir setzen für die Veränderliche in der Function $w + h$ und erhalten dann den Ausdruck:

$$W + h^p W_1 + \ldots$$

wo die ganze Zahl $p \geqq 1$ und W_1 von Null verschieden sein soll. Multipliciren wir mit dem conjungirten Werth $W' + h^p W'_1 + \ldots$ (wo

durch die Accente die conjungirten Würfe bezeichnet sind, so entsteht:

$$WW' + (h^p W_1 W' + h'^p W'_1 W) + \ldots .$$

Die ganze Zahl p sei $= 2^q . r$, wo r ungerade. Man bestimme nun einen Wurf ε so, dass $\varepsilon^{2^q} = (abcb')$ ist, wo $(abcb') + (abcb) = 0$; dies kann stets geschehen durch wiederholtes Tangentenzeichen an den Kegelschnitt auf dem man die Punkte abc angenommen hat. Dieser Wurf ε hat dann die Eigenschaft, dass $\varepsilon^p = (abcb')^r = (abcb')$ ist und vom conjugirten ε' gilt dasselbe. Ist nun der Wurf $W'W_1 + W'_1 W$ nicht $= 0$, so setze man, je nachdem er > 0 oder < 0 ist, für h εg oder g, unter g einen positiven Wurf verstanden, und erhält dann:

$$WW' \mp (W'W_1 + WW'_1) g^p + \ldots ,$$

wo man nun den Wurf g so klein wählen kann, dass alle auf WW' folgenden Glieder eine negative Summe geben, der ganze Ausdruck also $< WW'$ ist. Damit dies unmöglich ist, muss:

$$W'W_1 + WW'_1 = 0$$

sein. Andererseits bestimme man ebenfalls durch Tangentenziehen an den Kegelschnitt einen Wurf ϑ, so dass $\vartheta^{2^q} = I$ ist. Dann ist $\vartheta^p = I^r$, $\vartheta'^p = I'^r$ und, weil r ungerade, $I^r + I'^r = 0$, also auch $\vartheta^p + \vartheta'^p = 0$. Setzt man nun ein-

mal $h = \vartheta g$, wo g wie oben > 0, ein zweites Mal $h = \vartheta' g$, so erhält man die beiden in:

$$W' W \pm g^p (\vartheta^p W_1 W' + \vartheta'^p W'_1 W) + \ldots$$

zusammengefassten Ausdrücke, von welchen, wenn nicht der Coefficient von g^p verschwindet, einer durch passende Wahl von $g < WW'$ gemacht werden kann. Damit dies unmöglich ist muss

$$\vartheta^p W_1 W' + \vartheta'^p W'_1 W = 0$$

sein. Aus den beiden so erhaltenen Gleichungen folgt, dass $W = 0$ sein muss.

Es gibt also einen Wurf, für welchen eine ganze Function eines Wurfes verschwindet, und hieraus folgt weiter, dass es n und nur n gibt, wenn die ganze Function n. Grades ist.

§. 5.

Wir machen von dem so bewiesenen Satze eine Anwendung auf die Theorie der algebraischen Curven, indem wir nach Herrn Grassmann (Crelle 36) eine algebraische Curve folgendermassen definiren.

Wenn die Lage eines beweglichen Punktes x in einer Ebene dadurch beschränkt ist, dass ein Punkt und eine Gerade, welche durch Construction mittelst des Lineals allein aus x und aus festen Punkten und Geraden hervorgehen, zusammenfallen sollen, so kann der Punkt x noch eine Mannigfaltigkeit von Lagen annehmen, deren Gesammtheit wir Curve n. Ordnung

neunen, wenn bei jenen Constructionen der Punkt x $n$mal angewendet wurde. Hiebei können offenbar die Punkte und Geraden reell oder imaginär sein.

In der Ebene der Curve legen wir ein Dreieck ABC als Coordinatendreieck zu Grunde und definiren die homogenen Coordinaten $x_1 x_2 x_3$ eines Punktes x nach Herrn Fiedler (über projectivische Coordinaten, Züricher Vierteljahrsschrift XV) durch drei Würfe, indem wir setzen:

$$\frac{x_2}{x_1} = C(AEBx), \quad \frac{x_1}{x_3} = B(CEAx), \frac{x_3}{x_2} = A(BECx).$$

E ist dabei ein fester Punkt der Ebene. In ähnlicher Weise kann man die Coordinaten einer Geraden definiren. Durch genau dieselben Schlüsse, die Herr Fiedler lc. Seite 161 gemacht hat (wobei nur mit den Würfen selbst, nicht mit deren Werthen operirt wird) zeigt man nun, dass die Gleichung einer Geraden die Form hat

$$x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2 + x_3 \xi_3 = 0.$$

Hieraus und aus der obigen Definition der Curve n. Ordnung ergibt sich aber, dass deren Gleichung durch eine ganze homogene Function n. Ordnung in $x_1 x_2 x_3$ gegeben wird. Soll die Curve durch eine Gerade geschnitten werden, so erhält man demnach für den Wurf $\frac{x_1}{x_2}$ z. B. eine Gleichung n. Grades, die nach dem Vorigen n Wurzeln hat. Eine Curve n. Ordnung wird also von jeder Geraden in n Punkten geschnitten.

Combinirt man zwei Curven von der m. und n. Ordnung, so hat man, um ihre Schnittpunkte zu finden, die Resultante der beiden Gleichungen

aufzustellen. Die Bildung derselben ist eine formale Operation, die unabhängig ist davon, ob die Veränderlichen Zahlen oder Würfe sind; woraus folgt, dass die Schnittpunkte durch eine Gleichung mn. Grades gegeben werden, welcher durch $m.n$ Würfe genügt wird. Es scheiden sich also die beiden Curven in $m.n$ Punkten.

Somit sind diese beiden Hauptsätze der Theorie der Curven wenigstens ohne Zuhülfenahme von Maass- und Zahlbegriffen bewiesen.

Carlsruhe, 15. September 1873.

Bemerkungen zu dem Sturm'schen Satze.

Von

Prof. **K. Hattendorff** in Aachen.

Wenn man zur Herstellung der Sturmschen Functionen

$$(1) \qquad F(x),\ F'(x),\ F_2(x),\ \ldots\ F_r(x)$$

das directe Verfahren der fortgesetzten Division in Anwendung bringt, so lassen sich zwei Fälle unterscheiden. Entweder sind nemlich die auftretenden Quotienten

$$(2) \qquad q_1,\ q_2,\ \cdots\ q_r$$

sämmtlich lineär, oder es kommen unter ihnen

auch Functionen höheren Grades vor. Im ersten Falle ist in dem Systeme (1) die Anzahl der Functionen um 1 grösser als die Anzahl r der von einander verschiedenen Wurzeln der algebraischen Gleichung $m$ten Grades $F(x) = 0$. Von $F'(x)$ an ist jede Function im Grade um 1 niedriger als die vorhergehende, und in keiner von ihnen hat die höchste Potenz von x den Coefficienten Null. Im zweiten Falle ist in (1) die Anzahl der Functionen kleiner als $r+1$, die erste ist vom $m$ten, die letzte vom $(m-r)$ten Grade. Aber nicht von allen zwischenliegenden Graden sind in dem Systeme (1) Functionen vorhanden. Es ist zweckmässig, als Grad einer Function den höchsten Exponenten von x anzugeben, der vorkommen kann. Tritt dann an irgend einer Stelle ein Quotient auf, in welchem x^{k+1} als höchste Potenz wirklich vorkommt, so fallen in (1) an der betreffenden Stelle k auf einander folgende Functionen aus, und in der letzten Function vor der Lücke sind die k höchsten Coefficienten Null.

Bekanntlich hat zuerst Sylvester ein System von Functionen

$$(3)\quad F(x),\quad F'(x),\quad \vartheta_{m-2}(x),\quad \ldots\quad \vartheta_{m-r}(x)$$

aufgestellt, die rücksichtlich der Zeichenreihe den Sturm'schen Functionen äquivalent sind. Dieses System (3) ist unter allen Umständen vollzählig, d. h. die Anzahl der Functionen ist immer $r+1$, und für eine ganze Zahl n, die nicht kleiner als 2 und nicht grösser als r, ist immer $\vartheta_{m-n}(x)$ eine bestimmte ganze Function $(m-n)$ten Grades. Sind die Functionen (1) voll-

zählig, so hat man für jedes ganze n zwischen den eben angegebenen Grenzen eine Gleichung von der Form:

$$\frac{F_n(x)}{\vartheta_{m-n}(x)} = \mu_n, \tag{4}$$

in welcher μ_n eine positive Constante bedeutet. Ist dagegen das System nicht vollzählig, so gilt die Gleichung (4) nur dann, wenn in (1) wirklich eine Function $F_n(x)$ vom $(m-n)$ten Grade vorhanden ist, und selbst dann ist das Vorzeichen von μ_n von vorn herein nicht bekannt. Man hat also in dem System (3) zwei Arten von Functionen zu unterscheiden: solche, die durch Gleichung (4) mit je einer Sturm'schen Function zusammenhängen, und solche überzählige Functionen, deren Grad in dem Systeme (1) nicht vertreten ist.

Nun geht zwar aus den Untersuchungen von Hermite (Comptes rendus T. 35. 36) hervor, dass von den Sylvester'schen Functionen (3) unter allen Umständen der Sturmsche Satz gilt. Aber es bleibt in dem zweiten der oben erwähnten Fälle immer noch die Frage offen, wie die überzähligen Sylvester'schen Functionen beschaffen sind, und welche directe Bedeutung sie für den Sturm'schen Satz haben.

Diese Frage habe ich untersucht und bin dabei zu den folgenden Resultaten gekommen.

Wenn in der Sturm'schen Function $F_s(x)$ die k höchsten Coefficienten gleich Null sind, so gilt dasselbe von $\vartheta_{m-s}(x)$, und die nächsten

k Functionen $\vartheta_{m-i-1}(x)$, $\vartheta_{m-i-2}(x)$, ... $\vartheta_{m-i-k}(x)$ stehen zu $\vartheta_{m-i}(x)$ je in einem constanten Verhältnis. Das letzte dieser Verhältnisse ist jedenfalls von Null verschieden, so dass man $F_i(x)$ in der doppelten Weise ausdrücken

$$(5)\quad F_i(x) = \mu_i\, \vartheta_{m-i}(x) = \mu_{i+k}\, \vartheta_{m-i-k}(x).$$

Die Function $F_{i+k+1}(x)$ ist in (1) die erste nach der Lücke. Für sie gilt also eine Gleichung von der Form (4). Der dabei auftretende constande Factor μ_{i+k+1} hat dasselbe Vorzeichen wie μ_{i+k} in Gleichung (5).

Behält man von den $k+1$ Functionen $\vartheta_{m-i}(x)$, ... $\vartheta_{m-i-k}(x)$, die bis auf constante Factoren mit einander übereinstimmen, nur die erste und die letzte bei und wiederholt in (3) dieses Verfahren an jeder Stelle, wo das System (1) eine Lücke zeigt, so zerfällt dadurch das System (3) in einzelne Gruppen. Es ist zweckmässig die Trennungsstelle von je zwei auf einander folgenden Gruppen zwischen die beiden Functionen ϑ zu legen, welche nach Gleichung (5) einer und derselben Sturmschen Function correspondiren. Die constanten Factoren μ, welche derselben Gruppe angehören, haben dann einerlei Vorzeichen.

Diese Sätze genügen, um zu beweisen, dass für das eben hergestellte unvollzählige System (3), aber auch für das vollzählige, das Sturmsche Theorem seine Gültigkeit hat.

Bricht man den Sturmschen Kettenbruch bei dem Theilnenner q_{n-1} ab, so ergibt sich ein

Näherungswerth, dessen Zähler man mit q_1, q_{n-1} bezeichnen kann. Von dem Systeme:

$$(6) \qquad 1;\ q_1, q_1;\ q_1, q_2;\ \cdots\ q_1, q_r$$

gilt bekanntlich ebenfalls der Sturmsche Satz. Dieses System enthält immer ebenso viele Functionen wie das System (1). Mit (6) lässt sich das System der Sylvesterschen Functionen φ, nemlich:

$$(7) \qquad 1,\ \varphi_1 x,\ \varphi_2(x),\ \varphi_r(x) \quad .$$

vergleichen, in welchem $\varphi_n(x)$ eine ganze Function $n$ten Grades ist.

Ist das System (6) vollzählig, so gilt für jedes ganze n, das nicht kleiner als 2 und nicht grösser als $r+1$ ist, die Gleichung:

$$(8) \qquad \frac{q_1,\ q_{n-1}}{\vartheta_{n-1}(x)} = \mu_n,$$

und darin ist μ_n dieselbe Constante, wie in Gleichung (4). Ist aber das System (6) unvollzählig, so gilt die Gleichung (8) nur dann, wenn in (6) ein Zähler vorkommt, welcher x^{n-1} als höchste Potenz wirklich enthält. Da das System (7) immer vollzählig ist, so entsteht hier in Betreff der überzähligen Functionen φ dieselbe Frage wie vorher bei den Functionen ϑ. Ich gelange zu dem folgenden Resultate.

Sind in der Sturmschen Fuction $F_i(x)$ die k

höchsten Coefficienten gleich Null, so stehen in (7) die auf einander folgenden Functionen $\varphi_i(x)$, $\varphi_{i+1}(x)$, . . . $\varphi_{i+k-1}(x)$ zu $\varphi_{i-1}(x)$ je in einem constanten Verhältnisse. Das letzte dieser Verhältnisse ist jedenfalls von Null verschieden, so dass man q_1, q_{i-1} in der doppelten Weise ausdrücken kann:

$$(9)\quad q_1,\ q_{i-1} = \mu_i\ \varphi_{i-1}(x) = \mu_{i+k}\ \varphi_{i+k-1}(x).$$

Hier sind die Constanten μ_i und μ_{i+k} dieselben wie in Gleichung (5). Dies genügt, um zu beweisen, dass für das unvollzählige System (7), aber auch für das vollzählige, der Sturmsche Satz seine Gültigkeit hat. Das unvollzählige System erhält man, wenn man von jeder Folge von Functionen φ, deren höchster Coefficient Null ist, nur die letzte Function beibehält.

Den 22. Septbr. 1873.

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

3. December. № 28. 1873.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Bemerkungen zur allgemeinen Theorie der Flächen.

Von

A. Enneper.

Die folgenden Untersuchungen enthalten eine Aufstellung, nebst Anwendungen, von Elementarformeln, welche für die Betrachtung von Curven auf krummen Flächen in manchen Fällen von Nutzen sein kann. Die Normale zur Fläche, die Tangente zur Curve und eine dritte Gerade, welche auf den beiden bemerkten Geraden senkrecht steht, bilden in jedem Puncte von Fläche und Curve ein variabeles Coordinatensystem, welches in enger Beziehung zu den Krümmungen von Fläche und Curve steht. Man gelangt auf diese Weise zu sehr einfachen Formeln, welche in vielen Fällen eine leichtere Anwendung gestatten, wie die Formeln, welche auf Betrachtung besonderer Coordinatensysteme auf der Fläche, als Krümmungslinien, asymptotische Linien, geodätische Linien u. a. basirt sind.

I.

Auf einer Fläche werde eine beliebige Curve angenommen; die Coordinaten x, y, z eines Punktes derselben sehe man als Functionen einer Variabelen s an, wo ds das Bogenelement der Curve bezeichnet. Die Winkel, welche die Normale zur Fläche in dem bemerkten Puncte mit den Coordinatenaxen bildet, seien a, b und c. Die Differentialquotienten von x, y, z in Beziehung auf s mögen nach der Art von Lagrange bezeichnet werden, so dass also:

$$\frac{dx}{ds} = x', \quad \frac{d^2x}{ds^2} = x'' \text{ etc.}$$

Man hat dann die folgenden Gleichungen:

1) $$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1,$$

2) $$x' \cos a + y' \cos b + z' \cos c = 0,$$

3) $$\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c = 1.$$

Bezeichnet man durch R den Krümmungshalbmesser des Normalschnitts, dessen Ebene durch die Tangente zur Curve im Punkte (x, y, z) geht, so ist:

4) $$-\frac{1}{R} = x' \frac{d\cos a}{ds} + y' \frac{d\cos b}{ds} + z' \frac{d\cos c}{ds}.$$

Die abwickelbare Fläche, gebildet aus den berührenden Ebenen zur gegebenen Fläche längs der Curve, werde in einer Ebene ausgebreitet, wodurch die primitive Curve in eine plane Curve

übergeht. Dem Punkte (x, y, z) der primitiven Curve entspricht ein bestimmter Punct der planen Curve, bezeichnet man durch T den Krümmungsradius der planen Curve in diesem Puncte, so ist:

$$5) \qquad \frac{1}{T} = \begin{vmatrix} x', & y' & z' \\ x'', & y'' & z'' \\ \cos a, & \cos b, & \cos c \end{vmatrix}.$$

Ist $d\sigma$ der Contingenzwinkel der planen Curve in dem bemerkten Puncte, so ist bekanntlich:

$$6) \qquad d\sigma = \frac{ds}{T}.$$

Zur Abkürzung setze man:

$$7) \qquad \frac{1}{S} = \begin{vmatrix} \frac{d\cos a}{ds}, & \frac{d\cos b}{ds}, & \frac{d\cos c}{ds} \\ x', & y', & z' \\ \cos a, & \cos b, & \cos c \end{vmatrix}.$$

Es lässt sich S auf folgende Weise geometrisch deuten. Die Hauptkrümmungshalbmesser der gegebenen Fläche im Puncte (x, y, z) seien r' und r''. Die Tangente zum Hauptschnitt mit dem Krümmungshalbmesser r' bilde den Winkel φ mit der Tangente zur Curve. Es ist dann:

$$8) \qquad \frac{1}{S} = -\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r''}\right) \sin\varphi \cos\varphi.$$

Nach dem Theorem von Euler ist bekanntlich:

$$9) \qquad \frac{1}{R} = \frac{\cos^2\varphi}{r'} + \frac{\sin^2\varphi}{r''}.$$

Durch Elimination von φ zwischen den Gleichungen 8) und 9) folgt:

$$10) \qquad \frac{1}{S^2} = -\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r'}\right)\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r''}\right).$$

Die Richtungen, bestimmt durch die Cosinus:

$$\begin{array}{ccc} x', & y', & z'; \\ \cos a, & \cos b, & \cos c; \end{array}$$

$$y'\cos c - z'\cos b,\ z'\cos a - x'\cos c,\ x'\cos b - y'\cos a;$$

sind gegenseitig zu einander orthogonal. Die Differentialquotienten dieser Cosinus nach s lassen sich durch Einführung von R, S, T auf sehr einfache Formen bringen. Die Gleichung 4) lässt sich nach 2) ersetzen durch:

$$\frac{1}{R} = x''\cos a + y''\cos b + z''\cos c.$$

Aus dieser Gleichung, der Gleichung 5) und $x'x'' + y'y'' + z'z'' = 0$ folgt:

$$11) \quad \begin{cases} x'' = \dfrac{\cos a}{R} - \dfrac{y'\cos c - z'\cos b}{T}, \\ y'' = \dfrac{\cos b}{R} - \dfrac{z'\cos a - x'\cos c}{T}, \\ z'' = \dfrac{\cos c}{R} - \dfrac{x'\cos b - y'\cos a}{T}. \end{cases}$$

Die Gleichung 3) nach s differentiirt gibt in Verbindung mit den Gleichungen 4) und 7):

$$12)\quad \begin{cases} \dfrac{d\cos a}{ds} = -\dfrac{x'}{R} + \dfrac{y'\cos c - z'\cos b}{S}, \\ \dfrac{d\cos b}{ds} = -\dfrac{y'}{R} + \dfrac{z'\cos a - x'\cos c}{S}, \\ \dfrac{d\cos c}{ds} = -\dfrac{z'}{R} + \dfrac{x'\cos b - y'\cos a}{S}. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen 11) und 12) findet man:

$$13)\quad \begin{cases} \dfrac{d(y'\cos c - z'\cos b)}{ds} = \dfrac{x'}{T} - \dfrac{\cos a}{S}, \\ \dfrac{d(z'\cos a - x'\cos c)}{ds} = \dfrac{y'}{T} - \dfrac{\cos b}{S}, \\ \dfrac{d(x'\cos b - y'\cos a)}{ds} = \dfrac{z'}{T} - \dfrac{\cos c}{S}. \end{cases}$$

Bezeichnet man durch ϱ den Krümmungshalbmesser der Curve im Puncte (x, y, z) so ist:

$$14)\qquad \frac{1}{\varrho} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{T^2}}.$$

Der Radius der zweiten Krümmung der Curve, der sogenannte Torsionsradius, sei r. Man hat dann:

$$15)\quad \frac{1}{r} = \frac{\frac{1}{R}\frac{d}{ds}\frac{1}{T} - \frac{1}{T}\frac{d}{ds}\frac{1}{R}}{\frac{1}{R^2}+\frac{1}{T^2}} - S.$$

Die Cosinus der Winkel, welche die Tangente zur Curve mit den Coordinatenaxen bildet, sind:

$$x',\quad y',\quad z'.$$

Die Hauptnormale ist durch folgende Cosinus bestimmt:

$$\varrho x'',\quad \varrho y'',\quad \varrho z''.$$

Die Gerade, welche im Puncte (x, y, z) auf der Tangente und der Hauptnormalen senkrecht steht, welche die Binormale genannt wird, bildet mit den Axen der x, y und z Winkel, deren Cosinus folgende sind:

$$\varrho(y'z''-z'y''),\quad \varrho(z'x''-x'z''),\quad \varrho(x'y''-y'x'').$$

In diesen Ausdrücken sind x'', y'', z'' und ϱ durch die Gleichungen 11) und 14) bestimmt.

II.

Durch die Curve auf der Fläche werde ein System von Geraden gelegt, welche nach einem beliebigen Gesetze stetig auf einander folgen mögen, also eine windschiefe Fläche bilden. Hierzu ist nur nöthig, dass die Cosinus der Winkel f, g, h, welche die Gerade (Generatrix) durch den Punct (x, y, z) mit den Coordinatenaxen bildet, stetige Functionen von s sind. Bezeich-

net man durch ψ den Winkel, welchen die bemerkte Generatrix mit der Normalen zur Fläche bildet, ferner durch w den Winkel, welchen die Projection der Generatrix auf die berührende Ebene mit der Tangente zur gegebenen Curve einschliesst, so finden folgende Gleichungen statt:

$$1)\quad \begin{cases} \cos a\cos f+\cos b\cos g+\cos c\cos h=\cos\psi, \\ x'\cos f+y'\cos g+z'\cos h=\cos w\sin\psi, \\ (y'\cos c-z'\cos b)\cos f+(z'\cos a-x'\cos c)\cos g \\ +(x'\cos b-y'\cos a)\cos h=\sin w\sin\psi. \end{cases}$$

Mit Hülfe der in I. aufgestellten Formeln lassen sich die Differentialquotienten von $\cos f$, $\cos g$, $\cos h$ nach s darstellen, wobei ψ und w als Functionen von s anzusehen sind. Setzt man zur Vereinfachung:

$$2)\quad \begin{cases} p=(\frac{1}{T}-\frac{dw}{ds})\sin\psi-(\frac{\sin w}{R}+\frac{\cos w}{S})\cos\psi, \\ q=\frac{\cos w}{R}-\frac{\sin w}{S}-\frac{d\psi}{ds}, \end{cases}$$

so findet man:

$$3)\quad \begin{cases} x'\frac{d\cos f}{ds}+y'\frac{d\cos g}{ds}+z'\frac{d\cos h}{ds}= \\ -q\cos w\cos\psi+p\sin w, \\ \cos a\frac{d\cos f}{ds}+\cos b\frac{d\cos g}{ds}+\cos c\frac{d\cos h}{ds}=p\sin\psi, \\ (y'\cos c-z'\cos b)\frac{d\cos f}{ds}+(z'\cos a-x'\cos)\frac{d\cos g}{ds} \\ +(x'\cos b-y'\cos a)\frac{d\cos h}{ds}=-q\sin w\cos\psi-p\cos w. \end{cases}$$

Legt man durch die Projection der Generatrix auf die berührende Ebene und die Normale zur Fläche im Puncte (x, y, z) eine Ebene, so wird die Fläche in einer planen Curve geschnitten, deren Bogenelement durch ds_0 und deren Krümmungshalbmesser durch R_0 bezeichnet werde. Es ist dann:

$$\frac{dx}{ds_0} = x' \cos w + (y' \cos c - z' \cos b) \sin w,$$

$$\frac{dy}{ds_0} = y' \cos w + (z' \cos a - x' \cos c) \sin w,$$

$$\frac{dz}{ds_0} = z' \cos w + (x' \cos b - y' \cos a) \sin w.$$

Mittelst dieser Gleichungen lässt sich R_0 darstellen in Function von R, r', r'' und w, wenn man eine analoge Definition zu Grunde legt, wie die Gleichung 4) in I. für R. Die auszuführende Rechnung ist indessen ziemlich complicirt, man gelangt auf folgende Art rascher zum Ziele. Die Tangenten zu den Normalschnitten mit den Krümmungsradien R und R_0 schliessen den Winkel w ein. Analog der Gleichung 9) von I. hat man die beiden folgenden:

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2\varphi}{r'} + \frac{\sin^2\varphi}{r''} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r'} + \frac{1}{r''}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r''}\right)\cos 2\varphi,$$

$$\frac{1}{R_0} = \frac{\cos^2(\varphi - w)}{r'} + \frac{\sin^2(\varphi - w)}{r''} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r'} + \frac{1}{r''}\right)$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r''}\right)(\cos 2\varphi \cos 2w + \sin 2\varphi \sin 2w).$$

Aus diesen Gleichungen erhält man unmittelbar:

$$\frac{1}{R_0} - \frac{\cos w}{R} = \left(\frac{1}{r'} + \frac{1}{r''}\right)\sin^2 w + \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r''}\right)\sin\varphi\cos\varphi\sin 2w.$$

Unter Zuziehung der Gleichung 8) von I. folgt:

$$4) \quad \frac{1}{R_0} - \frac{\cos 2w}{R} = \left(\frac{1}{r'} + \frac{1}{r''}\right)\sin^2 w - \frac{\sin 2w}{S}.$$

Diese einfache Relation zwischen den Krümmungshalbmessern zweier Normalschnitte scheint bisher noch nicht bemerkt zu sein.

Sei (x_1, y_1, z_1) ein Punkt der windschiefen Fläche, auf der Generatrix bestimmt durch die Winkel f, g, h; ferner t seine Distanz vom Puncte (x, y, z) also:

$$5) \; x_1 = x + t\cos f, \; y_1 = y + t\cos g, \; z_1 = z + t\cos h.$$

Die Winkel, welche die Normale zur windschiefen Fläche mit den Coordinatenaxen im Puncte (x_1, y_1, z_1) bildet, seien a_1, b_1, c_1, ferner die die Hauptkrümmungshalbmesser in diesem Puncte derselben Fläche r''_1 und r''_1. Setzt man zur Abkürzung:

$$6) \quad M = p\,t + \sin w, \quad N = q\,t - \cos w\cos\psi,$$

so ist:

$$\cos a\cos a_1 + \cos b\cos b_1 + \cos c\cos c_1 = \frac{-M\sin\psi}{\sqrt{M^2+N^2}}$$

$$x'\cos a_1 + y'\cos b_1 + z'\cos c_1 =$$

$$\frac{M\cos\psi\cos w + N\sin w}{\sqrt{M^2+N^2}},$$

$$\begin{vmatrix} \cos a_1, & \cos b_1, & \cos c_1 \\ x', & y', & z' \\ \cos a, & \cos b, & \cos c \end{vmatrix} = \frac{M\cos\psi\sin w - N\cos w}{\sqrt{M^2+N^2}}.$$

Mittelst dieser Gleichungen findet man ferner:

7) $$\left[\frac{p\cos w\cos\psi + q\sin w}{M^2+N^2}\right]^2 = -\frac{1}{r'_1 r''_1}.$$

8) $$t\left(N\frac{dp}{ds} - M\frac{dq}{ds}\right)$$

$$-t(pM+qN)\left[\left(\frac{1}{T} - \frac{dw}{ds}\right)\cos\psi\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\sin w}{R} + \frac{\cos w}{S}\right)\sin\psi\right]$$

$$-\frac{M\cos\psi\sin w - N\cos w}{T} - \frac{M\sin\psi}{R}$$

$$+2(p\cos w\cos\psi + q\sin w)\sin\psi\cos w =$$

$$\left(\frac{1}{r'_1} + \frac{1}{r''_1}\right)(M^2+N^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Für $t=0$ reduciren sich diese Gleichungen auf:

9) $$\left(\frac{p\cos\psi\cos w + q\sin w}{\sin^2 w + \cos^2\psi\cos^2 w}\right)^2 = -\frac{1}{r'_1 r''_1}.$$

10) $$-\frac{\cos\psi}{T} - \frac{\sin\psi\sin w}{R}$$

$$+2(p\cos w\cos\psi+q\sin w)\sin\psi\cos w$$

$$=\left(\frac{1}{r'_1}+\frac{1}{r''_1}\right)(\sin^2 w+\cos^2\psi\cos^2 w)^{\frac{3}{2}}.$$

Durch die vorstehenden Gleichungen sind die Hauptkrümmungshalbmesser der windschiefen Fläche im Puncte (x, y, z) der gegebenen Curve bestimmt. Sieht man in den Gleichungen 5) t als Function von s an, so ist (x_1, y_1, z_1) ein Punct einer Curve auf der windschiefen Fläche. Für die Strictionslinie hat t folgenden Werth:

$$11) \qquad t=\frac{q\cos w\cos\psi-p\sin w}{p^2+q^2}.$$

Für diesen Werth von t giebt die Gleichung 7):

$$12) \qquad \left(\frac{p^2+q^2}{p\cos w\cos\psi+q\sin w}\right)^2=-\frac{1}{r'_1 r''_1}.$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen lassen sich leicht theils bekannte, theils neue Relationen herleiten. Die bemerkenswerthesten Fälle entsprechen folgenden besonderen Werthen von ψ und w. Für $\psi = 0$ ist die windschiefe Fläche gebildet aus den Normalen zur Fläche längs der gegebenen Curve. Dem Falle von $\cos\psi = 0$ entspricht eine windschiefe Fläche, welche der gegebenen Fläche längs der gegebenen Curve umschrieben ist. Für $w = 0$ liegen die Generatricen der windschiefen Fläche in der Ebene, welche die Tangente zur Curve und die Normale zur Fläche enthält. Für $\cos w = 0$ liegt die Generatrix in der Normalebene der gegebenen Curve, nimmt man:

$$\frac{\sin\psi}{R} \pm \frac{\cos\psi}{T} = 0,$$

so fällt die Generatrix mit den Hauptnormalen, für:

$$\frac{\sin\psi}{T} \pm \frac{\cos\psi}{R} = 0$$

fällt dieselbe mit der Binormalen der gegebenen Curve zusammen. Soll die Generatrix in der Krümmungsebene oder in der rectificirenden Ebene der gegebenen Curve liegen, so ist:

$$\frac{\cos\psi}{T} + \frac{\sin\psi\sin w}{R} = 0,$$

oder:

$$\frac{\cos\psi}{R} - \frac{\sin\psi\sin w}{T} = 0.$$

Nimmt man in der Gleichung 11) $\psi = 0$, so folgt nach 2):

$$t = \frac{\frac{1}{R}}{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{S^2}}.$$

Mittelst der Gleichung 10) von I. reducirt sich die vorstehende Gleichung auf:

13) $$\frac{1}{t} = \frac{r' + r'' - R}{r' r''}.$$

Mittelst dieser Relation lässt sich ein Satz allgemeiner auffassen, der sich auf pag. 307 in

Band V. der Mathematischen Annalen mitgetheilt findet. Längs der gegebenen Curve mögen sich zwei Flächen berühren. Für die zweite Fläche seien im Puncte (x, y, z) $r'_0 r''_0$ die beiden Hauptkrümmungshalbmesser. Da sich beide Flächen berühren, so haben für die zweite Fläche t und R genau dieselben Bedeutungen und Werthe wie für die erste Fläche. Analog wie 13) ist dann:

$$\frac{1}{t} = \frac{r'_0 + r''_0 - R}{r'_0 r''_0}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung mit der rechten Seite der Gleichung 13) verglichen führt zu einem allgemeinen Theorem in Beziehung auf den Contact zweier Flächen längs einer Curve.

Geht die windschiefe Fläche in eine developpabele Fläche über, so ist nach 7):

$$14) \qquad p \cos w \cos \psi + q \sin w = 0.$$

Ist die developpabele Fläche umschrieben, also $\cos \psi = 0$, so ist $q \sin w = 0$. Der Fall $w = 0$ entspricht der Tangentenfläche der gegebenen Curve. Nimmt man $q = 0$, so ist nach 2):

$$15) \qquad \frac{\cos w}{R} - \frac{\sin w}{S} = 0.$$

Bezeichnet man den endlichen Hauptkrümmungshalbmesser der developpabelen Fläche im Puncte (x, y, z) der Curve durch r'_1, so geht die Gleichung 10) für $\cos \psi = 0$, $\sin \psi = -1$, $q = 0$ und $r''_1 = \infty$:

Für $w = 0$ geben die Gleichungen 2), 9) und 10):

$$\left(\frac{\operatorname{tang}\psi}{T} - \frac{1}{S}\right)^2 = -\frac{1}{r'_1 r''_1},$$

$$\left(\frac{\operatorname{tang}\psi}{T} - \frac{1}{S}\right)^2 - \frac{1}{T^2} - \frac{1}{S^2} = \frac{1}{T}\left(\frac{1}{r'_1} + \frac{1}{r''_1}\right).$$

folglich:

$$\frac{1}{S^2} = -\left(\frac{1}{T} + \frac{1}{r'_1}\right)\left(\frac{1}{T} + \frac{1}{r''_1}\right).$$

Setzt man den Werth von T aus 11) in 6) und 7), so folgt:

$$\left(\frac{p^2 + q^2}{p\cos w\cos\psi + q\sin w}\right)^2 = -\frac{1}{r'_1 r''_1}.$$

Durch diese Gleichung ist das Krümmungsmaass der windschiefen Fläche in dem Puncte (x_1, y_1, z_1) der Strictionslinie bestimmt, welcher dem Puncte (x, y, z) entspricht. Der Kürze halber sollen einige naheliegende Consequenzen, welche sich aus der vorstehenden Gleichung ziehen lassen, hier übergangen werden.

Ist die Curve auf der Fläche selbst Strictionslinie der windschiefen Fläche bestimmt durch die Gleichungen 5), so verschwindet die rechte Seite der Gleichung 11). Mit Rücksicht auf die Werthe von p und q aus 2) erhält man die folgende Bedingungsgleichung:

18) $$\left(\frac{1}{R} - \cos w\frac{d\psi}{ds}\right)\cos\psi = \left(\frac{1}{T} - \frac{dw}{ds}\right)\sin w\sin\psi.$$

Diese Gleichung führt in folgenden Fällen zu sehr einfachen Resultaten. Ist die windschiefe Fläche aus den Normalen zur gegebenen Fläche längs der Curve gebildet, so hat man $\psi = 0$. Nach 18) ist dann $R = \infty$, d. h. die Curve auf der Fläche ist eine asymptotische Linie. Berührt die windschiefe Fläche die gegebene Fläche, so hat man $\cos\psi = 0$. Sieht man von $w = 0$ ab, d. h. von der Tangentenfläche der gegebenen Curve, so ist:

$$19) \qquad \frac{1}{T} - \frac{dw}{ds} = 0,$$

oder nach der Gleichung 6) von I. ist $dw = d\sigma$. Für $w = 0$ reducirt sich die Gleichung 18) auf:

$$20) \qquad \frac{1}{R} - \frac{d\psi}{ds} = 0.$$

Für $\cos w = 0$ ist:

$$\frac{\cos\psi}{R} = \pm\frac{\sin\psi}{T}.$$

Die windschiefe Fläche ist in diesem Falle aus den Binormalen der gegebenen Curve gebildet. Nimmt man allgemeiner die Generatricen in den rectificirenden Ebenen der gegebenen Curve an, so ist:

$$\frac{\cos\psi}{R} = \frac{\sin w \sin\psi}{T}.$$

Die Gleichung 18) reducirt sich dann auf:

$$\cos w \cos\psi \frac{d\psi}{ds} = \sin w \sin\psi \frac{dw}{ds}$$

d. h. $\cos w \sin\psi = k$, wo k eine Constante bedeutet. Die Gleichungen 19) und 20) geben noch besondere Sätze, wenn T und R keine

endlichen Werthe haben. Nimmt man z. B. in 19) $T = \infty$, so ist w constant. Es folgt hieraus:

Die Geraden, welche in den berührenden Ebenen längs einer geodätischen Linie einer Fläche liegen und mit der geodätischen Linie einen constanten Winkel einschliessen, bilden eine windschiefe Fläche, deren Strictionslinie die geodätische Linie ist.

Zu einem ähnlichen Satze giebt die Gleichung 20) Veranlassung. Für eine orthogonale Trajectorie der Generatricen der windschiefen Fläche ist in den Gleichungen 5) t bestimmt durch:

$$21) \qquad \frac{dt}{ds} + \cos w \,.\, \sin \psi = 0.$$

Ist die Curve selbst orthogonale Trajectorie, so ist $\psi = 0$ oder $\cos w = 0$. Der zweite Fall, welcher besagt, dass die Generatricen in der Normalebene der Curve liegen müssen, schliesst den ersten Fall ein, wenn nämlich die Generatricen die Normalen zur Fläche längs der gegebenen Curve sind.

Sind die Generatricen die Hauptnormalen der orthogonalen Trajectorie, so muss neben der Gleichung 21) nach einem bekannten Theorem noch eine Gleichung stattfinden, welche ausdrückt, dass in jedem Puncte der orthogonalen Trajectorie die Summa der Hauptkrümmungshalbmesser der windschiefen Fläche verschwindet. In der Gleichung 8) muss die linke Seite verschwinden. Man gelangt einfacher zu der bemerkten Bedingungsgleichung mittelst der Gleichungen 5) und 21). Es ergeben sich dann folgende Gleichungen:

$$\frac{dx_1}{ds}\cos a + \frac{dy_1}{ds}\cos b + \frac{dz_1}{ds}\cos c = N \sin \psi,$$

$$\frac{dx_1}{ds}\cdot x' + \frac{dy_1}{ds}y' + \frac{dz_1}{ds}\cdot z' =$$
$$-N\cos\psi\cos w + M\sin w.$$

$$\begin{vmatrix} \frac{dx_1}{ds} & \frac{dy_1}{ds} & \frac{dz_1}{ds} \\ x' & y' & z' \\ \cos a & \cos b & \cos c \end{vmatrix} =$$
$$-N\cos\psi\sin w - M\cos w.$$

Durch weitere Bildung der zweiten Differentialquotienten von x_1, y_1, z_1 nach s ergiebt sich als gesuchte Bedingung:

$$\left(\frac{1}{T} - \frac{dw}{ds}\right)\cos\psi + \left(\frac{\sin w}{R} + \frac{1}{S}\cos w\right)\sin\psi$$
$$+ \frac{M\frac{dN}{ds} - N\frac{dM}{ds}}{M^2 + N^2} = 0.$$

Für $\psi = 0$ reducirt sich diese Gleichung mittelst der Gleichungen 2) und 6) auf:

$$\frac{\left(1-\frac{t}{R}\right)\frac{d}{ds}\frac{t}{S} - \frac{t}{S}\frac{d}{ds}\left(1-\frac{t}{R}\right)}{\left(1-\frac{t}{R}\right)^2 + \left(\frac{t}{S}\right)^2} = \frac{1}{T}.$$

Mit Rücksicht auf die Gleichung 6) von I. folgt durch Integration:

$$\frac{t}{S} = \left(1-\frac{t}{R}\right)\operatorname{tang}(\sigma - \tau),$$

wo t und τ Constanten sind.

Sind die Generatricen die Binormalen der orthogonalen Trajectorie, so findet man aus:

$$\frac{d^2x_1}{ds^2}\cos f + \frac{d^2y_1}{ds^2}\cos g + \frac{d^2z_1}{ds^2}\cos h = 0$$

die einfache Bedingung $pM + qN = 0$ d. i.:

22) $(p^2+q^2)t + p\sin w - q\cos w\cos\psi = 0,$

wo t durch die Bedingung 21) bestimmt ist. Die Gleichung 22) enthält gleichzeitig die Bedingung, dass die Generatricen der windschiefen Fläche von ihrer Strictionslinie orthogonal geschnitten werden. Für $\psi = 0$, geben die Gleichungen 2), 21) und 22):

$$\frac{d}{ds}\frac{\frac{1}{R}}{\frac{1}{R^2}+\frac{1}{S^2}} = 0$$

oder auch:

23) $$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{r'}+\frac{1}{r''}-\frac{R}{r'r''}\right) = 0.$$

Sieht man die Coordinaten eines Punctes ei-Fläche als Functionen zweier Variabeln u und v an, so giebt die weitere Ausführung der Gleichung 23) eine Differentialgleichung zwischen u und v, durch welche eine Curve der Art bestimmt ist, dass die Normalen längs derselben eine windschiefe Fläche mit orthogonaler Strictionslinie bilden.

Eine weitere Ausführung der Gleichung 23), welche im allgemeinen Falle etwas complicirt ist, soll den Gegenstand einer folgenden Mittheilung bilden.

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

10. December. № 29. 1873.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Oeffentliche Sitzung am 6. December.

Ewald, über den sogenannten orientalischen Redeschwulst.
Benfey, Einleitung in die Grammatik der vedischen Sprache. (Erscheint in den Abhandlungen).
Reinke, über die Function der Blätterzähne und die morphologische Werthigkeit einiger Laubblatt-Nectarien. (Vorgelegt von Wöhler).

Am heutigen Tage feierte die K. Gesellschaft d. W. ihren Stiftungstag zum zwei und zwanzigsten Mal in dem zweiten Jahrhundert ihres Bestehens. Nachdem die obigen Vorträge gehalten waren, erstattete der Secretair den folgenden Bericht:

Das unter den drei ältesten Mitgliedern der K. Societät jährlich wechselnde Directorium ist zu Michaelis d. J. von dem Hrn. W. Weber in der mathematischen Classe auf Hrn. H. Ewald in der historisch-philologischen Classe übergegangen.

Von ihren Ehrenmitgliedern verlor die K. Societät in diesem Jahre durch den Tod:

Den Präsidenten der K. K. Akademie d. Wiss.

Lpz 741

in Wien Theodor Georg von Karajan. Er starb am 28. April im 64. Lebensjahre.

Von ihren auswärtigen Mitgliedern verlor sie

den Vorstand der K. Akademie der Wiss. in München Justus von Liebig. Er starb am 18. April im 70. J.;

den Geheimen Regierungsrath Gustav Rose, Professor der Mineralogie in Berlin, gestorben am 15. Juli im 76. J.;

den Professor der Mathematik Christoph Hansteen in Christiania, gestorben am 15. April, im 89. J.;

den Geheimen Bergrath Carl Friedrich Naumann in Dresden, früher Professor der Mineralogie in Leipzig, gestorben am 26. November im 77. J.;

den Professor der Physik August De la Rive in Genf, gestorben am 27. November im 72. J.;

den Oberbibliothekar Christoph Friedrich von Stälin in Stuttgart, gestorben am 12. August im 68. J.

Von ihren Correspondenten verlor die Societät

den Oberbergrath August Breithaupt, Professor der Mineralogie in Freiberg, gestorben am 22. September im 83. J.;

den Kabinetsrath Ihr. Majestät der Kaiserin Augusta Dr. Johannes Brandis in Berlin, gestorben am 8. Juli im 43. J.

Einem Rufe nach Wien folgend ist Hr. Professor C. Claus aus der Reihe der hiesigen ordentl. Mitglieder ausgeschieden.

Die von der K. Societät neu erwählten Mitglieder sind folgende:

Zu Ehrenmitgliedern wurden erwählt:

Hr. Joachim Barrande in Prag,

Hr. Giuseppe Fiorelli in Neapel.

Zu auswärtigen Mitgliedern:

Hr. Eduard Frankland in London,

Hr. Otto Hesse in München. Zuvor Corresp. seit 1856.

Zu Correspondenten:

Hr. Jean Servais Stas in Brüssel.

Hr. C. A. Bjerknes in Christiania.

Hr. J. Thomae in Halle.

Zum Assessor in der mathematischen Classe:

Hr. Dr. B. Minnigerode.

Bezüglich der für dieses Jahr von der mathematischen Classe gestellten Preisfrage ist zu berichten, dass sie keinen Bearbeiter gefunden hat.

Für die nächsten 3 Jahre werden von der K. Societät folgende Preisaufgaben gestellt:

Für den November 1874 von der historisch-philologischen Classe:

Für die weitere Fortbildung der Sprachwissenschaft sind jetzt zwei Momente von besonderer Erheblichkeit. Zunächst gilt es das Spiel und die Wechselwirkung der sprachschaffenden und -entwickelnden Kräfte, deren Wirkungen in der Analyse der alten erstorbenen Sprachen erkannt sind, in den lebendigen Sprachen zur vollen Anschauung zu bringen. Dazu werden diejenigen lebenden Sprachen die besten Dienste leisten, welche mit alten, sorgfältig durchforschten, eng verwandt sind. Ferner gilt es seine ganze Auf-

merksamkeit auf die Erforschung des Verhältnisses zu wenden, in welchem die Sprachen eines Astes, oder Stammes, zu einander stehen, was sie von der ihnen zunächst zu Grunde liegenden Sprache bewahrt, was eingebüsst, was neugestaltet, welchen Mitteln und Einflüssen diese Neugestaltungen verdankt werden, mit einem Worte: was allen Sprachen eines Astes, den Aesten eines Stammes, gemeinsam und was den besonderten besonders eigen sei, was auf dem Grunde der gemeinsamen Unterlage die besondre Eigenthümlichkeit der Aeste und ihrer Sprachen bilde. Dadurch wird es möglich zu bestimmen, welche Stelle jede der besonderten Sprachen in dem Sprachkreis einnimmt, zu welchem sie gehört.

Zu derartigen Forschungen scheint die Sprache der Kurden besonders geeignet zu sein. Sie ist mit den übrigen eranischen Sprachen so eng verschwistert, dass sie nicht allein fähig ist, Licht von ihnen zu empfangen, sondern auch auf sie zurückzuwerfen; zugleich wird es möglich sein durch eingehende Vergleichung mit den verwandten Sprachen die Stelle zu bestimmen, welche sie im Kreise derselben einzunehmen berechtigt ist.

Diese Erwägungen haben die Königl. Ges. d. Wiss. bewogen, aufzufordern zu der Bearbeitung einer:

Grammatik der Kurdischen Sprache in Vergleich mit dem Altbactrischen und den persischen Sprachen (dem Altpersischen der Keilinschriften, dem Mittelpersischen [Pâzendischen] und Neupersischen sammt dessen schon bekannten Dialekten), insbesondre um die Stellung derselben im eranischen Sprachkreise genauer zu be-

stimmen. Gewünscht wird auch die Berücksichtigung des Armenischen, doch wird diess nicht als unumgänglich gefordert.

Für den November 1875 von der physikalischen Classe:

Um der Lösung der Frage näher zu kommen, unter welchen Bedingungen die in den Erzgängen vorkommenden krystallisirten Schwefel- und Fluor-Verbindungen entstanden sind, wünscht die K. Societät über die künstliche Darstellung solcher krystallisirter Mineralien, wie lichtes und dunkles Rothgiltigerz, Sprödglaserz, Fahlerz, Bleiglanz, Flussspath, Versuche angestellt zu sehen.

Für den November 1876 von der mathematischen Classe:

Nachdem die von Siemens dargestellten Widerstandsmaasse und Widerstandsskalen allgemeinere Verbreitung und Anwendung gefunden, und dieselben von Kohlrausch mit grosser Sorgfalt und Genauigkeit auf absolutes Maass zurückgeführt worden sind (siehe Poggendorffs Annalen 1873. Supplementband VI), ist es möglich geworden, auch die Stromarbeit nach absolutem Maasse genau zu bestimmen.

Die Königliche Societät verlangt nun eine Untersuchung über Stromarbeit, d. i. über die von den elektromotorischen Kräften durch ihre Wirkung auf die strömende Elektricität geleistete Arbeit, insbesondre über das Verhältniss und den Zusammenhang derselben mit der vom Strome erzeugten Wärme, und über die von ihr unmittelbar in der strömenden Elektricität oder mittelbar in andern im Leiter enthaltenen beweglichen Theilchen erzeugte lebendige Kraft.

Die Concurrenzschriften müssen vor Ablauf des September der bestimmten Jahre an die K. Gesellschaft der Wissenschaften portofrei eingesandt sein, begleitet von einem versiegelten Zettel, welcher den Namen und Wohnort des Verfassers enthält und auswendig mit dem Motto zu versehen ist, welches auf dem Titel der Schrift steht.

Der für jede dieser Aufgaben ausgesetzte Preis beträgt funfzig Ducaten.

Ueber den sogenannten Orientalischen Redeschwulst.

Von

H. Ewald.

Am vorigen Jahreswechsel unserer K. Ges. der Wissenschaften trug ich eine längere Abhandlung vor »zur Zerstreuung der Vorurtheile über das alte und, neue Morgenland«: doch konnte schon diese Ueberschrift welche ich ihr gab, dárauf hinweisen dass es nicht meine Absicht war alle solche Vorurtheile ohne Ausnahme in ihr zu widerlegen. Die Menge solcher Vorurtheile wie sie sich seit langen Zeiten unter uns angesammelt und, was man früher am wenigsten hätte erwarten sollen, in der neuesten Zeit sich statt gemindert nur vermehrt haben, ist in der That só gross, ihre Bedeutung só weittragend und ihre Wucht só schwer, dass man unmöglich auch in einer längeren Abhandlung sie alle berühren und hinreichend widerlegen kann. Es kann vorläufig genügen damit einen richtigen Anfang zu machen: und einige

der am weitesten verbreiteten und schädlichsten Vorurtheile sind dort so widerlegt dass man darauf zurückzukommen wie ich hoffe nicht nöthig hat. Wenn ich nun heute einen kleinen Nachtrag dazu gebe indem ich das Vorurtheil über den sogenannten Orientalischen Redeschwulst in Betracht ziehe, so veranlasst mich zunächst dazu eine besondere Erfahrung welche ich im Laufe dieses Jahres zu erleben hatte.

Als nämlich diesen Sommer in der 57sten Sitzung des Reichstages zu Berlin ein mit Persien abgeschlossener Freundschafts-, Handels- und Schiffahrtsvertrag in Französischer und Deutscher Sprache zur Berathung gelangte, hatte niemand bemerkt wie völlig unpassend ja unsinnig der Persische Herrscher in ihm bloss nach dem Missverstande eines Persischen Ausdruckes »Kaiser der Kaiser« genannt ward. Diese Uebersetzung des Persischen war ursprünglich von der St. Petersburger Diplomatie ausgegangen, dann von dort der Berliner zugekommen, und hatte hier mehrere Tage dem Reichstage vorgelegen ohne dass entweder in St. Petersburg oder in Berlin irgend einer der Diplomaten und Gelehrten daran Anstoss genommen hatte; später erfuhr ich dass die unrichtige Uebersetzung auch zu Paris in hohen Staatsacten gebraucht war. Wenn die Persischen Gelehrten und Diplomaten in Teherân und St. Petersburg daran keinen Anstoss genommen hatten, so ist das leicht zu entschuldigen: sie verstehen von den heutigen Europäischen Dingen und Sprachen und Ausdrücken noch immer viel zu wenig. Wenn aber unsre Gelehrten und Diplomaten darüber so glatt weggehen, so können sie es nur thun weil sie meinen das sei Orientalischer Redeschwulst, und den müsse man als etwas ganz

bekanntes überall ertragen wo er sich finde. Indessen fand ich es doch eines Reichstages in welchem Deutsche Gelehrte sitzen unwürdig so hohen Unsinn zu ertragen und berichtigte in öffentlicher Sitzung die Sache [1]), hatte nun aber ein neues Beispiel welche ungeheure Vorurtheile wie sonst über das Morgenland so insbesondere über das noch immer herrschen was man den Orientalischen Schwulst nennt und ihm zutrauen zu dürfen meint. Nicht einmahl soviel Ueberlegung zeigte sich dass, wenn auch sonst genug viele schwülstige Wortmacher im Morgenlande seyn mögen, doch der seit Jahrtausenden feststehende Name eines Herrschers selbst nicht unsinnig seyn könne.

Schwulst grenzt in menschlicher Rede an Unsinn, und ist dies bisweilen wirklich: das schlimmste ist aber wenn man diesen oder jenen da sieht wo er gar nicht ist, oder wenn man etwas so Tadelswerthes als Schwulst der Rede mit recht gilt bloss deswegen fremden Völkern und Ländern zuschiebt weil man diese für schlecht genug dazu, sich selbst aber für zu gut dazu hält. Wer nun das alte und neue Morgenland ebenso wohl wie unser altes und neues Schriftthum in Europa kennt, der begreift dass Schwulst der Rede mit allen übrigen Auswüchsen und Fehlern das gemein hat dass er weder aus einem Volke noch aus einem Lande sondern aus Ursachen entspringt die in jedem Volke und Lande ganz gleichmässig wiederkehren können und schon oft wiedergekehrt sind. Will man aber

1) Vgl. die Stenogr. Berichte der Verhandlungen des D. Rs. 1873 S. 1264 f. und 1308. Was Herr Schleiden mir dort erwiederte, zeigt nur wie tief eingerostet in Deutschland das Vorurtheil ist von dem ich hier rede.

begreifen wie dieses Vorurtheil entstehen und sich so zähe erhalten konnte, so müssen wir die eben erwähnten Ursachen mit der Geschichte der gesammten Redekünste und des Schriftthumes in den Völkern des weiten Morgenlandes zusammen halten.

Schwulst der Rede kann wol unter den ersten Anfängen und Versuchen des Schriftthumes bei einem Volke sich zeigen, wenn es das schöne Mass in jeder Art von Rede zu finden noch nicht gelernt hat. Dies wäre einst bei allen den ältesten Völkern des Morgenlandes um so leichter möglich gewesen, je mehr sie nicht so wie die Europäischen schon von viel früher ausgebildeten Völkern zu lernen hatten sondern selbst alles erfinden mussten. Sollte es nun bei den Morgenländischen Völkern solche uralte schwülstige Reden und Schriften wirklich gegeben haben, so müssten sie früh untergegangen seyn: allein da man in den ältesten Zeiten nur das Nothwendigste schrieb, so ist sogar diese Vorstellung unwahrscheinlich. In der That zeigen uns die ältesten Schriften welche sich bei allen diesen Völkern erhalten haben, vielmehr die höchste Einfachheit und Geradheit der Rede, wenn man nur nicht manches Zeichen überschwellender Jugend in der Rede für Schwulst hält. Man nehme die ältesten Aegyptischen, Hebräischen, Indischen, Sinesischen Schriften: nirgends wird man in ihnen das finden was wir Schwulst nennen. Viele unsrer heutigen sei es das Ungerade Schiefe Schillernde oder auch das Schwülstige Uebertreibende oder auch das Kriechende der Rede liebenden Redner und Schriftsteller könnten wahrhaft gesunden, wenn sie sich jene ältesten Morgenländischen Stücke zum Vorbilde nehmen wollten. — Oder nehmen wir die ältesten grossen

Stücke Arabischer Rede, welche von jenen dárin sehr verschieden sind dass sie erst den lezten Jahrhunderten vor dem Entstehen des Islâm's und den Geburtszeiten dieses selbst entstammen: wie weit liegen diese Zeiten von dem hohen Alterthume ab welches uns den Ursprung jener frühesten Schriftthümer des ganzen Menschengeschlechts aufschliesst! Und doch treffen wir bei diesen ältesten Stücken Arabischer Rede, obgleich es nur Lieder und der Qor'ân damit aber Stoffe sind welche leicht auch im Ausdrucke allerlei Ueberschwängliches und Massloses enthalten könnten, nirgends auf Schwulst der Rede! Der eine jener ältesten Dichter ist allerdings einfacher und nüchterner als der andere; und die späteren Stücke des Qor'ân's zeigen einen mehr in den einmahl gegebenen Weg eingezwängten schwerfälligen als einen freien Redefluss. Allein von dem was wir mit recht Schwulst nennen, ist da kein wirklicher Anfang. Beachten wir vielmehr näher wo und wie sich dieses Stelzengehen der menschlichen Rede im Morgenlande deutlich zu erkennen gebe, so können wir den sichersten geschichtlichen Zeugnissen nach nur folgendes sagen.

Eine nächste Veranlassung zum Ausbilden schwülstiger Rede liegt in der verkehrten Anwendung einer zuerst aus reiner und unschuldiger Begeisterung hervorgegangenen Redeweise höheren Schwunges. Es gibt solche Redeweisen: sie bilden sich zunächst ganz aus dem freien Zuge des Geistes und seiner Schöpferkraft: aber haben sie einmal in einem Volke oder einer sonstigen Gemeinschaft den Zauber eines hohen Ansehens erlangt, so werden sie nur zu leicht künstlich wiederholt und dahin übergetragen wohin sie nicht gehören. Dieser Anlass zur

Ausbildung schwülstiger Rede und zur Liebe für sie hat nun freilich im Morgenlande nirgends so verhängnissvoll eingewirkt als im Islâm, weil der Qor'ân mit seiner hohen Rede allein das Vorbild der Rede für ihn wurde. Es muss schon sehr einseitig und schädlich wirken wenn die besonderen Farben der Redeweise nur eines Menschen zur allgemeinen Vorbilde werden sollen, wie hier die Muhammeds im Qor'ân'e: wieviel grösser muss die Einseitigkeit werden wenn diese dann von einem Gebiete der Rede wo sie ganz passend ist, auf alle andern so weit es nur geht übergetragen wird! Aber im Islâm hat sich eine solche zwischen der dichterischen und gemeinen in der Mitte schwebende und leicht immer in jene übergehende Redeweise aufs Kunstvollste ausgebildet, welche sich überall einzudrängen sucht und mit ihrem verführerischen Reize noch heute dort gewaltig nachwirkt. Sie machte sich im Islâm umso beliebter, je übernüchterner er sonst ist: aber der Schwulst der Rede dessen Wesen Aufbauschung und Aufschwellung am unnöthigen und unpassenden Orte ist, liegt hier überall nahe. Wenn z. B. Ibn-'Arabschâh in seinem Werke „Geschenk für hohe Fürsten" welches als eine Art von Fürstenspiegel an sich wol eine höhere Sprache duldet, auch die einfach geschichtlichen Stücke, oder wenn er gar seine Geschichte Timûrs rein in dieser höhern Sprache abfasst, so kann man die hohe Kunst der Rede dabei bewundern, ihr Schwulst aber liegt da überall in dichten Haufen vor. Dennoch ist dieses Stelzengehen in allen Islâmischen Schriftthümern, auch in dem Persischen, Türkischen und Indischen sehr gewöhnlich geworden: auch bei Werken deren Inhalt es am wenigsten verträgt, sucht man gerne wenigstens die Worte

der Vorrede zu ihm hinaufzuschwindeln, und nur sehr wenige Bücher hielten sich ganz frei davon. Ja aus dem Islâmischen Schriftthume ist diese hochrothe Farbe dann auch in Bücher der äthiopischen Christen eingedrungen.

Ein ganz anderer Anlass zum Redeschwulste entspringt aus der öffentlichen Rede wie sie bei den Alten vor den Gerichten oder in den Volksversammlungen zu führen war. Hier wurde die wirkliche oder in vielen Zeiten die bloss scheinbare öffentliche Freiheit missbraucht um durch allerlei üble Redekünste und vorzüglich auch durch schwülstige Schmeicheleien die Richter und Fürsten zu überreden. Aber in jenen Zeiten wo die Griechen u. Römer im Morgenlande herrschten, verbreitete sich die Lust an diesen Künsten vielmehr von jenen zu diesem hin: und es ist denkwürdig genug dass ein kleines Beispiel von diesem Schwulste sogar in die Apostelgeschichte des N. Ts. [1]) gekommen ist, selbstverständlich nicht zum Vorbilde sondern zur Kennzeichnung dieser Entartung. Aber auch schon im Alexandrinischen Zeitalter nahm diese schwülstige Redeweise sehr zu und drang von dort her z. B. in den Hauptttheil des zweiten Makkabäerbuches ein.

Einen dritten Anlass zu diesem Missbrauche des menschlichen Wortes giebt die Willkürherrschaft, wenn sie in einer Zeit und einem Volke übermächtig wird und die Schmeichelei der Menschen begünstigt. Zerstreut trat das nun zwar im Morgenlande ebenso wie im Abendlande schon in den Jahrhunderten um Chr. Geb. ein:

1) AG. 24, 3 f. Man muss diese Rede jedoch im Griechischen selbst lesen, und beachten wie weit sie von aller übrigen Sprachfarbe der AG. und von der Wahrheit selbst absticht.

aber auch hier ist wiederum erst im Islâm aus den in meiner grössern Abhandlung erörterten Ursachen seit vielen Jahrhunderten jene und mit ihr die schwülstige Rede so eingerissen dass sie noch heute dort unvertilgbar scheint. Doch beachtet man zu wenig dass die höfische Rede, je schwülstiger sie auf ihren Stelzen einhertritt, desto sorgfältiger sich hüten muss in solchen reinen Unsinn zu fallen vor welchem ein gemeiner Schriftsteller sich weit weniger zu hüten braucht. Von Stelzen herabzufallen ist an gewissen Stellen nur zu schmerzlich: und keine Rede muss sich so sehr wie die höfische davor hüten. Wirklich ist mancher solcher Ausdrücke der uns in solchen Reden und Schriften überaus schwülstig ja sinnlos scheint, näher betrachtet gar nicht so schlimm. Die z. B. von der Astrologie entlehnten Bilder sind bei uns seit zweihundert Jahren immer seltener geworden, im Morgenlande dagegen noch sehr beliebt: führt man sie aber auf ihren wirklichen Sinn zurück, so wird man bei uns in der höfischen Redeweise vieles finden was obwohl ohne den Schmuck Astrologischer Bilder hingestellt doch dem Sinne nach durchaus ebenso schwülstig ist; und es zeigt sich dass vieles bei uns nur deswegen für unerträglich gehalten wird weil es in anderen Bildern erscheint als die wir heute unter uns gewohnt sind. Wirklichen Unsinn wird auch die blumigste Rede einer Morgenländischen Staatsschrift heute nicht enthalten.

Hiermit sind wir denn auf die Behauptung zurückgekommen von welcher wir oben ausgingen. Schwülstige Rede findet sich leider auch bei uns noch immer nur zu häufig: aber sie dem Morgenlande im allgemeinen als eine Eigenthümlichkeit zuzuschreiben, ist so verkehrt als möglich. Man kann nur behaupten sie sei

dort durch den mächtigen Einfluss des Islâm's, je länger dieser dauert, desto weiter und desto schädlicher ausgebildet.

Aber dieses Vorurtheil hat uns, seitdem es in neueren Zeiten die Geister ganz überwältigt hat, nach einer besonderen Seite hin bereits so ungemein geschadet dass vor diesem wirklichen grossen Schaden jene kleine Erfahrung von welcher ich eben ausging ganz verschwindet; und gerne gestehe ich dass ich jene kaum berührt hätte, gäbe sie mir nicht eine gerechte Veranlassung diesen unvergleichlich schwereren Schaden zu erwähnen welcher wie ein verheerender Sturm in alle unsere heutige Bildung eingedrungen ist. Klebt dem Morgenlande überhaupt die unüberwindliche Lust und Liebe zum Schwulste an, so muss dieser Vorwurf ja auch die Bibel treffen: und dieser Einbildung überliess man sich um so lieber, je mehr in neueren Zeiten sonst schon so vielerlei böse Antriebe herrschend wurden an deren Ansehen zu zerren und ihre Hoheit zu erniedrigen. Stiess man auf irgend etwas in der Bibel was dem oberflächlichen Denken zu seltsam und dem sinnlichen Begehren zu hinderlich war: sogleich war man mit der Ausflucht bei der Hand das sei Orientalisch, also schwülstig, also unsinnig! Was hat man nun unter diesem Vorwande nicht aus ihr als sei es unsinnig ausstreichen wollen, und wie verdächtigten nun viele das Beste in ihr! Das Schlimmste ist dabei dass auch ganze lange Reihen von Bibelerklärern und Theologen von diesem gelehrten Wahne angesteckt wurden; und leider sind so viele auch der neuesten Gelehrten sogar beim Herausgeben der Biblischen Schriften und der Feststellung ihres Wortgefüges von dieser Verirrung noch nicht befreit. Denn nimmt man einmahl án die Sprache

der Bibel sei als eine Orientalische schwülstig, was höchstens ausnahmsweise wie bei dem zweiten Makkabäerbuche richtig ist, so löst man sich schon dadurch von der Verbindlichkeit in ihr von Grund aus überall einen gesunden Sinn zu suchen: und wie weit kann das führen! Man sollte daher sogar bei der Herausgabe und Erklärung der Apokryphen des A. T. hierin viel vorsichtiger verfahren. Es erschien z. B. erst so eben 1871 zu Leipzig eine neue vielfach vermehrte und mit mancherlei Erläuterungen bereicherte Ausgabe dieser Bücher von einem mit der Untersuchung der LXX (wozu ja auch diese Apokryphen gehören) früher vielbeschäftigten Gelehrten [1]). Man sehe nun wie der Herausgeber die Worte Sir. 48, 8—10 herausgibt und demnach auch erklären muss, um zu begreifen dass höchstens ein schwülstiger oder vielmehr ein ganz stumpf denkender Mann so schreiben konnte wie jene Worte hier gedruckt sind.

Uebrigens würde dies Vorurtheil, sollte es begründet sein, nothwendig voraussetzen dass die Völker des Morgenlandes immer nur mit einer sehr geringen Gabe von Urtheilskraft begabt gewesen und das noch seien. Das mag vielen der heutigen Europäer schmeicheln, welche ja überhaupt die entfernter wohnenden Völker nicht genug als Leute geringeren Geistes sich

1) Libri apocryphi Veteris Testamenti graece. Recensuit et cum commentario critico edidit Otto Fridolinus Fritzsche. Accedunt libri Veteris Testamenti pseudepigraphi selecti. Lipsiae, F. A. Brockhaus, 1871. Wir führen dieses neue werk auch deswegen hier an weil seiner in den Gel. Anzeigen nicht gedacht ist. Der Herausgeber hat auch die Lehrbücher dieser Sammlung in dichterische Zeilen abgetheilt: allein ob dabei nach richtigen Grundsätzen verfahren sei, ist sehr die Frage: wie sogar die oben erläuterte Stelle beispielsweise beweisen kann.

denken mögen: sodass es nur auffallend ist warum sie sich denn noch immer soviel mit ihnen beschäftigen wollen. Allein könnte uns nicht Alles was wir genauer wissen von dem Gegentheile überzeugen, so würde schon eins was ganz unmittelbar hierher gehört uns auf gesundere Ansichten bringen müssen. Wir wissen nämlich dass unter jenen Völkern einst auch eine solche Wissenschaft blühete wie die welche wir heute Aesthetik nennen: und sie blühete dort unter den Arabern und Indern weit früher als irgend jemand bei uns daran dachte sie zu gründen. Schon dieses kann beweisen dass sie sehr wohl wussten was eine schwülstige und nicht schwülstige Rede sei. Solche Morgenländische Aesthetiker sind unter uns nur noch immer zu wenig allgemein bekannt und wohlgeschätzt, obwohl sie das in vieler Hinsicht verdienten.

Um die obengenannte Stelle im Sirachbuche hier anhangsweise etwas näher zu erläutern, ist es schon bei dem ersten Worte auffallend dass der neueste Herausgeber Ἰεζεκίηλος lesen will: denn Fl. Josephos liebte es zwar zu seiner Zeit, weil er seine Werke zunächst für Griechisch-Römische Leser bestimmte, alle die biblischen Namen in ein solches Griechisch-Römisches Gewand sauber einzukleiden, die früheren Hellenistischen Schriftsteller aber sind darin noch viel einfacher; und unsere Griechische Uebersetzung des Sirachbuches entstammt noch dem zweiten Jahrh. vor Chr. Das Schlimmste ist aber dabei dass diese Gestalt des Namens sich in keiner Handschrift findet und das Wörtchen ὅς nach dem richtigen Sinne des ganzen langen Sazes vielmehr einen bezüglichen Saz einschalten muss. Ebenso willkürlich ist es wenn der Herausgeber die beiden

Hälften des V. 10 umsetzt: dazu hatte allerdings einst schon Bretschneider in seiner Bearbeitung des Buches gerathen, allein dieser hatte offenbar dabei sich nicht recht bedacht. Denn erst dann wird der Sinn des ganzen vielverschlungenen Sazes vollkommen dunkel. Wir wollen hier nur an das eine erinnern dass es sich hier gar nicht schicken würde die bekannten Segensworte „die Gebeine der Seligen mögen von ihrem Orte aus (bei der Auferstehung) wieder aufblühen!“ welche wir geschichtlich zuerst im Sirachbuche dann bei Späteren mehr oder weniger verkürzt wiederfinden, von den Zwölf Propheten allein für sich hinzustellen, ohne wie es sich in einer Lobrede ziemt auch deren Lob zu erwähnen. Was der Herausgeber ferner über ὄμβρος V. 9 sagt, trifft nicht zu: das Wort soll offenbar Uebersetzung des סְעָרָה Hez. 1,4 sein. Doch um hier nicht weiter viel zu reden, wollen wir lieber hier sogleich die besten handschriftlichen Lesarten voraussezend den vielverschlungenen Saz so wörtlich als möglich wiedergeben: “Hézeqiél's, welcher ein Gesicht von Herrlichkeit (göttlicher Majestät) hatte, welches er (Gott) ihm auf dem Kerûbimwagen zeigte (erinnerte er (Gott) sich doch der Feinde im Sturmwetter (kommend) und wie er den aufrichtig Lebenden wohlthun wolle), und der Zwölf Propheten Gebeine blühen aus ihrem Orte (dem Grabe) wieder auf! Denn sie (Hézeqiel und die Zwölfe) ermahnten Jacob und erlösten sie durch den Glauben an Hoffnung (die Messianische nämlich)!„ Die Worte sind so weder schwülstig noch sonst unklar; und würden sich wol Deutsch noch besser übersetzen lassen, wenn wir die Hebräische Urschrift besässen. Hézeqiel aber und die Zwöfe können nicht besser als so zusammengefasst werden. Die alte Syrische

Uebersetzung gibt alles viel zu frei wieder, und setzt V. 9 den Ijob ein als hätte jener Uebersetzer noch in einer Hebräischen Handschrift אִיּוֹב für אֹיְבִים gelesen: allein sie lässt doch wenigstens die Zwölfe noch mit allen übrigen Handschriften an ihrem rechten Orte stehen. Möge man denn dieses Beispiel sich nicht umsonst gegeben sein lassen!

Ueber die Function der Blattzähne und die morphologische Werthigkeit einiger Laubblatt-Nectarien.

Von

J. Reinke.

Man gewöhnt sich mehr und mehr daran, die an einer Pflanze vorkommenden Bildungen als für dieselbe biologisch nothwendig oder doch nützlich anzusehen; dem entsprechend soll in dieser kurzen, vorläufigen Mittheilung gezeigt werden, dass auch die Sägezähnung, welche wir am Rande der Blätter so vieler Gewächse wahrnehmen, nicht als blosse Verzierung der Pflanze aufgefasst werden darf, sondern bei der Mehrzahl der vegetabilischen Typen jedenfalls ihre physiologische Bedeutung besitzt.

Die diesen Gegenstand betreffenden Untersuchungen erstrecken sich bereits auf eine grosse Zahl verschiedenen Familien angehöriger Gewächse und sollen noch weiter ausgedehnt werden; hier werde ich mich auf die Mittheilung einiger Beispiele beschränken.

Zunächst mag als allgemeine Regel hervorgehoben werden, dass die functionelle Thätigkeit der Blattzähne in die embryonale und Jugend-Periode des Blattes fällt, mit einem Worte, in die Knospe. Es eilen hier die Zähne im Allgemeinen dem Haupttheil der Spreite in ihrer Entwicklung voraus; dabei liegen sie nicht in einer Ebene mit dem Theil der Spreite, welchem sie aufsitzen, sondern krümmen sich krallenartig nach einwärts, legen sich also auf die spätere Blattoberseite, und verhindern dadurch ein hermetisches Aneinanderschliessen der zusammengefalteten Blatthälften. Vielleicht ist dies wichtig, um den nothwendigen Gas-Austausch in der sich entwickelnden Knospe nicht ins Stocken gerathen zu lassen.

Viel evidenter ist jedoch eine andere Function der Sägezähne: dieselbe stellen nämlich in ihrem Jugendzustande Harz oder Schleim absondernde Organe vor.

Ich wähle als erstes Beispiel Prunus avium. Der Rand der Laubblätter ist unregelmässig gezahnt; im Hochsommer erscheinen die Spitzen der einzelnen Zähne gebräunt und vertrocknet, während an einem jungen, erst eben der Knospe entstiegenen Blatte jeder Zahn ein deutlich abgesetztes, glänzendes, rothgefärbtes, conisches Spitzchen trägt; diese Spitzen der Blattzähne sind Secretionsorgane, welche bei Prunus die Colleteren vertreten und eine reichliche Menge von Harz aussondern. Ein Längsschnitt durch die Spitze eines solchen Zahns senkrecht zur Spreite geführt zeigt Folgendes. Ein in den Blattzahn eingetretener Fibralsalstrang endet blind gegen die Mitte desselben; der Gegensatz zwischen dem Parenchym der Ober- und Unterseite schwindet, die Zellen werden gleichartig,

ohne jedoch selbst in der Spitze des Zahnes irgend welche bemerkenswerthe Eigenthümlichkeiten zu zeigen. Um so charakteristischer ist das Verhalten der Epidermis. Die sonst kubischen Zellen derselben strecken sich an dem aufgesetzten Spitzchen und theilen sich durch eine grosse Zahl radialer Wände in zahlreiche, sehr schmale, prismatisch keilförmige Zellen, die sich in radialer Richtung noch verlängern: dann spaltet sich die ganze Schicht durch tangentiale Scheidewände in zwei Schichten. Diese Doppelschicht prismatischer Zellen ist der eigentliche Heerd der Secretion, der Zellinhalt besteht aus einem hellen, stark lichtbrechenden feinkörnigen Plasma; nach Aussen ist die Oberfläche zu einer Cuticula verdickt und diese verhält sich wie die Cuticula der Trichom-Zotten, von denen sich diese Blattzähne überhaupt nur durch ihre verschiedene morphologische Werthigkeit unterscheiden, indem sie wirkliche Glieder des Blattes sind. — Aber auch in einem noch früheren Knospenzustande, wo die soeben beschriebene Differenzirung in der Structur der Zähne sich noch gar nicht vollzogen hat, bemerken wir eine Secretion; hier secernirt aber nicht nur der Blattzahn, sondern die gesammte Oberfläche des jungen Blattes, und zwar nicht Harz, sondern Schleim; auch hier ist bereits eine Cuticula gebildet, deren innere Schichten verschleimen und an der ganzen Blattoberfläche die Cuticula blasenförmig auftreiben.

Eine ganz ähnliche Structur wie bei Prunus avium zeigen die Spitzen der Blattzähne bei den meisten Amygdalaceen, bei Cydonia, Pirus, Crataegus, Rosa, Cunonia, Escallonia, Myrsine, Salix, Alnus, Carpinus, Viola, Ricinus und vielen anderen. Dabei kommen manchfache Mo-

dificationen vor, so z. B. kann die prismatische Schicht ungetheilt sein, so kann das darunter liegende Parenchym ganz schwinden, es kann Schleim an der Stelle von Harz secernirt werden, z. Th. nur in geringer Menge, wie bei Ricinus.

In anderen Fällen, wo eine Secretion von Schleim vorkommt, geht die Differenzirung der Spitzen der Zähne nicht so weit; so z. B. bei Kerria, wo die Epidermiszellen nur wenig gestreckt sind, aber nebst den darunter liegenden Parenchymzellen von stark lichtbrechender Substanz erfüllt; ähnlich bei Alchemilla, Poterium, Spiraea, Rubus, Vitis, Acer, Fraxinus, Ulmus, Viburnum, Impatiens und sehr vielen anderen. Oft ist hier die Secretion eine nur geringe, es kommen häufig an demselben Blatte auch Trichom-Zotten vor, sogar, wie bei Poterium, an der Spitze der Blattzähne.

Endlich sind als dritter Typus die Fälle zu nennen, wo die Zähne des Blattrandes sich stachelartig ausbilden, z. B. Ilex, Mahonia, Berberis, Proteaceen, Prunus Carolinensis etc. etc. Gerade das letzte Beispiel beweist, dass die Beschaffenheit der Blattzähne für einzelne Gattungen nicht constant ist: alle Arten von Prunus die ich untersuchte, selbst der nahe verwandte Pr. Laurocerasus folgen sonst dem Typus von Pr. avium. Bei diesen Stachelzähnen ist nun auch im Jugendzustande keine weitere Differenzirung nachweisbar,

Den metamorphosirten Blattzähnen des ersten Typus schliessen sich morphologisch ganz nahe an manche nectarabsondernde Organe von Laubblättern. Nectarien an Laubblättern werden meines Wissens zuerst bei Caspari erwähnt, welcher angiebt, durch Treviranus

darauf aufmerksam gemacht zu sein. Doch sind die Structurverhältnisse dieser Gebilde bei Caspari äusserst mangelhaft dargestellt.

Es finden sich solche Nectarien z. B. an den Blattstielen von Prunus avium und anderen Arten, von Impatiens, Ricinus und Viburnum Opulus, auf der Rückseite der Blätter von Pr. Laurocerasus und Carolinensis, von Clerodendron und Bignonia.

Am Stiel des Blattes von Pr. avium finden sich, bald ganz nahe an die Lamina hinangerückt, bald einige Millimeter von derselben entfernt, eigenthümliche, röthliche, fleischige Warzen: sie stehen an den Rändern der Rinne, die den Blattstiel durchzieht, in der Regel zu zweien und dann einander gerade oder schräg gegenüber, seltener zu drei oder gar zu vieren. An ihrer Oberfläche sammelt sich ein klarer Flüssigkeitstropfen, den schon die Zunge als Nectar zu erkennen giebt. An älteren Blättern vertrocknen diese Drüsen, an ganz jungen bereits aus der Knospe hervorgegangenen, sind sie noch nicht entwickelt. Ein Längsschnitt durch eine solche Drüse ergiebt, dass dieselbe aus lückenlosem parenchymatischem Gewebe besteht, durchzogen von einem blind endigenden Fibrovasalstrang. Die Epidermis verhält sich ganz ebenso, wie an den Spitzen der Blattzähne; ihre anfangs kubischen Zellen theilen sich durch radiale Wände und gehen allmählig in schmale, wenig keilförmige Prismen über; dann spaltet sich diese Prismenschicht durch tangentiale Wände. Diese Zellen, deren Inneres von gleichmässigem, stark lichtbrechendem Plasma erfüllt sind, bereiten den Nectar, welcher die Cuticula auftreibt und schliesslich sprengt. Diese Drüsen entstehen aus dem Periblem des jungen Petiolus und

sind den Spitzen der Zähne der Blattspreite morphologisch völlig gleichwerthig, was abgesehen von der gleichen Structur noch besonders bestätigt wird durch die Uebergangsformen zwischen beiden, die sich an den meisten Blättern finden, indem die Spitzen der untersten Blattzähne etwas fleischiger sind und Nectar anstatt Harz secerniren. Die Mehrzahl der Amygdalaceen besitzen derartige Nectarien häufig am Rande des untersten Theils der Spreite; ganz ebenso gebaut sind die von Ricinus, während diejenigen von Viburnum Opulus und Impatiens nur eine einschichtige Epidermis aufweisen.

Die Nectarien von Pr. Laurocerasus und Carolinensis sind rundliche, aus dem Periblem hervorgegangene Anschwellungen auf der Mitte der Unterseite der Blätter; die Epidermis verhält sich hier wie bei Pr. avium. Bei Clerodendron dagegen findet keine Betheiligung subepidermalen Parenchyms an der Bildung der Nectarien statt. Die Epidermis spaltet sich in zwei Schichten und nur die obere dieser beiden Schichten, eine circumscripte Platte, theilt sich in schmale Prisma-Zellen. Bei Bignonia Catalpa endlich bestehen die secernirenden Flecke aus zahlreichen scheibenförmigen, aus prismatischen Zellen zusammengesetzten Trichomen, die je aus einer einzigen Epidermiszelle hervorgingen.

Verzeichniss der bei der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangenen Druckschriften.

August, September, October 1873.

(Fortsetzung.)

J. C. Noll, der zoologische Garten. Jahrg. XIV. 1873. Nr. 1—6. Frankfurt a/M. 1873.
Berichte des naturwiss.-medicinischen Vereins in Innsbruck. III. Jahrg. 2. u. 3. Hft. 1873.
Bulletin de la Société Imp. des Naturalistes de Moscou. Anneé 1873. Nr. 1. Moskau. 1873.
Vierteljahrsschrift der Astronom. Gesellschaft. VIII. Jahrg. Hft. 2. Leipzig. 1873.
J. C. Donders en Th. W. Engelmann, Onderzoekingen gedaan in het physiologisch Laboratorium der Utrechter Hoogeschool. Derde Reeks. I. Utrecht. 1872.
Sitzungsberichte der k. böhm. Gesellsch. der Wiss. in Prag. 1873. Nr. 5.
Publications de l'Institut roy. grand-ducal de Luxembourg. T. XIII. Luxembourg. 1873.
Nature. 206. 207. 208.
Jahresbericht der naturf. Gesellsch. in Emden. Nr. 58. 1872. Emden. 1873.
Dritter Jahresbericht der Akademischen Lesehalle in Wien. 1873.
Jahresbericht des Lesevereins der deutschen Studenten Wiens. 1872—1873.
Volkmann, über die näheren Bestandtheile der menschl. Knochen. Leipzig 1873.
Derselbe, über die relativen Gewichte der menschl. Knochen. Leipzig. 1873.
Neues Oberlausitzisches Magazin. Bd. 50. Hft. 1.
Philosophical Transactions of the R. Soc. of London. Vol. 162. P. 2. London. 1872.
Proceedings of the R. Soc. Vol. 21. N. 139—145. London. 1872—1873.
Fellows of the R. Society. November 1872.
Indische Studien, Bd. XI u. XII. 1871 u. 1873.

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

17. December. № 30. 1873.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Verallgemeinerung des Problems von den Bewegungen, welche in einer ruhenden, unelastischen Flüssigkeit die Bewegung eines Ellipsoids hervorbringt.

Von

C. A. Bjerknes.

(Vorgelegt von Prof. Schering.)

Erster Aufsatz.

Nachdem wir in einem früheren Aufsatze eine Verallgemeinerung des Problems von dem ruhenden Ellipsoid in einer bewegten, unendlichen und unelastischen Flüssigkeit gegeben haben, nehmen wir uns jetzt vor, auf ähnliche Weise auch den zweiten Dirichletschen Fall, die Bewegung des Ellipsoids in einem ruhenden Medium zu behandeln. Es besitze das Ellipsoid des generalisirten Raumes R_n, dessen Anzahl der Dimensionen n gleich oder grösser als 2 ist, die allgemeinste Bewegung,

die mit der Erhaltung einer ellipsoidischen Form vereinbar ist; es ändert mithin seine Gestalt, indem die Axen variiren, zu derselben Zeit wie es eine beliebige, translatorisch - rotatorische Bewegung in dem verallgemeinerten Raume ausführt.

1. Mittelst n translatorischer Bewegungen, wodurch schliesslich der Mittelpunkt des Ellipsoids mit dem Anfangspunkte eines geradlinigen, orthogonalen Axensystems zusammenfällt, können die n linearen Coefficienten der Flächen-Gleichung weggeschafft werden. Die gegen einander orthogonal stehenden Axen des Ellipsoids werden ferner, wie wir uns ausdrücken wollen, nach $\frac{n(n-1)}{2}$ Drehungen, wenn sie gehörig gewählt sind mit den Axen desselben Systems den Richtungen nach zusammenfallen; die rektangulären Glieder werden somit verschwinden. Durch die Aenderungen der Axenlängen wird man endlich die n Coefficienten der quadratischen Glieder beliebig verändern, nur dass sie immer, nach Wegschaffung der früher genannten Glieder, als positive Grössen auftreten müssen; und namentlich würde man das Ellipsoid in eine Kugel überführen können, die selbstverständlich in sich selbst übergeht, wenn man eine beliebige othogonale Drehungstransformation ausführen liesse.

Die verschiedenen Bewegungen, die wir eben betrachtet haben, werden nun wohl nicht ausschliesslich auf bestimmte, zugehörige Klassen von Coefficienten einwirken; es ist doch aber insofern eine Verbindung, dass die Coefficienten in einer gewissen Ordnung ausfallen oder beliebige Werthe annehmen müssen, wenn die Be-

wegungen in einer entsprechenden Ordnung und in gehöriger Ausdehnung zur Ausführung gebracht werden. In diesem Sinne können wir deswegen die linearen Coefficienten in der Gleichung des Ellipsoids als den translatorischen Bewegungen entsprechend ansehen, während die $\frac{n(n-1)}{2}$ Coefficienten der rektangulären und die n Coefficienten der quadratischen Glieder zu den $\frac{n(n-1)}{2}$ Drehungen und den n Formänderungen mittelst Variation der Axenlängen gehören sollen. — Genauer würden sie einander, im Falle einer unendlich kleinen Bewegung, entsprechen, wenn das Ellipsoid zur Zeit t, wie es also immer möglich ist, auf seinen Mittelpunkt und seine Hauptaxen bezogen wäre, und seine Gleichung also die Form $E_0 = 1$ annähme, wo dann die Flächenfunktion E_0 durch die Gleichung

$$E_0 = \sum_{1,n}^{k} \frac{x^2_k}{a^2_k}$$

bestimmt sei. Wenn die Coordinatenaxen ungeändert bleiben, so würde, in Folge der Bewegung und der hierin eingeschlossenen Formänderung des Ellipsoids, die Flächenfunktion E_0 in dem Zeitelemente dt in $E_0 + \delta E_0$ übergehen; und wird dann die Variation δE_0 auf solche Weise zusammengesetzt sein, dass die Coefficienten der quadratischen Glieder nur von den Aenderungen der Axenlängen herrühren, die Coefficienten der rektangulären Glieder nur von den Drehungen, und schliesslich die Coefficienten der linearen Glieder nur von den fortschreitenden Bewegun-

gen im Raume R_n. Die Variation δE_0 wird ausserdem eine lineare Funktion der n translatorischen Geschwindigkeiten u_k, der $\frac{n(n-1)}{2}$ Geschwindigkeiten u_{kl}, die hier als Drehungsgeschwindigkeiten parallel den $\frac{n(n-1)}{2}$ Coordinatenplanen $(x_k\ x_l)$ aufgefasst werden sollen, und der n Geschwindigkeiten v_k, womit die Halbaxen α_k in Verhältniss zu sich selbst zunehmen. Es muss übrigens k und l gleich 1, 2, 3 . . n sein, und $k \gtrless l$.

In genauer Uebereinstimmung mit der in Folge der Bewegungen gebildeten Variation der Flächenfunktion E_0 steht nun auch der Potentialausdruck, der die Bewegungen der umgebenden Flüssigkeit bestimmt: seine Theilung in eine Anzahl von partiellen, den verschiedenen Bewegungen des Ellipsoids entsprechenden, Geschwindigkeitspotentialen; und seine Herleitung aus einer einzigen Fundamentalfunktion ψ_σ, die selbst übrigens die Eigenschaften eines Potentials besitzt. Es werden sich nämlich die folgenden Sätze, unter der Voraussetzung, dass das verallgemeinerte Ellipsoid während seiner Bewegungen stets auf seinen Mittelpunkt und seine Hauptaxen bezogen wird, als gültig erweisen:

Das Geschwindigkeitspotential φ, für einen beliebigen Punkt des äusseren Flüssigkeitsraumes, wird sich als eine lineare und homogene Funktion von den Grössen

$$\mu_k,\ \mu_{kl},\ \nu_k$$

darstellen lassen; deren Coefficienten auf ähnliche Art aus einem Grundintegrale ψ_σ zu bilden sind, wie in der (negativ genommenen) Variation der Flächenfunktion E_0 die Coefficienten der

$$u_k,\ u_{kl},\ v_k,$$

abgesehen von einem gemeinschaftlichen Faktor dt.

Es treten hierbei die μ_k, μ_{kl}, ν_k als lineare, homogene Funktionen respective von den u_p, u_{pq}, v_p auf; und insbesondere werden die μ_k und μ_{kl} den entsprechenden u_k und u_{kl} proportional sein.

2. Zur Zeit t soll das lineare und orthogonale Axensystem ξ, welches mit dem Ellipsoid unveränderlich verbunden ist, mit dem Systeme x zusammenfallen. Nach dem Verlaufe eines Zeitelements hat indessen das bewegliche Axensystem seine Stelle im Raume R_n geändert (ξ'); es hat eine fortschreitende sowohl als eine drehende Bewegung ausgeführt. Es wird sodann, weil an der Grenze x_k und ξ'_k identisch sind:

$$x_k = \gamma_k + \sum_{1,n}^{p} \varepsilon_{pk}\, \xi'_p; \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots n)$$

wo dann mit Vernachlässigung der Grössen zweiter Ordnung

$$\varepsilon_{kk} = 1$$

ist, und die γ wie die übrigen ε unendlich klein von erster Ordnung sein müssen. Wegen der Orthogonalitätsbedingungen muss ferner

$$\varepsilon_{lk} = -\varepsilon_{kl},$$

wenn ebenso $l = 1, 2, 3, \ldots n$ und $k \gtrless l$. Die Bedingungen $\sum_{1,n}^{p} \varepsilon_{kp}^{2} = 1$ werden nämlich unmittelbar erfüllt, weil die Grössen zweiter Ordnung vernachlässigt werden; und die übrigen $\frac{n(n-1)}{2}$, die durch die Gleichung $\sum_{1,n}^{p} \varepsilon_{kp}\varepsilon_{lp} = 0$ repräsentirt sind, werden dann die obige Gleichung geben, da nur die Glieder, welche den Werthen $p = k$ und $p = l$ entsprechen, von erster Ordnung sind, und ausserdem $\varepsilon_{kk} = 1$ und $\varepsilon_{ll} = 1$.

Wegen derselben Orthogonalitätsbedingungen, und indem man wie früher die Grössen zweiter Ordnung ausser Betracht setzt, leitet man nun umgekehrt ab, dass

$$\xi'_k = -\gamma_k + \sum_{1,n}^{p} \varepsilon_{kp}\, x_p.$$

In den obigen Gleichungssystemen soll nun

$$\gamma_k = u_k\, dt, \quad \varepsilon_{kl} = u_{kl}\, dt$$

gesetzt werden. u_k soll dann als die Geschwin-

digkeitscomponente nach der Richtung der positiven Halbaxe x_k betrachtet werden, und u_{kl} als eine Drehungsgeschwindigkeit parallel dem Coordinatenplane (x_k, x_l), positiv genommen von x_k zu x_l. — Es giebt hiernach n fortschreitende Bewegungen, parallel den n Halbaxen, und $\frac{n(n-1)}{2}$ drehende Bewegungen, parallel den $\frac{n(n-1)}{2}$ Coordinatenplanen. Denn was die doppelt vorkommenden Combinationen (k, l) betrifft, werden wir immer annehmen können dass $k < l$; wobei ausserdem die positive Drehungsrichtung so zu wählen ist, dass man von dem kleineren zu dem höheren Index geht.

Weil nun $\xi'_k - \xi_k$ gleich $\frac{d\xi_k}{dt}\,dt$ und $x_k = \xi_k$ ist, so wird man, um die relative Geschwindigkeit in einem festen Punkte M oder $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ zu bestimmen, mittelst der fortschreitenden und drehenden Bewegungen des Axensystems zur Zeit t in Beziehung auf dasselbe System, wenn es als fest betrachtet wird, die folgenden Gleichungen aufzustellen haben:

$$\frac{d\xi_k}{dt} = -u_k + \sum_{1,n}^{p} u_{kp}\,\xi_p; \quad (k = 1, 2, \ldots n)$$

wo dann $u_{kp} = -u_{pk}$, mithin auch $u_{kk} = 0$.

In entwickelter Form hat man also:

$$\frac{d\xi_1}{dt} = -u_1 + * + u_{12}\xi_2 + u_{13}\xi_3 + \ldots + u_{1n}\xi_n$$

$$\frac{d\xi_2}{dt} = -u_2 - u_{12}\xi_1 + * + u_{23}\xi_3 + \ldots + u_{2n}\xi_n$$

$$\frac{d\xi_3}{dt} = -u_3 - u_{13}\xi_1 - u_{23}\xi_2 + * + \ldots + u_{3n}\xi_n$$

. . . . . .

$$\frac{d\xi_n}{dt} = -u_n - u_{1n}\xi_1 - u_{2n}\xi_2 - u_{3n}\xi_3 - \ldots + *$$

Wenn n gleich 3 ist, so kann man statt u_{12}, u_{13}, u_{23} zu benutzen auch u_{12}, u_{23}, u_{31} als Drehungscomponenten auffassen, indem man die Drehungsrichtungen $(\xi_1\,\xi_2)$ $(\xi_2\,\xi_3)$ $(\xi_3\,\xi_1)$ als die positiven definirt. Unter dieser Voraussetzung würde man dann für den genannten Fall die obigen Gleichungen auf folgende Weise schreiben müssen:

$$\frac{d\xi_1}{dt} = -u_1 + u_{12}\xi_2 - u_{31}\xi_3$$

$$\frac{d\xi_2}{dt} = -u_2 + u_{23}\xi_3 - u_{12}\xi_1$$

$$\frac{d\xi_3}{dt} = -u_3 + u_{31}\xi_1 - u_{23}\xi_2;$$

wo dann u_{23}, u_{31}, u_{12} dieselben Bedeutungen haben wie die gewöhnlich benutzten Buchstaben p, q, r, sofern ξ_1, ξ_2, ξ_3 als die ξ, η und ζ zu verstehen sind.

3. Die hydrodynamischen Gleichungen lassen sich jetzt mit Leichtigkeit umformen, indem

man sie auf ein bewegliches Axensystem bezieht, dessen Anfangspunkt der Mittelpunkt des Ellipsoids ist, und dessen Axen, den Richtungen nach, zu jeder Zeit mit den Hauptaxen des genannten Ellipsoids zusammenfallen.

Die Continuitätsgleichung nimmt die folgende Form an:

$$(1) \qquad \sum_{1,n}^{k} \frac{d^2\varphi}{d\xi_k^2} = 0,$$

oder, wie wir auch schreiben können, $\Delta^2\varphi = 0$; denn wie früher hat man ein lineares, orthogonales Axensystem ξ. Es wird ebenso die Geschwindigkeitscomponente in einem Punkte M oder $(\xi_1\ \xi_2 \ldots \xi_n)$ nach der Richtung der positiven Halbaxe ξ_k $\frac{d\varphi}{d\xi_k}$. Es bedeutet φ selbstverständlich das Geschwindigkeitspotential, dessen Existenz also vorausgesetzt wird.

Die Bedingung in Bezug auf die Oberfläche des Ellipsoids: $E_0 = 1$, (wo jetzt übrigens ξ statt x geschrieben wird, und folglich

$$E_0 = \sum_{1,n}^{k} \frac{\xi_k^2}{\alpha_k^2}$$

ist) wird sich ebenso transformieren lassen. — In der Gleichung

$$(2) \qquad \sum_{1,n}^{k} \frac{dE_0}{d\xi_k} \frac{d\varphi}{d\xi_k} = -\frac{dE_0}{dt}$$

geht das Glied auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens, $-\frac{dE_0}{dt}$, erstens in

$$-\sum_{1,n}^{k}\frac{dE_0}{d\alpha_k}\frac{d\alpha_k}{dt}-\sum_{1,n}^{k}\frac{dE_0}{d\xi_k}\frac{d\xi_k}{dt}$$

über; und folglich, nachdem man statt $\frac{d\alpha_k}{dt}$ $\alpha_k v_k$ geschrieben, und ferner an der Stelle von $\frac{d\xi_k}{dt}$ ihren eben gefundenen Werth eingesetzt hat, ausgedrückt mittelst der fortschreitenden und drehenden Geschwindigkeiten des Axensystems, in diesen neuen Ausdruck über:

$$(2b)\quad -\sum_{1,n}^{k}v_k\cdot\alpha_k\frac{dE_0}{d\alpha_k}-\Sigma\Sigma u_{kl}\left(\xi_l\frac{dE_0}{d\xi_k}-\xi_k\frac{dE_0}{d\xi_l}\right)$$

$$+\sum_{1,n}^{k}u_k\frac{dE_0}{d\xi_k}.$$

Die doppelte Summation wird ferner stets, wenn nicht anders bestimmt wird, über die $\frac{n(n-1)}{2}$ Combinationen (k, l) auszudehnen, die den Bedingungen $k=1,2,3,..n$, $l=1,2,3,..n$ und $k<l$ genügen. — Nehmen wir schliesslich an, wie wir es in dem vorigen Aufsatze gethan haben, dass φ nicht bloss die ξ expli-

cite enthält, sondern auch implicite in σ, wo σ als die positive Wurzel der Gleichung

$$E_\sigma = 1$$

zu verstehen ist, und E_s oder

$$E = \sum_{1,n}^{k} \frac{\xi_k^2}{\alpha_k^2 + s},$$

so wird sich das Glied an linker Seite der Bedingungsgleichung in Beziehung auf der Oberfläche ($E_0 = 1$ oder $\sigma = 0$) in

$$\text{(2a)} \qquad \sum_{1,n}^{k} \frac{dE_0}{d\xi_k} \frac{d\varphi_0}{d\xi_k} + 4 \left(\frac{d\varphi}{d\sigma}\right)_0$$

transformiren. Es bezeichnet dann φ_0 eine neue Function, die man aus φ ableiten kann, indem man Null an die Stelle von σ setzt.

4. Indem man auf die oben erwähnte Weise φ als Funktion von σ und von den ξ ausdrückt, so zeigt uns die Continuitätsgleichung, in Verbindung mit der transformirten Bedingungsgleichung in Beziehung auf die Oberfläche, dass das Potential sich als eine Summe von drei Potentialen darstellen lässt.

Werde jedes von diesen, der Einfachheit wegen, wieder mit φ bezeichnet, so muss erstens $\Delta^2\varphi = 0$ sein, andererseits muss auf der Oberfläche des Ellipsoids der Ausdruck (2a) in einen von den drei in (2b) enthaltenen Ausdrücken übergehen

$$\Sigma u_k \frac{dE_0}{d\xi_k}, \quad -\Sigma\Sigma u_{kl}\left(\xi_l \frac{dE_0}{d\xi_k} - \xi_k \frac{dE_0}{d\xi_l}\right), \quad -\Sigma v_k \alpha_k \frac{dE_0}{d\alpha_k}.$$

Das erste Problem wird dann das Problem von der translatorischen Bewegung des Ellipsoids sein, das zweite das von seiner drehenden Bewegung; das dritte Problem endlich, welches wir hier auch als ein Bewegungsproblem auffassen, bezieht sich auf die Aenderung der Form, indem die Axen unter Beibehaltung ihrer Richtungen ihre Längen verändern.

5. Wir führen jetzt, wie bei der Verallgemeinerung des Problems von dem ruhenden Ellipsoid, die Funktion ψ_σ ein, wo ψ_s oder ψ durch die Gleichung

$$\psi = \int_s^c \frac{ds}{D} - \int_s^\infty E\,\frac{ds}{D} \tag{3}$$

zu bestimmen ist. D_s oder D ist durch die Gleichung

$$D = \prod_{1,n}^{k} \sqrt{1 + \frac{s}{\alpha_k^2}}$$

gegeben.

Die Funktion ψ_σ genügt der partiellen Differentialgleichung $\Delta^2\varphi = 0$. Dasselbe wird also auch der Fall sein mit den drei abgeleiteten Funktionen

$$\frac{d\psi_\sigma}{d\xi_k}, \quad \xi_l \frac{d\psi_\sigma}{d\xi_k} - \xi_k \frac{d\psi_\sigma}{d\xi_l}, \quad \frac{d\psi_\sigma}{d\alpha_k},$$

wie leicht zu erkennen ist. — Wir bemerken

daneben gelegentlich, dass, wenn man von einer andern Funktion, die der Differentialgleichung $\Delta^2\varphi = \text{Const.}$ genügt, auf ähnliche Weise drei neue Funktionen abgeleitet hätte, diese ebenso der Gleichung $\Delta^2\varphi = 0$ Genüge leisten würden, vorausgesetzt dass die Constante unabhängig von den Grössen α_k sei. Es würde dies zum Beispiel stattfinden, wenn man als Grundfunktion die Funktion ψ_0 gewählt hätte; in welchem Fall die genannten Constante gleich -4 ist. Von dieser Bemerkung werden wir auch später Gebrauch machen.

In Uebereinstimmung mit dem, was wir in Nr. 1 bemerkt haben, können wir deswegen versuchen, um die drei partiellen Probleme zu behandeln, den drei φ Funktionen die folgenden Formen zu geben:

$$\text{(I)}\quad \Sigma\mu_k \cdot \frac{d\psi_\sigma}{d\xi_k}, \quad -\Sigma\Sigma\mu_{kl}\left(\xi_l \frac{d\psi_\sigma}{d\xi_k} - \xi_k \frac{d\psi_\sigma}{d\xi_l}\right), \quad -\Sigma\nu_k \cdot \alpha_k \frac{d\psi_\sigma}{d\alpha_k},$$

den drei Theilfunktionen entsprechend:

$$\text{(I}^1\text{)}\quad \Sigma u_k \frac{dE_0}{d\xi_k}, \quad -\Sigma\Sigma u_{kl}\left(\xi_l \frac{dE_0}{d\xi_k} - \xi_k \frac{dE_0}{d\xi_l}\right), \quad -\Sigma v_k \cdot \alpha_k \frac{dE_0}{d\alpha_k},$$

in welche sich die Funktion $-\frac{dE_0}{dt}$ auf dem Wege der Summation zerlegen lässt. Da $E_\sigma = 1$ ist, nehmen übrigens die erwähnten Potentiale, wenn sie entwickelt werden, die neuen Formen an:

$$(\mathrm{II}_1) \qquad \varphi = -\Sigma\mu_k \int_\sigma^\infty \frac{dE}{d\xi_k}\,\frac{ds}{D},$$

$$(\mathrm{II}_2) \qquad \varphi = \Sigma\Sigma\mu_{kl} \int_\sigma^\infty \left(\xi_l \frac{dE}{d\xi_k} - \xi_k \frac{dE}{d\xi_l}\right) \frac{ds}{D},$$

$$(\mathrm{II}_3) \quad \varphi = -\Sigma\nu_k \left(\int_\sigma^c \alpha_k \frac{d}{d\alpha_k}\left(\frac{1}{D}\right)ds - \int_\sigma^\infty \alpha_k \frac{d}{d\alpha_k}\left(\frac{E}{D}\right)ds\right);$$

und es fragt sich sodann, ob man die Constanten μ_k, μ_{kl}, ν_k so wird bestimmen können, dass an der Oberfläche des Ellipsoids

$$\Sigma \frac{dE_0}{d\xi_k}\frac{d\varphi_0}{d\xi_k} + 4\left(\frac{d\varphi}{d\sigma}\right)_0$$

die Werthe der obenstehenden 3 Theilfunktionen annehmen wird.

6. Wir werden nun zeigen, dass die erste φ Funktion dem Probleme von der translatorischen Bewegung des verallgemeinerten Ellipsoids entspricht.

Es wird nämlich

$$\left(\frac{d\varphi}{d\sigma}\right)_0 = \Sigma\mu_k \frac{dE_0}{d\xi_k};$$

ebenso findet man, indem man φ_0 bildet, und nachher in Beziehung auf ξ_k differentiirt,

$$\frac{d\varphi_0}{d\xi_k} = -\mu_k \int_0^\infty \frac{d^2E}{d\xi_k^2} \frac{ds}{D};$$

was offenbar von den ξ unabhängig ist. Es folgt hieraus, dass der Coefficient von $\frac{dE_0}{d\xi_k}$ in dem Ausdrucke (2a) gleich $-\mu_k \int_0^\infty \frac{d^2E}{d\xi_k^2} \frac{ds}{D} + 4\mu_k$ wird, während der entsprechende Coefficient von $\frac{dE_0}{d\xi_k}$ in der Entwicklung von $-\frac{dE_0}{dt}$ gleich u_k ist. Der Bedingung in Beziehung auf die Oberfläche wird also genügt werden, indem man μ_k durch die Gleichung

$$(\text{III}_1) \qquad \mu_k = \frac{u_k}{4 - 2\int_0^\infty \frac{ds}{(\alpha_k^2 + s)D}}$$

sich bestimmen lässt.

7. Die zweite φ Funktion wird ebenso das gesuchte Potential sein, wenn die Bewegung des verallgemeinerten Ellipsoids in einer Drehung besteht, welche durch die $\frac{n(n-1)}{2}$ Drehungsgeschwindigkeiten u_{kl} bestimmt ist.

Es wird nämlich

$$\left(\frac{d\varphi}{d\sigma}\right)_0 = -\Sigma\Sigma\, \mu_{kl} \left(\xi_l \frac{dE_0}{d\xi_k} - \xi_k \frac{dE_0}{d\xi_l}\right).$$

Ferner lassen sich die Glieder in den Entwicklungen von $\frac{d\varphi_0}{d\xi_k}$ und $\frac{d\varphi_0}{d\xi_l}$, welche μ_{kl} enthalten, auf folgende Weise schreiben:

$$\mu_{kl}\,\xi_l \int_0^\infty \left(\frac{d^2E}{d\xi_k^2} - \frac{d^2E}{d\xi_l^2}\right)\frac{ds}{D},$$

$$\mu_{kl}\,\xi_k \int_0^\infty \left(\frac{d^2E}{d\xi_k^2} - \frac{d^2E}{d\xi_l^2}\right)\frac{ds}{D};$$

und es ergiebt sich hieraus, dass

$$\Sigma\frac{dE_0}{d\xi_p}\frac{d\varphi_0}{d\xi_p} = \Sigma\Sigma\mu_{kl}\left(\xi_l\frac{dE_0}{d\xi_k} + \xi_k\frac{dE_0}{d\xi_l}\right)\int_0^\infty\left(\frac{d^2E}{d\xi_k^2} - \frac{d^2E}{d\xi_l^2}\right)\frac{ds}{D}.$$

Weil nun

$$\xi_l\frac{dE_0}{d\xi_k} + \xi_k\frac{dE_0}{d\xi_l} \text{ und } \xi_l\frac{dE_0}{d\xi_k} - \xi_k\frac{dE_0}{d\xi_l}$$

mit

$$\alpha_l^2 + \alpha_k^2 \text{ und } \alpha_l^2 - \alpha_k^2$$

proportional sind, so wird geschlossen, dass der Coefficient von $\xi_l\frac{dE_0}{d\xi_k} - \xi_k\frac{dE_0}{d\xi_l}$ in dem Ausdrucke (2a) gleich

$$\mu_{kl}\cdot\frac{\alpha_l^2 + \alpha_k^2}{\alpha_l^2 - \alpha_k^2}\int_0^\infty\left(\frac{d^2E}{d\xi_k^2} - \frac{d^2E}{d\xi_l^2}\right)\frac{ds}{D} - 4\mu_{kl}$$

ist; während der entsprechende Coefficient in der Entwicklung von $-\frac{dE_0}{dt}$, wie aus dem früheren erhellt, den Werth $-u_{kl}$ hat. Der Bedingungsgleichung in Beziehung auf die Oberfläche wird somit genügt werden, wenn man die Coefficienten μ_{kl} durch die Gleichung

$$(\mathrm{III}_3) \qquad \mu_{kl} = \frac{u_{kl}}{4 - 2\int_0^\infty \frac{\alpha_k^2 + \alpha_l^2}{(\alpha_k^2+s)(\alpha_l^2+s)} \cdot \frac{ds}{D}}$$

bestimmt. Es soll übrigens k und l gleich 1, 2, 3, . . n sein und $k < l$.

8. Die dritte und letzte von den in Nr. 5 erwähnten φ Funktionen wird schliesslich dem Falle entsprechen, wo das Ellipsoid seine Form verändert ohne Aenderungen in den Richtungen seiner Axen.

Es wird erstens

$$\left(\frac{d\varphi}{d\sigma}\right)_0 = -\Sigma \nu_k . \alpha_k \frac{dE_0}{d\alpha_k}$$

Es wird ferner

$$\frac{d\varphi_0}{d\xi_k} = \sum_p^p \nu_p \int_0^\infty \alpha_p \frac{d}{d\alpha_p}\left(\frac{1}{D}\frac{dE}{d\xi_k}\right) . ds,$$

und somit auch, weil $\xi_k \frac{dE_0}{d\xi_k}$ gleich $-\alpha_k \frac{dE_0}{d\alpha_k}$

und $\frac{dE}{d\xi_k}$ gleich $\xi_k \frac{d^2E}{d\xi_k^2}$ ist,

$$\frac{dE_0}{d\xi_k}\frac{d\varphi_0}{d\xi_k} = -\alpha_k \frac{dE_0}{d\alpha_k} \cdot \sum_p^p \nu_p \int_0^\infty \alpha_p \frac{d}{d\alpha_p}\left(\frac{1}{D}\frac{d^2E}{d\xi_k^2}\right) ds.$$

Der Coefficient von $\alpha_k \frac{dE_0}{d\alpha_k}$ in dem Ausdrucke (2a) wird sodann

$$-\sum_p^p \nu_p \int_0^\infty \alpha_p \frac{d}{d\alpha_p}\left(\frac{1}{D}\frac{d^2E}{d\xi_k^2}\right) ds - 4\nu_k;$$

während der entsprechende Coefficient in der Entwicklung von $-\frac{dE_0}{dt}$ (2b) gleich $-v_k$ ist. Um die Coefficienten ν_k zu bestimmen, stellt man also die folgende Gleichung auf:

$$(\mathrm{III_s}) \quad \sum_p^p 2\nu_p \int_0^\infty \alpha_p \frac{d}{d\alpha_p}\left(\frac{1}{(\alpha_k^2+s)D}\right) ds + 4\nu_k = v_k;$$

aus welcher sich dann n Gleichungen bilden lassen, indem man k die Werthe 1, 2, 3, . . n beilegt.

9. Dass die Coefficienten μ_k und μ_{kl}, sofern $n \gtreqless 2$ ist, bestimmte und endliche Werthe annehmen werden, erkennt man mit Leichtigkeit, wenn man sich der Gleichung

$$(4) \qquad \sum_{1,n}^{p} \int_{0}^{\infty} \frac{ds}{(\alpha_p^{\,2}+s)D} = \frac{2}{D}$$

für den besonderen Fall $s = 0$ bedient. Die Richtigkeit der genannten Gleichung haben wir übrigens in einem früheren Aufsatze schon dargethan.

In der Gleichung (III_1), die den Coefficient μ_k bestimmt, lässt sich dadurch der Nenner in die folgende Form bringen

$$\sum_{1,n}^{p}{}^{(k)} \int_{0}^{\infty} \frac{2ds}{(\alpha_p^{\,2}+s)D};$$

wo der Index (k) bezeichnen soll, dass in der Summe der Werth $p = k$ ausgeschlossen werden muss. Ebenso geht in der Gleichung (III_2), welche μ_{kl} bestimmt, der Nenner in den Ausdruck

$$\sum_{1,n}^{p}{}^{(kl)} \int_{0}^{\infty} \frac{2ds}{(\alpha_p^{\,2}+s)D} + \int_{0}^{\infty} \frac{4sds}{(\alpha_k^{\,2}+s)(\alpha_l^{\,2}+s)D}$$

über; wo der Index (kl) ähnlicherweise bezeichnen soll, dass die Werthe $p = k$ und $p = l$ bei der Summation auszuschliessen sind. — Aus dem Obigen erhellt, dass die beiden Nenner unter der gegebenen Voraussetzung positive Werthe erhalten werden, die auch von Null verschieden sind.

10. Untersuchen wir zuletzt auch die Eigenschaften des Systems von linearen Gleichun-

gen (III_s), mittelst welcher die Coefficienten ν_k sich bestimmen lassen. Drei Fälle werden wir dann besonders hervorheben: den Fall dass die Summe von den v gleich Null sei, und ferner dass die v oder die α alle gleich seien.

Wie im Falle des gewöhnlichen Ellipsoids nehmen wir an, dass das Volum mit dem Produkte der Halbaxen proportional ist. Es folgt hieraus, dass das Volum ungeändert bleibt, wenn die Axen auf solche Weise variiren, dass $\sum_{1,n}^{k} \frac{d\alpha_k}{\alpha_k} = 0$, das heisst, dass $\sum_{1,n}^{k} v_k = 0$ ist. Giebt man nun in der Gleichung (III_s) dem k die Werthe $1, 2, 3, \ldots s$ und nimmt die Summe, so findet man einfach, wegen der Gleichung (4), dass

$$\sum_{1,n}^{k} \nu_k = 0;$$

denn der Werth der Integralsumme (4) wird für $s = 0$ gleich 2, und sodann von den α unabhängig. Wenn also bei der Variation der Axen das Volum sich ungeändert erhält, mit andern Worten, wenn $\sum_{1,n}^{k} v_k = 0$, so wird auch die Summe der Coefficienten ν_k den Werth Null erhalten.

Wenn die α alle gleich sind, das heisst: in einem Augenblicke, wo das Ellipsoid eine ver-

allgemeinerte Kugel ist, die wieder in ein Ellipsoid übergeht, werden die Coefficienten ν durch die Gleichungen

$$\nu_k = \tfrac{1}{4}\, v_k$$

bestimmt. In diesem Falle wird nämlich das Integral

$$\int_0^\infty \frac{ds}{(\alpha_k^{\,2}+s)D}$$

gleich $\frac{2}{n}$ und mithin von α unabhängig sein; die Integralsummen in der Gleichung (III_3) werden somit wieder herausfallen, und es reducirt sich die dem Index k entsprechende Gleichung des Systemes zu $4\nu_k = v_k$.

In dem Falle der gleichförmigen Erweiterung des Ellipsoids müssen die v alle gleich sein. Es lässt sich dann zeigen, dass die Coefficienten ν auch gleiche Werthe erhalten werden, und dass besonders

$$\nu = \tfrac{1}{4} v.$$

Um dies zu verificiren, genügt es offenbar die Gleichung

$$\sum_{1,n}^{p} \int_0^\infty \alpha_p \frac{d}{d\alpha_p}\left(\frac{1}{(\alpha_k^{\,2}+s)D}\right) ds = 0$$

zu beweisen. Es ist aber

$$(5)\quad \alpha_p \frac{d}{d\alpha_p}\left(\frac{1}{(\alpha_k^2+s)D}\right) = \alpha_k \frac{d}{d\alpha_k}\left(\frac{1}{(\alpha_p^2+s)D}\right),$$

sowohl wenn $p = k$ ist, was unmittelbar einleuchtet, als wenn $p \gtrless k$. Der gegebene Summenausdruck lässt sich mithin auch

$$\alpha_k \frac{d}{d\alpha_k} \sum_{1,n}^{p} \int_0^\infty \frac{ds}{(\alpha_p^2+s)D}$$

schreiben, dessen Werth gleich Null sein muss, weil die Integralsumme, wie wir schon wissen, von den α unabhängig ist. Die Gültigkeit der obigen Behauptung ist somit bewiesen.

11. Wir haben zuvor gezeigt, dass im Falle der Aehnlichkeit die v, und ebenso die Coefficienten ν, gleiche Werthe erhalten werden; es war ferner $\nu = \frac{1}{4}v$. Das Geschwindigkeitspotential nimmt sodann die folgende Form an:

$$\varphi = -\tfrac{1}{4}v \sum_{1,n}^{k} \left(\int_\sigma^c \alpha_k \frac{d}{d\alpha_k}\left(\frac{1}{D}\right) ds - \int_\sigma^\infty \alpha_k \frac{d}{d\alpha_k}\left(\frac{E}{D}\right) ds\right).$$

Dieser Ausdruck lässt sich indessen vereinfachen, wie wir jetzt zeigen werden.

Wegen den Gleichungen (5) und (4) findet man erstens

$$\sum_{1,n}^{k} \int_\sigma^\infty \alpha_k \frac{d}{d\alpha_k}\left(\frac{1}{(\alpha_p^2+s)D}\right) ds = \alpha_p \frac{\partial}{\partial \alpha_p}\left(\frac{2}{D}\right)_\sigma;$$

wo dann an rechter Seite σ unter der Differentiation in Beziehung auf α_p als eine Constante aufgefasst werden muss. Es ist aber

$$\alpha_p \frac{\partial}{\partial \alpha_p} \left(\frac{1}{D}\right)_\sigma = \frac{\sigma}{(\alpha_p^2 + \sigma) D_\sigma},$$

und man schliesst sodann, da $E_\sigma = 1$, dass die Summe

$$(6) \qquad \sum_{1,n}^{k} \int_\sigma^\infty \alpha_k \frac{d}{d\alpha_k} \left(\frac{E}{D}\right) ds = \frac{2\sigma}{D_\sigma}$$

ist. Es wird andererseits

$$\sum_{1,n}^{k} \alpha_k \frac{d}{d\alpha_k} \left(\frac{1}{D}\right) = -2s \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{D}\right),$$

und folglich durch Einsetzung und theilweise Integration:

$$(6^1) \qquad \sum_{1,n}^{k} \int_\sigma^c \alpha_k \frac{d}{d\alpha_k} \left(\frac{1}{D}\right) ds = -2 \frac{c}{D_c} + 2 \frac{\sigma}{D_\sigma} + 2 \int_\sigma^c \frac{ds}{D}.$$

Indem man jetzt die Werthe der zwei Integralsummen (6) und (6¹) in der Potentialgleichung substituirt, findet man endlich als Geschwindigkeitspotential im Falle der Aehnlichkeit:

$$(\mathrm{II}_4) \qquad \varphi = \tfrac{1}{2} v \left(\frac{c}{D_c} - \int_c^\infty \frac{ds}{D}\right).$$

Wenn man hier schliesslich die willkührliche Additions-Constante entfernt, wird man noch einfacher

$$(\mathrm{II}_4^1) \qquad \varphi = -\tfrac{1}{2} v \int_c^\infty \frac{ds}{D}.$$

erhalten. Dasselbe Resultat wird übrigens entstehen, wenn man dem c den Werth ∞ beilegt, und wenn zugleich $n \gtreqless 3$ ist.

12. Wir haben oben das Geschwindigkeitspotential in dem Falle der Aehnlichkeit aus dem allgemeineren Potential abgeleitet, welches der Formveränderung des verallgemeinerten Ellipsoids entspricht. Dieser Fall ist aber als der einfachste anzusehen, obschon wir erst durch den angegebenen Umweg das Resultat gefunden haben; weil er auch, wie wir glauben, von besonderer Wichtigkeit ist, werden wir hier den aufgestellten Potentialausdruck mehr unmittelbar verificiren.

Wir stellen erst den Satz auf, dessen Gültigkeit sich übrigens leicht erkennen lässt: dass, wenn ω der partiellen Differentialgleichung $\Delta^n \omega = \text{Const.}$ genügt, die hieraus abgeleitete neue Funktion

$$\chi = \tfrac{1}{2} \sum_{1,n}^{k} \xi_k \frac{d\omega}{d\xi_k}$$

derselben Differentialgleichung $\Delta^2\chi = \text{Const.}$ Genüge leisten wird.

Dies vorausgesetzt, leitet man aus ψ_σ mit Hülfe der angegebenen Operation, als Integral der partiellen Differentialgleichung $\Delta^2\varphi = 0$ die folgende neue Funktion ab:

$$-\int_\sigma^\infty E\,\frac{ds}{D}.$$

Man schliesst sodann, dass auch das erste in ψ_σ enthaltene Integral

$$\int_\sigma^\infty \frac{ds}{D}$$

derselben Differentialgleichung Genüge leisten wird; dass also die beiden Theile, aus welchen ψ_σ zusammengesetzt ist, Integrale der genannten Differentialgleichung sind.

Die in voriger Nr. aufgestellte φ Function genügt also der gegebenen partiellen Differentialgleichung. Sie befriedigt ausserdem der Bedingungsgleichung, die sich auf die Oberfläche bezieht. Weil nämlich hier, im Fall der Aehnlichkeit, $-\frac{dE_0}{dt}$ gleich

$$-v\sum_{1,n}^{k}\alpha_k\frac{dE_0}{d\alpha_k} = 2vE_0 = 2v$$

ist, und weil auch die gewählte φ Funktion von den ξ und von σ abhängt, lässt sich die Bedingungsgleichung auf folgende Weise schreiben:

$$\sum_{1,n}^{k} \frac{d\varphi_0}{d\xi_k} \frac{dE_0}{d\xi_k} + 4\left(\frac{d\varphi}{d\sigma}\right)_0 = 2v.$$

Der Summenausdruck wird nun verschwinden, weil φ_0 von den ξ unabhängig ist. Man sieht ferner unmittelbar, dass $\left(\frac{d\varphi}{d\sigma}\right)_0$ den Werth $\frac{v}{2}$ erhalten wird, und die Bedingung in Beziehung auf die Oberfläche ist somit erfüllt.

Zweiter Aufsatz.

1. Von einer einzigen Funktion ψ_σ haben wir in dem Vorhergehenden die Potentiale in den drei Fällen abgeleitet, die sich auf die besondere Bewegung und die Formänderung eines in einem unelastischen und unbegrenzten ruhenden Medium eingesenkten Ellipsoids beziehen. Es lässt sich ferner hieraus das Geschwindigkeitspotential in dem allgemeinsten Falle der Bewegung eines veränderlichen Ellipsoids des Raumes R_n bilden, indem man die partiellen Potentiale auf dem Wege der Summation zusammensetzt.

Auf ähnliche Weise wird man auch von einer einzigen Funktion ψ_0 die Potentiale für ei-

nen inneren ellipsoidischen Raum ableiten können, wenn die Bewegung der umgebenden, ellipsoidisch geformten Hülle entweder eine fortschreitende oder eine drehende ist, oder endlich wenn sie stetig ihre Gestalt verändert ohne Aenderung des eingeschlossenen Flüssigkeitsraumes, mit anderen Worten, ohne Aenderung der Funktion V oder

$$\frac{\Gamma(\frac{1}{2})^n}{\Gamma(1+\frac{n}{2})} \cdot \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n.$$

Aus dieser letzten Bedingung, die mit der Incompressibilität des flüssigen Mediums in Verbindung steht, wird übrigens auch geschlossen,

dass $\sum_{1,n}^{k} \frac{1}{\alpha_k} \frac{d\alpha_k}{dt} = 0$, das heisst, dass

$$\sum_{1,n}^{k} v_k = 0$$

ist, sofern überhaupt eine Aenderung der Form angenommen werden soll.

Aus den drei partiellen Potentialen lässt sich ferner auch hier das Geschwindigkeitspotential in dem allgemeinsten Falle der Bewegung auf dem Wege der Summation zusammensetzen, wenn nur die obenstehende Bedingung in Beziehung auf die Aenderung der Form erfüllt ist.

Auch in dem Falle eines inneren ellipsoidischen Raumes wird sich die früher gegebene Regel für die Bildung der die partiellen Potentiale ausdrückenden Integrale aus einer einzigen

Grundfunktion als noch gültig bestätigen. Jeder von den entsprechenden Potentialen, welche die Flüssigkeitsbewegungen in dem inneren Raume ausdrücken, wird eine lineare und homogene Funktion von den Grössen m_k oder m_{kl} oder n_k sein, deren Coefficienten auf ähnliche Weise aus einem gemeinschaftlichen Integrale ψ_0 gebildet werden, wie in der negativ genommenen Variation von E_0, $-\delta E_0$, die Coefficienten von u_k, u_{kl} und v_k, abgesehen von dem hier vorkommenden Faktor dt. Die m_k, m_{kl}, n_k treten ferner als lineare und homogene Funktionen respective von den u_p, u_{pq}, v_p auf, und insbesondere wird m_k mit u_k und m_{kl} mit u_{kl} proportional sein.

Was das Grundintegrale ψ_0 betrifft, so genügt es der partiellen Differentialgleichung $\Delta^2\psi_0 = \text{Const.}$, wo der Werth der Constante doch nicht Null ist, wie vorher, sondern von Null verschieden, gleich -4; die daraus gebildeten partiellen Potentiale werden dagegen der Gleichung $\Delta^2\varphi = 0$ Genüge leisten, welche nothwendig erfüllt werden muss, wenn die Bedingung der Inkompressibilität bestehn, zugleich auch ein Geschwindigkeitspotential angenommen werden soll.

2. Weil in den drei partikulären Fällen φ von einer Function ψ_0 abgeleitet werden soll, die nicht von σ abhängt, so wird jetzt φ mit φ_0 identisch sein. Das linke Glied der Bedingungs-

gleichung in Beziehung auf die Oberfläche lässt sich dann einfacher durch

$$\sum_{1,n}^{k} \frac{dE_0}{d\xi_k} \frac{d\varphi_0}{d\xi_k}$$

darstellen, während das Glied an rechter Seite des Gleichheitszeichens, wie früher, je nach dem Falle gleich

$$(I^1)\ \Sigma u_k \frac{dE_0}{d\xi_k}, -\Sigma\Sigma u_{kl}\left(\xi_l \frac{dE_0}{d\xi_k} - \xi_k \frac{dE_0}{d\xi_l}\right), -\Sigma v_k . \alpha_k \frac{dE_0}{d\alpha_k}$$

ist, wo dann $\Sigma v_k = 0$.

Der aufgestellten Regel gemäss würde man die gesuchten Potentiale auf folgende Weise bestimmen. Es werden die φ gleich

$$(I)\ \Sigma m_k \frac{d\psi_0}{d\xi_k}, -\Sigma\Sigma m_{kl}\left(\xi_l \frac{d\psi_0}{d\xi_k} - \xi_k \frac{d\psi_0}{d\xi_l}\right), -\Sigma n_k . \alpha_k \frac{d\psi_0}{d\xi_k};$$

wo die Doppelsumme über jede von den $\frac{n(n-1)}{2}$ Combinationen (k, l) auszudehnen ist, welche der Bedingung $k < l$ genügt. Die zwei ersten φ Funktionen werden offenbar der gegebenen Differentialgleichung $\Delta^2\varphi = 0$ Genüge leisten, weil $\Delta^2\psi_0 =$ Const., gleich -4; dasselbe wird auch mit der letzten Funktion der Fall sein, weil die Constante von den α unabhängig ist.

Die drei Potentiale dürften mithin in entwickelter Form die folgenden Werthe annehmen:

$$(\mathrm{II}_1) \qquad \varphi = -\Sigma m_k \int_0^\infty \frac{dE}{d\xi_k} \frac{ds}{D},$$

$$(\mathrm{II}_2) \qquad \varphi = \Sigma\Sigma m_{kl} \int_0^\infty \left(\xi_l \frac{dE}{d\xi_k} - \xi_k \frac{dE}{d\xi_l}\right) \frac{ds}{D},$$

$$(\mathrm{II}_3) \qquad \varphi = -\Sigma n_k \left(\int_0^c \alpha_k \frac{d}{d\alpha_k}\left(\frac{1}{D}\right) ds - \int_0^\infty \alpha_k \frac{d}{d\alpha_k}\left(\frac{E}{D}\right) ds\right);$$

wo dann m_k mit u_k und m_{kl} mit u_{kl} proportional sind, während die n_k als lineare Funktionen von den v_p auftreten würden.

3. Weil in der Bedingungsgleichung das Glied $4\left(\frac{d\varphi}{d\sigma}\right)_0$ hier fehlt, leitet man aus der Gleichung, welche μ_k bestimmt, die entsprechenden Werthe von den Coefficienten m_k ab:

$$(\mathrm{III}^1) \qquad m_k = -\frac{u_k}{2\int_0^\infty \frac{ds}{(\alpha_k^2 + s)D}};$$

was übrigens auch unmittelbar mit Leichtigkeit zu erkennen ist. Durch Einsetzung findet man

also im Falle der fortschreitenden Bewegung.

$$(\mathrm{II}_1^1) \qquad \varphi = \sum_{1_1^n}^{k} u_k \xi_k.$$

Es darf dieses auch erwartet werden, weil jetzt im Inneren der Flüssigkeit jeder Punkt dieselbe durch die Geschwindigkeiten u_k bestimmte Bewegung annehmen muss, wie die ellipsoidische Fläche, welche sie umschliesst.

4. Auf ähnliche Weise wird man im Falle der Drehung

$$(\mathrm{III}_2) \qquad m_{kl} = -\frac{u_{kl}}{2\int_0^\infty \frac{(\alpha_k^2+\alpha_l^2)ds}{(\alpha_k^2+s)(\alpha_k^2+s)D}}$$

erhalten; die Einsetzung gibt folglich

$$(\mathrm{II}_2^1) \qquad \varphi = \Sigma\Sigma u_{kl} \frac{\alpha_k^2-\alpha_l^2}{\alpha_k^2+\alpha_l^2} \cdot \xi_k \xi_l,$$

wo die doppelte Summation über alle $\frac{n(n-1)}{2}$ Combinationen (k, l) auszudehnen ist, in welchen $k < l$. Wenn $n = 3$ wäre, und man als Drehungscomponenten u_{12}, u_{23}, u_{31}, angenommen hätte statt u_{12}, u_{23}, u_{13}, so müsste man auch in der obigen Formel (kl) gleich 12, 23, 31 setzen.

Die durch die Drehung der ellipsoidischen Hülle in der inneren, anfänglich ruhenden, Flüssigkeit hervorgerufene Bewegung ist jetzt nicht selbst als eine Drehung anzusehen, was mit einer Potentialbewegung unvereinbar wäre. Sie ist als eine oscillatorische Bewegung aufzufassen, indem die fluiden Massen von einigen Stellen weggedrängt werden, nach anderen wegen des äusseren Druckes zurückströmen müssen: während die umgebende Hülle eine wirkliche Rotation ausführt, wird die Bewegung der flüssigen Oberfläche nur eine scheinbare Rotation sein, indem sie allein in einer fortschreitenden Wellenbewegung besteht. Im Falle der verallgemeinerten Kugel, zum Beispiel des cirkulären Cylinderschnittes ($n = 2$), nimmt die Funktion φ den Werth Null an, dass heisst, die eingeschlossene Flüssigkeit wird sich unter den Umdrehungen stets in Ruhe erhalten.

Dass die Bewegung möglich ist, ohne Einführung von beschleunigenden Kräfte, wenn infolge des äusseren, von der umgebenden Hülle aus wirkenden, Druckes der Druck im Mittelpunkte hinlänglich grosse Werthe erhalten wird, geht mit Leichtigkeit aus der Druckgleichung hervor. In dieser Gleichung:

$$(1) \qquad \frac{p}{q} = T - \tfrac{1}{2}\Delta\varphi^2 - \frac{d\varphi}{dt},$$

in welcher T nur von der Zeit abhängt, wird erstens $\Delta\varphi^2$ eine homogene Funktion zweiter Ordnung von den ξ sein; weil ferner

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \Sigma\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_k}\frac{d\xi_k}{dt},$$

oder anders geschrieben (vorig. Aufs. Nr. 2)

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \Sigma\Sigma\, u_{kl} \left(\xi_l \frac{d\varphi}{d\xi_k} - \xi_k \frac{d\varphi}{d\xi_l}\right),$$

so wird auch $\frac{d\varphi}{dt}$ eine homogene Funktion von den ξ sein und von zweiter Ordnung. Wenn also im Mittelpunkte der Werth von p, infolge des äusseren Druckes, gleich P ist, so wird man T gleich $\frac{P}{q}$ finden, und es ergibt sich sodann, dass auch die Druckdifferenz

$$p - P$$

durch eine homogene Funktion zweiter Ordnung von den ξ dargestellt werden wird. Wenn also P hinlänglich gross genommen werden kann, so wird überall im Innern der Flüssigkeit, die in einem endlichen ellipsoidischen Raume eingeschlossen ist, der Druck p positive Werthe erhalten, und die oscillatorische Bewegung infolge der Rotation zeigt sich mithin als möglich.

5. Wenn schliesslich die ellipsoidisch geformte Hülle ihre Form verändert, indem die Richtungen der Axen dieselben bleiben und der Unzusammendrückbarkeit wegen das Volum sich erhält, so sind die Coefficienten n durch die Gleichungen

$$(\mathrm{III}_3) \qquad \sum^{p} 2n_p \int_0^\infty \alpha_p \frac{d}{d\alpha_p} \left(\frac{1}{(\alpha_k^2 + s)D}\right) ds = v_k$$

zu bestimmen, indem man dem k die Werthe 1,2,3,..n beilegt. Auch werden diese Gleichungen in der That nicht für endliche Werthe von den v befriedigt, wenn nicht $\Sigma v_k = 0$; denn die Summe der linken Glieder für $k = 1, 2, 3, .. n$ wird infolge des Nr. 10 des ersten Aufsatzes eine lineäre Funktion von den n sein, dessen Coefficienten die Werthe Null erhalten.

Statt hieraus die n mittelst eines beliebigen von ihnen, der auch gleich Null gesetzt werden konnte, zu bestimmen, wird es bequemer sein. die Funktion φ zu bilden, nachdem man erst aus der obenstehenden Gleichung die folgende abgeleitet hat

$$\sum_{p}^{p} 2n_p \int_0^\infty \alpha_p \frac{d}{d\alpha_p}\left(\frac{E}{D}\right) ds = \Sigma v_k \xi_k^2,$$

deren Gültigkeit übrigens sehr leicht zu erkennen ist. Man findet sodann:

$$(\mathrm{II}_3^1) \quad \varphi = -\sum_{k}^{k} n_k \int_0^c \alpha_k \frac{d}{d\alpha_k}\left(\frac{1}{D}\right) ds + \tfrac{1}{2}\Sigma v_k \xi_k^2,$$

oder endlich, indem man c gleich 0 wählt,

$$(\mathrm{II}_3^2) \qquad \varphi = \tfrac{1}{2}\sum_{k}^{k} v_k \xi_k^2, \quad \sum_{k}^{k} v_k = 0.$$

Auch in diesem Falle wird es sich ergeben, dass die Druckdifferenz

$$p - P$$

durch eine homogene Funktion zweiter Ordnung von den ξ sich darstellen lässt, wenn keine beschleunigende Kräfte wirken, und P der Druck im Mittelpunkte ist. Wenn dieser hinlänglich gross ist, wird der Druck p überall im inneren Raume positiv sein, und die Bewegung ist sodann auch möglich.

---

6. Die verschiedenen einfachen Probleme, welche mit dem zusammengesetzten Probleme von den Bewegungen einer incompressiblen Flüssigkeit in einem inneren ellipsoidischen Raume in Verbindung stehen, hängen somit in ganz ähnlicher Weise mit einer Funktion ψ_0 zusammen, wie die entsprechende Reihe von Problemen, die sich auf den äusseren Raum beziehen, mit der Funktion ψ_σ; in der früher behandelten Aufgabe, welche die Verallgemeinerung des ersten Dirichletschen Falles, das ruhende Ellipsoid in der bewegten, unendlichen Flüssigkeit umfasst, treten aber die beiden ψ Funktionen zu gleicher Zeit auf.

In der Problemenreihe, deren Gegenstand der innere, ellipsoidische Raum ist, zeigt sich ausserdem eine gewisse Unvollständigkeit, die aus der bis jetzt aufgestellten Bedingung der Incompressibilität und aus der Endlichkeit des eingeschlossenen Raumes herrührt; die aber im Falle des äusseren Raumes nicht zum Vorschein kommen wird, weil man sich die in unendlicher Ferne unendlich wenig bewegte Flüssigkeit durch eine geschlossene Fläche begrenzt denken kann, die gleichzeitig mit dem Ellipsoid ihre Form wird ändern können. Es besteht sodann auch

eine Unvollständigkeit in dem gegenseitigen Entsprechen zwischen den zwei Reihen von Problemen, die sowohl mit den Grundbedingungen als mit der Wahl der Funktion ψ und der Bildungsweise der abgeleiteten Funktionen in dem genauesten Zusammenhang steht.

7. Die Probleme, die sich auf den innern Raum beziehen, könnten mit Aufgebung der Bedingung der Incompressibilität für jede Bewegung des Ellipsoids, die mit der Erhaltung der ellipsoidischen Form vereinbar ist, mit Leichtigkeit behandelt werden, wenn man nur die Absicht hätte, die genannte Reihe der Probleme mit entsprechender Vollständigkeit, aber ohne Verbindung mit der andern, zu untersuchen. Wir denken uns dann die Dichtigkeit der eingeschlossenen unelastischen Flüssigkeit, wie früher, von dem Drucke unabhängig; sie ist aber entweder konstant oder wenigstens nur mit der Zeit, zum Beispiel mit der Erhöherung der Temperatur, veränderlich; eine Aenderung des Volumes wird somit erlaubt sein, ohne Aufhebung der Continuität in dem flüssigen Inneren zu veranlassen.

Infolge der fortschreitenden Bewegung wird der Zuwachs der Funktion E_0, abgesehen von einem Faktor dt, eine beliebige lineare homogene Funktion von den ξ sein; die Funktion φ wird ebenso, wie wir gesehen haben, eine lineare und homogene Funktion, deren Coefficienten ferner zu bestimmen sind, und übrigens beliebige Werthe werden annehmen können. — Der Zuwachs im Falle einer drehenden Bewegung nimmt die Form einer mit dem Elemente dt multiplicirten homogenen Funktion zweiter Ordnung an, die nur die rectangulären Glieder enthält, wie früher aber mit beliebigen Coefficienten. Das ent-

sprechende Potential φ wird eben dieselbe Form besitzen, wie aus dem Früheren hervorgeht; und auch hier werden die Coefficienten ganz beliebige Werthe annehmen können. — Wenn schliesslich eine Formänderung stattfindet, wird der Zuwachs im Zeitelemente das Produkt von dt und eine beliebige homogene Funktion zweiter Ordnung mit quadratischen Gliedern sein. Wir haben ausserdem gesehen, dass in dem besonderen Falle, wo das Volum sich unter den Aenderungen erhält, die Funktion φ ebenso durch eine ähnliche Funktion von den ξ wird dargestellt werden, nur dass die Allgemeinheit, der gestellten Bedingung wegen, die Beschränkung erleidet, dass die Summe der Coefficienten gleich Null sei. Wir werden nun zeigen, dass wenn die Bedingung der Unveränderlichkeit des Volumens und der Incompressibilität der Flüssigkeit, so wie oben angegeben, aufgehoben wird, diese letzte Beschränkung in der Allgemeinheit zu gleicher Zeit wegfällt.

Während also die Variation der Funktion E_0 infolge der allgemeinsten Bewegung des Ellipsoids, welche mit der Erhaltung der ellipsoidischen Form vereinbar ist, abgesehen von dem Faktor dt, die allgemeinste Funktion zweiter Ordnung repräsentiren wird, welche kein von den ξ unabhängiges Glied enthält, so wird ebenso das entsprechende Potential durch die allgemeinste Funktion zweiter Ordnung ohne das letzte Glied dargestellt werden können. Und in den zwei Funktionen werden die Summe der linearen Glieder, die Summe der rektangulären, und die Summe der quadratischen, wenn die Coefficienten gehörig gewählt werden, einander entsprechen; wie sie die Translationen, die Drehungen und die Formänderungen des verallge-

meinerten Ellipsoids bezeichnen, und die daraus hervorgehenden Flüssigkeitsbewegungen in dem inneren Raume.

8. Um die Gültigkeit des oben Behaupteten zu beweisen, haben wir nur die Gleichung

$$(\Pi_4^1) \qquad \varphi = \tfrac{1}{2}\Sigma v_k \xi_k^2$$

zu untersuchen, wo die Beschränkung, dass $\Sigma v_k = 0$ sei, hier aufgegeben wird.

Es ist dann erstens

$$\Delta^2\varphi = \Sigma v_k = \frac{1}{V}\frac{dV}{dt};$$

wenn man mit V das Volum des verallgemeinerten Ellipsoids bezeichnet (Nr. 1). Andererseits wird die Continuitätsgleichung, wenn die Geschwindigkeitscomponenten durch die partiellen Dirivirten einer einzigen Funktion φ dargestellt werden können, und die Dichtigkeit q nur mit der Zeit veränderlich ist,

$$(2) \qquad \Delta^2\varphi = -\frac{1}{q}\frac{dq}{dt}.$$

Es kommt sodann

$$qV = \text{Const.},$$

das heisst, es muss die Dichtigkeit der Flüssigkeit nur so geändert werden, dass die eingeschlossene Masse dieselbe bleibt.

Weil ferner

$$\Sigma \frac{d\varphi}{d\xi_k} \frac{dE_0}{d\xi_k} = -\Sigma v_k . \alpha_k \frac{dE_0}{d\alpha_k},$$

indem die beiden Glieder gleich $\Sigma 2v_k \frac{\xi_k^2}{\alpha_k^2}$ sind,

so ist auch die Bedingung, die sich auf die Oberfläche bezieht, erfüllt, und die gegebene φ Gleichung (II_4^1) entspricht somit der allgemeinen Formänderung des verallgemeinerten Ellipsoids.

Infolge der Voraussetzung, dass die Dichtigkeit q von dem Drucke unabhängig sei, wird man, um den Druck im Inneren zu bestimmen, die in Nr. 4 aufgestellte Gleichung, ganz wie in den übrigen Fällen, zu benutzen haben. Und es ergiebt sich sodann, dass auch in diesem Falle die Druckdifferenz $p - P$ als eine homogene Funktion von dem ξ von zweiter Ordnung dargestellt werden wird; woraus wieder geschlossen wird, dass der Druck in jedem Punkte der Flüssigkeit positive Werthe erhalten kann.

Verzeichniss der bei der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangenen Druckschriften.

November 1873.

Nature. Nr. 209—213.

R. Wolf, Astronomische Mittheilungen. XXXIII.

Don Cecilio Pujazon, Anales del Observatorio de Marina de San Fernando. Seccion 2a. Observaciones meteorologicas. Anno 1871. San Fernando. 1871 fol.

Resumen anual 1870 u. Prológo. fol.

G. van der Mensbrugghe, sur la tension superficielle des liquides, etc. Second mémoire. Bruxelles. 1873. 4.

Astronomical Observations and Researches. Observatory of Trinity College. II. Part. Dublin. 1873. 4.

Monatsbericht der Berliner Akademie. Juni, Juli, August 1873. Abhandlungen der Berliner Akademie 1872. Berlin. 1873. 4.

Alfred Clebsch. Versuch einer Darlegung und Würdigung seiner wissenschaftlichen Leistungen von einigen seiner Freunde. Leipzig. 1873. 8.

Sitzungsberichte der physikalisch-medicinischen Societät zu Erlangen. Hft. 5. Nov. 1872 bis August 1873. Erlangen. 1873. 8.

Società R. di Napoli:

Atti dell' Accademia delle Scienze fisiche e matematiche. Vol. V. Napoli. 1873. 4.

Rendiconto dell' Accademia. Anno IX. Fasc. 1—12. 1870. Anno X. Fasc. 1—12. 1871. Anno XI. Fasc. 1—12. 1872. 4.

G. F. Schoemann, griechische Alterthümer. Bd. 2. Berlin. 1873. 8.

A. Kölliker, die normale Resorption des Knochengewebes und ihre Bedeutung für die Entstehung der typischen Knochenformen. Leipzig. 1873. 4.

Archiv für schweizerische Geschichte. Bd. 18. Zürich. 1873. 8.

C. W. Borchardt, über Deformationen elastischer isotroper Körper, etc. Berlin. 1873. 8.

Annales de l'Observatoire R. de Bruxelles. Bogen 5. 1873.

Sitzungsberichte der philosophisch-philologischen und historischen Classe der k. bayerischen Akademie der Wiss. zu München. 1872. Hft. IV. V. 1873. Hft. I. II. III. der mathematisch-physikalischen Classe. 1871. Hft. III. 1873. Hft. I. München. 1872. 73. 8.

W. Beetz, der Antheil der königl. b. Akad. d. Wiss. an der Entwickelung der Electricitätslehre. Ebd. 1873. 4.

Verzeichniss der Mitglieder der k. b. Akademie. 1873.

K. v. Prantl, Gedächtnissrede auf Fr. Ad. Trendelenburg. München 1873. 4.

J. v. Döllinger, Rede am 25. Juli 1873. München 1873. 4.

ТРУДЫ. Т. II ВЫПУСКЪ II. САНКТПЕТЕРБУРГЪ. 1873. 8.

The Transactions of the Linnean Society of London. Vol. XXVIII. P. 3. Vol. XXIX. Part 2. London 1873. 4.

Journal of the Linnean Soc. Botany. Vol. XIII. No. 68—72. — Zoology. Vol. XI. No. 55. 56. Ebd. 1872. 73. 8.

Proceedings of the Linnean Soc. Session 1872—73. 8.

List of the Linnean Soc. 1872. 8.

Progress Reports and final Report of the Exploration Committee of the R. Society of Victoria. 1872. Fol.

Mittheilungen der deutschen Gesellsch. für Natur und Völkerkunde Ostasiens, herausg. von dem Vorstande. Hft. 2. Juli 1873. Yokohama. 8. Fol.

Daily Bulletin of Weather-Reports, Signal-Service U. S. Army, with the synopses, probabilities, and facts for the month of September 1872. Washington 1873. 4.

Mémoires de la Société Nationale des Sciences Naturelles de Cherbourg. T. XVII. (Deuxième Série. T. VII.) Paris, Cherbourg 1873. 8.

Catalogue de la Bibliothèque de la Société N. des Sciences Nat. de Cherbourg. Deuxième Partie. 1re Livraison. 31 Dec. 1872. Ebd. 1873. 8.

Verhandlungen des naturf. Vereines in Brünn. Bd. XI. 1872. Brünn 1873. 8.

IV. Bericht der naturwiss. Gesellsch. zu Chemnitz. Vom 1. Jan. 1871 — 31. Dec. 1872. Chemnitz 1873. 8.

Bulletin de l'Acad. R. des Sciences, des Lettres, et des Beaux-Arts de Belgique. 42e année, 2e série, tome 36. Nr. 9 et 10. Bruxelles 1873. 8.

M. Albert Lancaster, note sur le tremblement de terre ressenti le 22. Oct. 1873 dans la Prusse Rhénane et en Belgique.

Astronomische Bestimmungen für die Europäische Gradmessung aus den Jahren 1857—1866. Herausg. von Dr. J. J. Baeyer. Leipzig 1873. 4.

Proceedings of the London mathematical Society. Nos. 62, 63. 8.

Hermann von Schlagintweit-Sakünlünski, über Nephrit nebst Jadeït and Saussurit im Künlün-Gebirge. München 1873. 8.

Die Meteoriten
der Universitäts-Sammlung zu Göttingen
Januar 1874.

I. Meteorsteine.

	Fall-Zeit		Localität	Gewicht in Grm.*)	
	Datum	Jahr		Haupt-Stück	Zahl der Exempl.
1	7. Nov.	1492	Ensisheim, Elsas	106	4
2	13. Sept.	1766	Albareto bei Modena	—	1
3	20. Nov.	1768	Mauerkirchen, Oestreich . . .	1927	2
4	19. Febr.	1785	Eichstädt, Bayern	26	1
5	13. Oct.	1787	Charkow, Russland	32	1
6	24. Juli.	1790	Barbotan, Frankreich	95	2
7	16. Juni.	1794	Siena, Toscana	17	1
8	13. Dec.	1795	Wold Cottage, England . . .	130	2
9	12. März.	1798	Salles, Frankreich	1	1
10	13. Sept.	1798	Benares, Indien.	4	2
11	26. April.	1803	L'Aigle, Frankreich	230	1
12	13. Dec.	1803	Mässing, Bayern	4	1
13	5. April.	1804	Glasgow (High Possil), Schottland	1,5	1
14	15. März.	1806	Alais, Frankreich	1,5	1
15	13. März.	1807	Timochin (Smolensk), Russland	10	2
16	14. Dec.	1807	Weston, Connecticut V. St. . .	10	5
17	19. April.	1808	Casignano bei Parma, Italien .	—	3
18	22. Mai.	1808	Stannern, Mähren	249	3
19	3. Sept.	1809	Lissa, Böhmen	5	1
20	Aug.	1810	Tipperary, Irland	18	1
21	23. Nov.	1810	Charsonville, Frankreich . . .	2	2
22	12. März.	1811	Kuleschowka, Russland . . .	2	2
23	8. Juli.	1811	Berlanguillas, Spanien . . .	2	1
24	15. April.	1812	Erxleben, Preussen	295	2
25	5. Aug.	1812	Chantonnay, Frankreich . . .	201	3
26	10. Sept.	1813	Limerik, Irland	105	3
27	15. Febr.	1814	Bachmut, Jekaterinoslaw, Russland	82	1
28	5. Sept.	1814	Agen, Frankreich	26	1
29	16. Febr.	1815	Duralla, Indien.	17	1
30	3. Oct.	1815	Chassigny (Langres), Frankreich	5	1
31	Juni.	1818	Seres, Macedonien	35,5	3

*) Gewichte unter 1 Gramm sind meist nicht angegeben.

	Fall-Zeit		Localität	Gewicht in Gr...	
	Datum	Jahr		Haupt-Stück	Zahl der Exemr.
32	13. Juni.	1819	Jonzac, Frankreich	—	1
33	13. Oct.	1819	Politz (Gera, Köstritz), Reuss .	5	2
34	12. Juli.	1820	Lixna (Dünaburg), Russland . .	140	2
35	15. Juni.	1821	Juvinas, Frankreich	151	1
36	30. Nov.	1822	Allahabad, Indien	6	1
37	10. Febr.	1825	Nanjemoy, Maryland V. S. . .	5	4
38	14. Sept.	1825	Honolulu, Sandwich-Inseln . .	3,5	1
39	9. Mai.	1827	Nashville. Tennesee, V. St.. .	5	1
40	5. Oct.	1827	Bialystock, Russland	—	1
41	14. Juni.	1828	Richmond, Virginien, V. St. .	6	1
42	8. Mai.	1829	Forsyth, Georgia, V. St. . . .	1,5	1
43	18. Juli.	1831	Vouillé, Frankreich	21	2
44		1832	Umbala, Indien.	1,5	1
45	11. Nov.	1836	Macao, Brasilien	10	1
46	18. April.	1838	Akbupore, Indien	9	1
47	6. Juni.	1838	Chandakapoor. Indien . . .	2,5	1
48	13 Oct.	1838	Capland (Cold Bokkeveld), Afrika	5,5	6
49	13. Febr.	1839	Little Piney. Missouri, V. St. .	1,5	1
50	12. Juni.	1840	Uden, Holland	—	1
51	22. März.	1841	Grüneberg, Schlesien. . . .	1	2
52	12. Juni	1841	Chateau-Renard, Frankreich .	324	1
53	26 April.	1842	Milena, Crostien	11	2
54	25. März.	1843	Bishopville. Süd-Carolina, V. St.	4	2
55	2. Juni.	1843	Utrecht, Holland	1	1
56	16. Sept.	1843	Klein Wenden (Nordhausen), Pr.	2	3
57	29. April.	1844	Killiter, Irland	—	1
58	21. Oct.	1844	Favars, Frankreich.	2	1
59	Gefunden	1846	Assam, Asien	—	1
60	25. Febr.	1847	Jowa, Linn County, V. St. . .	48	4
61	20. Mai.	1848	Castine, Maine, V. St. . . .	—	1
62	31. Oct.	1849	Cabarras County, Nd.-Car., V. St.	30	3
63	30. Nov.	1850	Shalka, Indien	1	2
64	17. April.	1851	Gütersloh, Westphalen . . .	1.5	1
65	23. Jan.	1852	Nellore, Indien.	36	2
66	4. Sept.	1852	Mezö-Madaras, Siebenbürgen .	37	2
67	Gefunden	1852	Mainz, Hessen	43	2
68	2. Dec.	1852	Busti, New Gorakpur, Indien. .	1	1
69	10. Febr.	1853	Girgenti, Sicilien	29	1
70	6. März.	1853	Segowlee, Indien	1	1
71	13. Mai.	1855	Bremervörde, pr. Pr. Hannover	2755	2

	Fall-Zeit		Localität.	Gew. in Grm.	
	Datum	Jahr		Haupt-Stück	Zahl d. Expl.
72	11. Mai.	1855	Insel Oesel, Russland. . . .	14	1
73	7. Juni.	1855	St. Denis-Westrem, Belgien .	50	1
74	5. Aug.	1855	Petersburg, Tennesee, V. St. .	9	3
75	*)	1856?	Durango, Mexico	145	1
76	Gefunden	1856	Hainholtz, Westphalen . . .	73	4
77	12. Nov.	1856	Trenzano, Lombardei	2,5	1
78	28. Febr.	1857	Parnallee, Indien	80	3
79	1. April.	1857	Heredia, San José, Costa Rica.	449	1
80	15. April.	1857	Kaba, Ungarn	1	2
81	10. Oct.	1857	Ohaba, Siebenbürgen	9	2
82	27. Dec.	1857	Pegu, Indien.	21	1
83	19. Mai.	1858	Kakova, Siebenbürgen. . . .	14	1
84	9. Dec.	1858	Ausson (Montrejeau), Frankreich	49	2
85	26. März.	1859	Harrison County, Indiana, V. St.	17	1
86	1. Mai.	1860	New Concord, Ohio, V. St. .	199	2
87	14. Juli.	1860	Dhurmsala, Indien.	52	1
88	7. Oct.	1862	Meno, Neu Strelitz.	35	2
89	2. Juni	1862	Buschhof, Curland	47	1
90	8. Aug.	1862	Pilistfer (Aukoma), Livland. .	53	1
91	11. Aug.	1863	Dacca, Bengalen	3,75	1
92	7. Dec.	1863	Turinnes-la-Grosse, Belgien. .	57	1
93	22. Dec.	1863	Manbhoom, Bengalen	3.5	1
94	12. April	1864	Nerft, Curland	32	1
95	14. Mai	1864	Orgueil, Frankreich	5	3
96	26. Juni	1864	Dogaja Wolja, Volhynien . .	34	1
97	21. Juli	1865	Aumale, Algerien	2	1
98	25. Aug.	1865	Shergotty, Behar, Indien. . .	1,5	2
99	21. Sept.	1865	Muddoor, Mysore, Indien . .	1	1
100	30. Mai	1866	St. Mesmin, Frankr.	0,6	1
101	9. Juni	1866	Knyahinya, Ungarn	154	5
102	30. Jan.	1868	Pultusk, Warschau.	302	2
103	22. Mai	1868	Slavetic, Croatien	4	2
104	Nov.	1868	Danville, Alab., V. St. . . .	5,5	2
105	5. Dec.	1868	Frankfort, Alab., V. St. . . .	4	1
106	1. Jan.	1869	Hessle bei Upsala, Schweden .	174	2
107	5. Mai	1869	Krähenberg, Pfalz	3	2
108	6. Oct.	1869	Stewart County, Georgia, V. St.	5,5	3
109	17. Juni	1870	Ibbenbühren, Westphalen . .	12	2

*) Nachrichten 1867 S. 57.

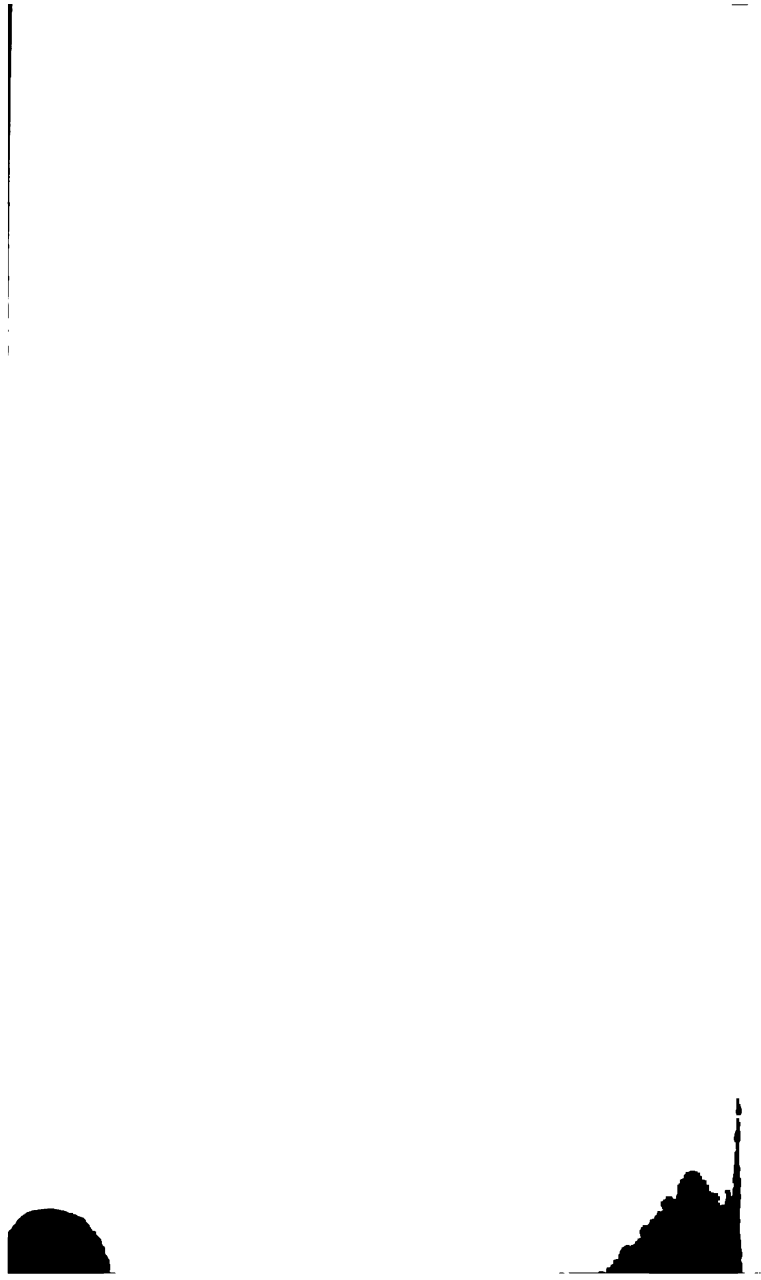
II. Meteoreisen.

	Fundort.	Gewicht in Grm.	
		Haupt-Stück	Zahl der Exempl.
1	Agram, Croatien, gefallen am 26. Mai 1751 .	10	4
2	Augusta County, Virginien, 1871	218	4
3	Braunau, Böhmen, gefallen am 14. Juli 1847 .	108	4
4	Bonanza, Mexico	1,3	1
5	Arva, Ungarn, gefunden 1844	425	7
6	Ashville, Nord-Carolina, V. St., 1839. . . .	0,5	2
7	Atakama, Imilac, Chili, 1827	1840	6
8	Auburn, Alabama	4	1
9	Bahia (Bemdegó), Brasilien, 1816	257	4
10	Bohumilitz, Böhmen, 1829	31	1
11	Brahin, Russland, 1822	17	1
12	Breitenbach, Böhmen, 1861	111	2
13	Brasilien (Buenos-Ayres?)	18	1
14	Burlington, New York, V. St., 1819	62	1
15	Caille, Frankreich, 1828	47	1
16	Capland, Afrika, vom grossen Fischfluss 1837?	14	1
17	Capland, Afrika, 1801	181	4
18	Carthago, Smith County, V. St., 1840 . . .	22	1
19	Chesterville, Süd-Carolina, V. St., 1849. . .	115	1
20	Claiborne, Alabama, V. St., 1838	2,5	1
21	Colorado, Russel Goulch, V. St., 1863 . . .	398	2
22	Colorado, Bear Creek, V. St.	301	2
23	Copiapo, Chili, 1863.	11	1
24	Cosby, Cook C., V. St., 1849 (Sevier-Eisen) .	25	2
25	Cranbourne, Australien, 1861	206	3
26	Dacotah, Indian Territory, V. St., 1863 . . .	58	1
27	Denton County, Texas, 1856	26,5	1
28	Durango, Mexico, 1811	50	1
29	Elbogen, Böhmen, 1811.	35	4
30	Franklin County, V. St.	56	1
31	Green County, Tennessee, V. St., 1818 . . .	69	2
32	Grönland, Baffinsbay, 1819 (von Capt. Sabine).	0,4	1

	Fundort.	Gewicht in Grm.	
		Haupt-Stück	Zahl der Exempl.
33	Grönland, Jacobshavn	1,2	1
34	Grönland, Ovifak, 1870	2100	6
35	San Gregorio, Chihuahua, Mexico	0,5	6
36	Guilford, Nord-Carolina, V. St., 1830 . . .	8,5	1
37	Jewell Hill, Madison, N. C.. V. St., 1856 . .	40	2
38	Krasnojarsk, Sibirien, 1776	223	12
39	Lagrange, Oldham C., Kentucky, V. St., 1860.	383	1
40	Lenarto, Ungarn, 1815	51	4
41	Löwenfluss, Süd-Afrika, 1853	5	1
42	Lockport, New-York, V. St., 1845	43	1
43	Madoc, Canada, 1854	19	1
44	Marshall C., Kentucky, V. St., 1856 . . .	142	1
45	Milwaukee, Wisconsin, V. St., 1858	25	1
46	Nebraska, V. St., 1856	28	2
47	Nelson, C., Kentucky, V. St., 1856	358	2
48	Nevada, V. St.	6	1
49	Newton, C. Arkansas, V. St., 1860	22	1
50	Oaxaca, Mexico, 1843	3,75	1
51	Obernkirchen, Schaumburg, Preussen, 1863 .	180	2
52	Oktibeha, Mississippi, V. St., 1857	1,5	1
53	Orange River, Süd-Afrika, 1856	31	1
54	Paraguay, Paranafluss (Tucuman?)	5	1
55	Petropawlowsk, Sibirien, 1841	7	1
56	Pohlen? aus Berzelius Sammlung	4	1
57	Pittsburg, Pensylvanien, V, St., 1850 . . .	104	2
58	Puttnam C., Georgia, V. St., 1854	33	1
59	Rasgata, Neu-Granada, 1823	12	1
60	Red River (Louisiana), Texas 1808	8	2
61	Rittersgrün, Sachsen, 1861	63	1
62	Robertson C., Tennesee, V. St., 1861 . . .	46	2
63	Rockingham, N.-Carolina, V. St.	—	1
64	Ruffs Mountain, Süd-Carolina, V. St., 1850 .	36	2
65	Salt River, Kentucky, V. St., 1851	14	1
66	Santa Rosa, Mexico	50	2
67	Sarepta, Saratow, Russland, 1854.	20	1
68	Schwetz, Preussen, 1850	48	1
69	Scriba, Oswego C., V. St., 1814	17	3
70	Seeläsgen, Brandenburg, Preussen, 1847 . . .	26	3
71	Sierra de Chaco, Atakama, 1862.	12	1
72	Senaca-See, New-York, V. St., 1851. . . .	121	1

	Fundort.	Gewicht in Grm. Haupt-Stück	Zahl der Exempl.
73	Senegal, Bambuk, Afrika, 1763	1	2
74	Smithland, Livingston C., Kentucky, V. St., 1840	8	1
75	Steinbach, Sachsen, 1751	10	1
76	Tabarz, Thüringen, 1854	20	1
77	Tazewell, Tennesee, 1854	198	2
78	Toluca, Mexico, 1784—1856	2025	9
79	Tucuman, Süd-Amerika, 1783	0,5	1
80	Tuczon, Mexico, 1850	17	1
81	Tula, Russland, 1857.	7	1
82	Union C., Georgia, V. St, 1853	14	1
83	Virginien, aus einer Petroleumquelle	1,7	1
84	Wayne, Ohio, V. St., 1859.	1,5	1
85	Werknoi-Udinsk, Sibirien, 1854	15	1
86	Zacatecas, Mexico, 1792.	58	3
	Zweifelhafte.		
	Grönland (Niakornak?)	34	1
	Hemalga, Chili, 1840	31	2
	Hommoney Creek, Nord-Car., V. St., 1845 .	195	1
	Newstead, Shottland, 1861	68	2
	Geschmiedete.		
	Bitburg	361	2
	Schwetz	256	1
	Bemdego	22	1
	Fundort unbekannt	370	1

Wöhler.



[redacted]

06
G5[redacted]

JUN 24 1979

Stanford University Library
Stanford, California

In order that others may use this book, please return it as soon as possible, but not later than the date due.